tehnici manageriale

Terry Lucey

Tehnici cantitative

Quantitative techniques

III 266.124

EDITURA TEHNICA

CU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BIBL. CENTR. UNIV.
„M. EMINESCU" IAȘI
III 266. 121

BCU IAȘI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

16

BCU IAȘI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Lucrare editată cu sprijinul financiar al
BRITISH BOOKS FOR MANAGERS

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Terry Lucey

248139

TEHNICI CANTITATIVE

Traducere din limba engleză:
Bogdan Chircea

034169
B.C.U. - IASI

EDITURA TEHNICĂ
Bucureşti, 2001

ALE
BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

QUANTITATIVE TECHNIQUES, by Terry Lucey
Copyright © Terry Lucey
DP Publications (Letts Educational) Ltd.
Aldine Place, London W12 8 AW

This translation of „Quantitative Techniques" originally published in English in 1979 is published by arrangement with DP Publications (Letts Educational) Ltd.

Prezenta traducere a lucrării originale „Quantitative Techniques" apărute în anul 1979 în limba engleză este publicată cu acordul editurii DP Publications (Letts Educational) Ltd.

Copyright © 2001, S.C. Editura Tehnică S.A.
Toate drepturile asupra acestei ediții sunt rezervate editurii.

Adresă: **S.C.Editura Tehnică S.A.**
Piața Presei Libere 1
33 București, România
cod 71341

Copertă: **Andreea Staicu**
Redactor: **Paul Iordănescu**
Tehnoredactor: **Roxana Ioana Roșu**
Procesare P.C.: **Gabriela Chircea**

Bun de tipar: 10.01.2001; coli de tipar: 37
ISBN: 973-31-2021-9
Tipărit SEMNE '94

18. MAR. 2002

BCU ASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

PREFAȚĂ

1. Adresabilitatea lucrării

Această lucrare asigură o cunoaștere temeinică a tehnicilor cantitative și este adresată în mod special:

a) Studenților care se pregătesc pentru examene de admitere în următoarele asociații profesionale:

- *Chartered Association of Certified Accountants*
- *Chartered Institute of Management Accountants*
- *Chartered Institute of Public Finance and Accountancy*
- *Institute of Chartered Accountants*
- *Institute of Chartered Secretaries and Administrators*
- *Institute of Data Processing Management*
- *Institute of Company Accountants*

b) Studenților la cursurile superioare de BTEC și celor care urmează studii de afaceri, contabilitate și orice alt curs universitar incluzând tehnici cantitative.

c) Managerilor și altor categorii de personal din industrie, comerț, administrație locală, care doresc să-și asigure o cunoaștere aprofundată a tehnicilor cantitative, care să-i ajute în activitatea profesională și în ușurarea comunicării cu contabilii și specialiștii din domeniul cercetării operaționale.

2. Forma de prezentare

Lucrarea este realizată într-o formă obișnuită, cu paragrafe numerotate și rezumat la sfârșit de capitol, urmate de întrebări recapitulative și de examinare la sfârșitul fiecărui capitol. Această abordare a fost verificată anterior, eficiența sa fiind confirmată de mii de studenți, lucrarea putând fi folosită atât pentru studiul independent, cât și în concordanță cu cursurile predate în colegiu.

3. Indicații pentru utilizarea eficientă a lucrării

Pentru a fi mai accesibilă, lucrarea este împărțită în capitole cu paragrafe numerotate. Fiecare capitol este urmat de o serie de întrebări recapitulative, după

BCU CLUJ UNIVERSITY LIBRARY

care este notat numărul paragrafului la care se referă, trecut între paranteze. Vă recomand să încercați să răspundeți fără a consulta manualul, verificând apoi corectitudinea răspunsului.

În plus, majoritatea capitolelor mai conțin și un număr de exerciții-test. Exercițiile sunt mai scurte și mai simple decât întrebările tipice de examinare dovedindu-se utile pentru învățarea și fixarea cunoștințelor. La sfârșitul exercițiilor sunt date răspunsurile, dar vă sfătuim să nu „trageți cu ochiul" la acestea și să încercați să le dați singuri.

La locul potrivit (după capitolele 3, 9, 15, 21, 26 și 31) am introdus secțiuni speciale de evaluare și recapitulare, care conțin întrebări recapitulative extrase din cele mai recente examene profesionale. Întrebările au fost alese nu atât pentru recapitularea materialului lucrării, cât pentru extinderea cunoștințelor și a înțelegerii materiei. În appendice sunt date răspunsurile și rezolvările pentru aceste probleme, dar din nou vă recomandăm să răspundeți și să rezolvați singuri întrebările înainte să consultați appendicele.

Fiecare secțiune specială de evaluare și recapitulare conține și o serie de întrebări fără răspunsuri. Acestea pot fi folosite de profesori la clasă, când lucrarea este utilizată ca manual sau ca exerciții suplimentare atunci când este folosită pentru studiul individual.

4. Succesiunea studiului

Lucrarea trebuie studiată respectându-se succesiunea capitolelor. Aceasta a fost concepută astfel încât să asigure o acumulare progresivă a cunoștințelor, fiecare capitol cuprinzând toate principiile necesare, sau continuând prezentarea din capitolul sau capitolele anterioare.

Note la ediția a 5-a

Scrisorile primite cu privire la edițiile anterioare ale acestei lucrări au fost extrem de bine venite și vreau să le mulțumesc profesorilor și studenților pentru feed-back-ul constructiv.

Particularități ale ediției a 5-a

a) S-au făcut numeroase revizuiri de detaliu și au fost extinse informațiile asupra unor subiecte, ca: probabilistică, curbe de învățare medii, marginale sau cumulative, distribuții frecvențiale cumulative.

b) Au fost incluse întrebări din ultimele grile de testare profesională.

c) Sunt precizate și dezvoltate temele pe care și le propune fiecare capitol.

Terry Lucey
1996

BCU "CAROL I" UNIVERSITY LIBRARY

CUPRINS

Partea 1 1
1. Introducere în tehnicile cantitative 1
2. Probabilitățile și luarea deciziilor 9
3. Arborele decizional 35
Evaluare și recapitulare – partea 1 46
Partea 2 53
4. Statistică – introducere 53
5. Statistică – deducția statistică 86
6. Testarea ipotezelor 102
7. Corelație și regresie 131
8. Regresia multiplă și neliniară 155
9. Previzionarea – analiza seriilor cronologice 175
Evaluare și recapitulare – partea 2 197
Partea 3 210
10. Calculul diferențial 210
11. Controlul stocurilor – introducere și terminologie 231
12. Controlul stocurilor – tipuri de sisteme de control 239
13. Controlul stocurilor – cantitatea economică de comandă 247
14. Controlul stocurilor – stocurile de siguranță și nivelurile de completare 263
15. Simularea 271
Evaluare și recapitulare – partea 3 288
Partea 4 295
16. Programarea liniară – introducere 295
17. Programarea liniară – soluții grafice 305
18. Programarea liniară – metoda simplex de maximizare 326
19. Programarea liniară – metoda simplex de minimizare 345
20. Transportul 351
21. Distribuirea 371
Evaluare și recapitulare – partea 4 382
Partea 5 390
22. Analiza în rețea – introducere și terminologie 390
23. Analiza în retea – analiza datelor 400

24. Analiza în rețea – planificarea costurilor 416
25. Analiza în rețea – programarea resurselor 422
26. Analiza în rețea – activitatea în rețelele nodulare 428
Evaluare și recapitulare – partea 5 433
Partea 6 440
27. Matematici financiare 440
28. Evaluarea investițiilor – elemente fundamentale și tehnici 455
29. Evaluarea investițiilor – incertitudinea și raționalizarea capitalului 479
30. Algebră matriceală 511
31. Analiza de înlocuire 528
Evaluare și recapitulare – partea 6 535
Tabele statistice și financiare 541
Tabelul I: Ariile subiacente curbei standard normale 541
Tabelul II: Distribuție normală 542
Tabelul III: Procentajul punctelor distribuției *t* 542
Tabelul IV: Distribuția χ^2 543
Tabelul V: Punctele procentuale ale distribuției f 544
Tabelul VI: Tabelul probabilităților Poisson 545
Tabelul VII: Rate compuse 546
Tabelul VIII: Factorii valorii actuale 547
Tabelul IX: Factorii de anuitate pentru valoarea actuală 548
Răspunsuri la întrebări 549
Partea 1 549
Partea 2 553
Partea 3 565
Partea 4 570
Partea 5 575
Partea 6 579

BCU IASI/CENTRUL UNIVERSITAR LIBRARY

PARTEA 1

1. INTRODUCERE ÎN TEHNICILE CANTITATIVE

1. Obiective

După parcurgerea acestui capitol:
- veți cunoaște principiile utilizării modelelor;
- veți putea descrie diferite tipuri de modele;
- veți înțelege importanța riscului și a incertitudinii;
- veți putea descrie etapele unui studiu de cercetare operațională;
- veți afla că lucrarea presupune cunoașterea unor elemente fundamentale de matematică și statistică.

2. Deosebiri de terminologie

Titlul lucrării este *Tehnici cantitative*. Cu toate acestea, sunt folosiți o mulțime de alți termeni pentru concepte și tehnici descrise în cuprinsul ei. Printre acestea – tehnicile de luare a deciziilor – cercetarea operațională – tehnicile analitice – analiza cantitativă – matematica pentru afaceri și știință managerială. Indiferent de titulatură, este important de ținut seamă de faptul că sunt descrise tehnici din același grup și mai mult decât atât, este folosită aceeași abordare, originea acesteia fiind reprezentată de definiția dată cercetării operaționale de către British Standard – Institutul Britanic de Standardizare.

3. Definiția cercetării operaționale

„Cercetarea operațională reprezintă atacul științei moderne asupra problemelor complexe care se ridică în privința direcționării și managementului sistemelor mari de oameni, mașini, materiale și bani, în industrie, afaceri, guvernare, apărare. Abordarea distinctă implică elaborarea unui model științific al sistemului, cuprinzând măsurarea unor factori cum ar fi schimbările și riscurile, pe baza cărora să se poată realiza previziunea și compararea rezultatelor deciziilor, strategiilor și controalelor alternative. Scopul cercetării operaționale constă în determinarea politicii și a modului ei de actiune, pe baze stiintifice."

4. Caracteristicile fundamentale ale abordării cercetării operaționale

Definiția oficială prezentată anterior cuprinde mai multe caracteristici fundamentale și anume:

a) aplicarea unei abordări bazată pe un model;
b) abordarea sistemică a organizării;
c) recunoașterea riscului și a incertitudinii;
d) asistență în domeniul luării deciziilor manageriale și al controlului aplicării lor.

5. Aplicarea unei abordări științifice bazată pe modele

Baza cercetării operaționale CO constă în construirea unor modele ale problemelor avute în vedere, într-o manieră obiectivă, tactică și experimentarea pe baza acestora, pentru stabilirea rezultatelor diferitelor căi de acțiune posibile. Modelul constituie o reprezentare a realității, putând fi realizat în termeni grafici, fizici sau matematici. Tipul de model cel mai frecvent utilizat în CO este *modelul matematic*, respectiv tipul de model prin care se încearcă să se descrie evoluțiile din lumea reală prin intermediul simbolurilor, ecuațiilor și al formulelor matematice.

Un exemplu de model matematic simplu, familiar contabililor, este reprezentat de următoarea ecuație matematică pentru calculul cheltuielilor de regie pe un interval de timp. Se presupune că totalul cheltuielilor de regie este format din cheltuieli fixe și cheltuieli variabile, care sunt direct proporționale cu numărul de unități de produs realizate. Ecuația este

$$y = a + bx$$

și reprezintă raportul dintre cheltuielile totale de regie și numărul de unități de producție realizate, unde: y este totalul cheltuielilor de regie;

a – cheltuielile fixe pe perioada respectivă;

b – cheltuielile variabile pe unitatea de producție (presupuse a fi constante);

x – numărul de unități de producție realizate.

Acest model este în mod evident foarte simplu, dar majoritatea modelelor matematice sunt mult mai complexe. Este important de reținut însă următorul aspect: indiferent cât de complicat ar putea să pară un model matematic și indiferent cât de multe variabile ar cuprinde, el implică totuși un grad de simplificare a realității și prin urmare, rezultatele sau predicțiile obținute prin aplicarea modelului trebuie folosite cu atenție și luare-aminte.

Deși modelele matematice sau simbolice sunt cele mai larg utilizate, uneori mai sunt aplicate și modele iconice, analogice, de simulare sau euristice.

Modelele iconice sunt modele vizuale ale obiectivelor reale pe care le reprezintă. De exemplu, modelul unui motor cu abur este mult mai mic decât în realitate, în timp ce modelele atât de familiare, din mase plastice, colorate, ale structurilor moleculare

sunt mult mai mari. Amândouă aceste modele sunt modele iconice, ca și fotografiile, hărțile și diagramele, deși acestea din urmă nu reproduc de fapt realitatea pe care o reprezintă. Aceste modele sunt adeseori greu de manevrat experimental (dar nu întotdeauna, dacă ne gândim la tunelurile aerodinamice pentru aparatele de zbor) astfel încât nu sunt folosite foarte frecvent în cercetarea operațională.

Modelele analogice se folosesc la un set de mișcări sau proprietăți fizice pentru reprezentarea unui alt set. De exemplu, modificările suferite de o bucată de metal supusă unor solicitări poate fi reprezentată într-un mod mult mai ușor de observat și analizat prin folosirea unei epruvete. Curbele de nivel de pe hărți și liniile de pe grafice sunt de asemenea analoage realității pe care o reprezintă.

Deși modelele analogice sunt mult mai versatile decât modelele iconice, nu au flexibilitatea modelelor matematice.

Modelele de simulare reprezintă comportamentul unui sistem real. Probabil că exemplul cel mai bine cunoscut este simulatorul de zbor folosit pentru antrenamentul piloților. Modelele de simulare sunt utilizate în cazul în care nu există modele matematice adevărate, atunci când modelul matematic este prea complex sau atunci când nu se poate experimenta pe un sistem real fără a produce daune sau distrugeri – de exemplu, așa cum nu este posibilă antrenarea piloților pe aparate de zbor reale. În contextul managerial, o aplicație a modelelor de simulare este studiul comportamentului oamenilor si al obiectelor în șiruri. Odată cu dezvoltarea unor facilități de tehnică de calcul relativ necostisitoare, multe jocuri de afaceri se bazează pe simularea desfășurării afacerii. În cuprinsul lucrării se vor face referiri mult mai ample privind acest model.

Modelele euristice sunt modele la care se folosește un set de reguli intuitive, în ideea că pot conduce la cel puțin o soluție realizabilă, mai bună decât cu metodele aplicate în momentul respectiv. De exemplu, șoferul unei furgonete care onorează comenzi telefonice la domiciliul clientului poate fi instruit să-și programeze predarea comenzilor după următoarea regulă: „după fiecare comandă, prezintă-te la clientul cel mai apropiat de locul în care te afli". La primele ore, regula aceasta va reprezenta cu siguranță o soluție foarte bună, dar la sfârșitul zilei poate conduce la necesitatea deplasării pe distanțe foarte lungi pentru revenirea la depozit. Șoferul nu are cum să știe dacă această metodă asigură parcurgerea cu maximă eficiență a unui traseu, în ceea ce privește durata și numărul de clienți, și eventuala creștere a eficienței muncii sale poate fi obținută numai prin testarea altor abordări euristice.

Modelele mai pot fi clasificate și în *normative* și *descriptive*. Modelele normative sunt destinate găsirii soluției celei mai bune, optime, ideale a unei probleme. Majoritatea modelelor matematice intră în această categorie. Modelele descriptive, așa cum sugerează și denumirea care le-a fost dată, descriu comportarea sistemului fără a viza găsirea soluției optime a unei probleme. De exemplu, în această categorie intră simularea.

Ceea ce trebuie avut în vedere este nu atât denumirea modelului, cât măsura în care îl poate ajuta pe manager să-și atingă scopul pe care și l-a propus.

6. Abordarea sistemică a organizării

Scopul fundamental al cercetării operaționale constă în identificarea modului cel mai eficient de conducere a afacerilor unei organizații, ceea ce s-ar putea traduce prin optimizare în studiul problemelor care îi stau în față. Practicianul din domeniul cercetării operaționale încearcă să optimizeze funcționarea organizării luate ca un întreg și nu intervine prin componente subunitare cum ar fi departamentele sau secțiile. Însă lucrul acesta este mai ușor de zis decât de făcut și datorită necesității impuse de practică, de a lucra cu arii de aplicație controlabile, ceea ce presupune utilizarea unor modele simplificate și incomplete de operare. Este posibil să se obțină soluții suboptime, adică soluții optime pentru o parte a firmei dar nu și pentru întreaga firmă luată ca un întreg. Acesta este un alt aspect important care trebuie avut în vedere la studiul rezultatelor unei analize de cercetare operațională.

7. Recunoașterea riscurilor și incertitudinilor

Planurile de afaceri și luarea deciziilor implică și o operație de previziune. Aceasta nu poate fi făcută cu pretenția unei valabilități de 100% și de aceea, punerea la dispoziția specialiștilor care elaborează planurile și iau deciziile de afaceri a unei analize sistematice a posibilelor dimensiuni ale riscurilor și incertitudinilor implicate constituie o componentă vitală a oricărui studiu de cercetare operațională CO. Tehnicile de cercetare operațională înlătură prin ele însele riscurile și incertitudinile, dar pot pune în lumină efectele acestora asupra activității firmei. O metodă importantă, care ușurează acest proces este ***analiza sensibilității***. Când o soluție este obținută prin aplicarea uneia dintre tehnicile de cercetare operațională (programarea liniară, controlul inventarului, evaluarea investiției), unii dintre factorii problemei sunt modificați în mod intenționat (costurile, cantitățile de materiale), pentru a se stabili ce efect au asupra soluției originale. Dacă valorile soluției originale se schimbă considerabil la modificările minore ale valorilor factorilor, soluția se numește sensibilă. În aceste condiții, întreaga probabilitate necesită o analiză mult mai profundă, un factor cu sensibilitate deosebit de mare putând duce la modificarea deciziei.

8. Asistența în domeniul luării deciziilor manageriale și al controlului aplicării lor

În general, specialiștii în CO nu iau decizii de afaceri. Rolul lor constă în furnizarea de informații în sprijinul celor care realizează practic planurile de afaceri și iau decizii. Talentul, experiența și judecata managerială nu pot fi înlocuite de tehnicile formale de luare a deciziilor. Rezultatele unei analize CO reprezintă numai o categorie de informații care sunt avute în vedere în procesul de luare a deciziilor. Între specialistul în CO care oferă informația în sprijinul managerilor și alte categorii

de specialiști ce furnizează informații implicate în luarea deciziilor, există o independență totală. Prin urmare, cunoașterea elementelor de CO de către contabil și cunoașterea elementelor de contabilitate de către specialiștii în CO se poate dovedi foarte folositoare, ducând la îmbunătățirea calității informațiilor furnizate. Există motive foarte temeinice care explică de ce cele mai eficiente echipe de CO sunt alcătuite din specialiști venind din diferite domenii – economiști, contabili, matematicieni, ingineri, psihologi etc. În acest fel, există o șansă mai mare ca diversele fațete ale problemelor legate de afaceri să fie recunoscute și analizate.

9. Cuantificarea factorilor

Nu toți factorii implicați în luarea unei decizii sau în elaborarea unui plan de afaceri pot fi cuantificați, iar tehnicile cele mai larg utilizate de CO sunt cele care se bazează pe factori cuantificabili cum sunt costul, venitul, numărul de unități de produs etc. Aceste tehnici sunt incluse cel mai adesea în grilele de examinare.

10. Etapele studiului C.O.

Studiul C.O. poate fi împărțit în șapte etape:
a) recunoașterea și definirea problemei;
b) construirea modelului;
c) colectarea informațiilor;
d) soluția problemei;
e) interpretarea soluției;
f) implementarea soluției finale;
g) revizuirea și menținerea la zi a soluției finale.

11. Recunoașterea și definirea problemei

Nici o tehnică nu poate fi aplicată și nici o analiză nu poate fi efectuată înainte ca problema să fie recunoscută și definită riguros. Descrierea vagă a problemelor nu este suficientă. Condiția minimă necesară și suficientă este definiția clară și detaliată a problemei respective. Pasul acesta este foarte dificil și pentru îndeplinirea sa este necesară o analiză minuțioasă.

O analiză superficială poate să nu conducă la identificarea adevăratei probleme. Pe de altă parte, o analiză aprofundată, relații apropiate și prietenești cu persoanele implicate în zona supusă analizei dau cele mai bune rezultate.

12. Construirea modelului

După definirea problemei, trebuie construit un model, de dorit printr-o tehnică adecvată, cum ar fi una dintre tehnicile prezentate în această lucrare. Se va avea în vedere ca unei probleme atipice să nu i se aplice o tehnică de CO standard. Trebuie avut în vedere ca modelul să cuprindă caracteristicile esențiale ale problemei aflate în studiu.

13. Colectarea informațiilor

Și în cazul primelor două etape sunt adunate o mulțime de informații, dar pentru rezolvarea problemei sunt necesare cu mult mai multe. Aceste informații trebuie să conțină: costul, veniturile, producția și informații despre stocuri, toate acestea fiind adunate fie din dosare anterioare, fie din estimări de viitor. Informațiile trebuie să cuprindă de asemenea cuantificarea unor factori care nu sunt întotdeauna cuantificați, cum ar fi riscul și incertitudinea.

14. Soluția problemei

Pentru majoritatea problemelor și în special pentru cele întâlnite în grilele de examinare, soluția se obține în mod obișnuit prin mijloace matematice standard, aplicând o tehnică CO recunoscută. Acest lucru însă nu mai este valabil pentru problemele întâlnite în practică, care pot necesita aplicarea unei analize matematice avansate și a unor tehnici nestandardizate. Chiar și atunci când se poate obține soluția prin folosirea unui model de bază, problemele practice necesită cantități foarte mari de informații, impunând efectuarea unor calcule interminabile, care fac necesară chiar și folosirea calculatoarelor.

15. Interpretarea soluției

Deși majoritatea tehnicilor CO dau soluții optime, trebuie avut în vedere faptul că modelul nu poate da soluția problemei reale, ci a unei versiuni simplificate a acesteia, reprezentată de model. În mod similar, rezultatele trebuie tratate cu prevedere, trebuind acordată importanța cuvenită unor probleme care apar în toate studiile CO, incluzând:

- cât de bine reflectă modelul realitatea, respectiv, acuratețea modelului raportată la problema reală;
- acuratețea informațiile utilizate și a presupunerilor făcute;
- pericolul reprezentat de suboptimizare.

Suboptimizarea reprezintă situația în care obiectivele unui subsistem (de exemplu un departament) sunt promovate în detrimentul obiectivelor organizaționale generale care ar trebui, de fapt, să aibă întâietate.

16. Implementarea soluției finale

După interpretarea atentă a rezultatelor studiului CO și după efectuarea modificărilor ce se impun, în mod normal, soluția rezultată ar trebui implementată. Uneori însă, soluția nu poate fi implementată deoarece – deși validă din punct de vedere tehnic – manageriatul poate considera că implementarea sa nu s-ar reflecta într-o eficientizare a costurilor sau că implementarea sa ar provoca șocuri prea puternice procesului tehnologic și/sau salariaților, clienților, furnizorilor și cumpărătorilor.

17. Revizuirea și menținerea la zi a rezultatelor finale

După implementarea soluției, performanța modelului trebuie monitorizată cu atenție pentru a avea siguranța că soluția este realmente funcțională și dă roadele scontate.

Procesul de revizuire trebuie să aibă loc la intervale regulate, astfel încât eventualele modificări „din mers" să poată fi făcute pentru a răspunde celor mai mici modificări ale condiției obiective sau pentru a sesiza din timp momentul în care apar modificări majore, care fac soluția implementată ineficientă. Bineînțeles, aceasta este o formă a procedurii de audit, familiară contabililor.

Toate organizațiile sunt supuse schimbării. Prin urmare, nici o soluție nu rămâne optimă pentru vecie, schimbările în sistem sau în mediu, în care funcțiile sistemului, făcând esențială revizuirea permanentă a modelelor utilizate și a soluțiilor existente, pentru a se stabili dacă sunt necesare ajustări.

18. Fundamentul matematic și statistic

Standardele către care tinde această lucrare presupun cunoașterea principiilor matematice și statistice, cunoaștere care se poate obține prin studii la nivel de bază. Prin urmare, această lucrare nu acoperă subiectul matematicii și statisticii la nivelul de bază, dar datorită modelului de abordare didactică pas cu pas și a includerii unor materiale recapitulative (de exemplu, concepte probabilistice) lucrarea este pe înțelesul studenților, inclusiv al celor ale căror cunoștințe de bază din matematică și statistică sunt destul de estompate de trecerea timpului.

19. Rezumat

a) Conceptele și tehnicile prezentate în această lucrare au o multitudine de denumiri. Mai importantă decât denumirea însă este metoda de abordare a lor.

b) Această abordare este caracterizată printr-o metodă științifică, bazată pe un model, pentru rezolvarea tuturor problemelor.

c) Indiferent de natura problemei, studiile CO au etape caracteristici specifice: recunoașterea problemei, construirea modelului, adunarea informațiilor, rezolvarea problemei, interpretarea soluțiilor, implementarea soluției finale, revizuirea și menținerea la zi a soluției finale.

d) Această lucrare acoperă întregul domeniu al tehnicilor cantitative întâlnite în mod obișnuit în cursurile de colegiu și în grilele de examinare profesională, presupunând posedarea unor cunoștințe de matematică și statistică la nivel de bază.

20. De reținut

a) CO nu trebuie privită ca un domeniu de studiu compartimentat. Abordarea de bază este aplicabilă practic în orice situație, în special în cele asociate cu planul de afaceri, controlul și luarea deciziilor.

b) Notația matematică formală este redusă la un minim necesar în această lucrare și nici nu se dau demonstrații formale. Această atitudine a fost adoptată în acord cu principiile adoptate de principalele corpuri profesionale în ceea ce privește examinarea candidaților, concentrându-se pe aplicarea tehnicilor de CO în cazul unor probleme practice.

Întrebări de autoevaluare *Numerele dintre paranteze se referă la numerotarea paragrafelor*

1. Definiți CO cu cuvintele dvs. Comparați definiția personală cu definiția dată de British Standard. (2)
2. Care sunt caracteristicile principale ale abordării CO? (4)
3. În ce mod contribuie CO la luarea deciziilor manageriale? (5)

BCU IAȘI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

B.C.U. „M. EMINESCU" IAȘI

2. PROBABILITĂȚILE ȘI LUAREA DECIZIILOR

1. Obiective

După parcurgerea acestui capitol:

- veți ști care este semnificația noțiunii de probabilitate;
- veți înțelege semnificația sintagmei „probabilitate subiectivă";
- veți putea utiliza regulile probabilistice de adunare și multiplicare;
- veți înțelege principiile probabilității condiționale;
- veți cunoaște principiile regulii sau teoremei lui Bayes;
- veți face distincția între permutații și combinații;
- veți înțelege cum se calculează și se folosește valoarea estimată;
- veți ști cum să prețuiți informațiile perfecte și imperfecte;
- veți putea folosi diferite reguli de luare a deciziilor, incluzând maximin, maximax, minimax și regula Hurwicz.

2. Definiția probabilității

Pentru scopurile noastre, probabilitatea poate fi considerată drept cuantificarea incertitudinii. Incertitudinea mai poate fi denumită și „probabilitate", „șansă" sau „risc". Probabilitatea este reprezentată de p și poate lua numai valori cuprinse de la 0 (însemnând imposibilitate), la 1 (însemnând certitudine). De exemplu, este imposibil să zbori până la Lună fără ajutor și este sigur faptul că, într-o zi, fiecare dintre noi va muri. Relațiile acestea pot fi exprimate după cum urmează:

$$p(\text{zbor până la Lună fără ajutor}) = 0,$$

$$\text{și } p(\text{moarte}) = 1.$$

Într-un mod și mai general, putem defini probabilitatea unui eveniment, E, după cum urmează:

$$p(E) = \frac{\text{Numărul rezultatelor favorabile}}{\text{Numărul total al rezultatelor posibile}},$$

unde un eveniment are o anumită probabilitate de a se produce; de exemplu, aruncarea

unei monede până când aceasta cade cu marca în sus, extragerea unui as dintr-un pachet de cărți.

Prin urmare, probabilitățile pot fi privite ca frecvențe relative, așa cum va rezulta din exemplul următor.

Care este probabilitatea extragerii unui as dintr-un pachet de cărți amestecate în prealabil?

$$p(\text{extragere a asului}) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

Cifra 4 de la numărător semnifică cei 4 ași din pachet, iar numărul 52 de la numitor reprezintă totalul cărților din pachet.

Care este probabilitatea de a se arunca un 3 cu un singur zar cu șase fețe:

$$p(\text{aruncare a unui 3}) = \frac{1}{6}.$$

Cifra 1 de la numărător semnifică fața zarului pe care trebuie să o nimerim și cifra 6 de la numitor semnifică numărul total de fețe al cubului.

3. Probabilitatea obiectivă și subiectivă

Dacă probabilitatea producerii unui eveniment se bazează pe informații anterioare, iar condițiile producerii evenimentului sunt repetabile în cazul unui test, atunci ea se va numi *probabilitate statistică* sau *obiectivă*. De exemplu, posibilitatea ca aruncând o monedă, aceasta să cadă cu marca în sus este de 50% sau 1/2 sau 0,5. Valabilitatea acestei valori poate fi dovedită prin încercări repetate. În majoritatea cazurilor, probabilitatea obiectivă nu este aplicabilă în afaceri, astfel încât se apelează la *probabilitatea subiectivă*. Atât *probabilitatea obiectivă* cât și cea *subiectivă* reprezintă cuantificări ale gândirii, experienței și priceperii profesionale.

De exemplu, directorul de vânzări consideră că există șanse de 40% (adică $p = 0,4$) ca firma să aibă comenzi pentru un contingent de mărfuri. Este evident că valoarea propusă de el nu poate fi testată prin încercări repetate. În ciuda neajunsurilor probabilităților subiective, ele constituie singura metodă probabilistică la îndemână în condiții normale și este folosită practic în procesul de luare a deciziilor. Trebuie subliniat faptul că apelul la abordarea probabilistică nu echivalează cu luarea deciziei; cel mult oferă o informație suplimentară care contribuie la luarea hotărârii în cunoștință de cauză.

Notă: Atunci când există mai multe rezultate, fiecare având asociată o probabilitate, totalul valorilor probabilităților trebuie să fie egal cu 1.

4. Reguli fundamentale ale probabilisticii

Indiferent dacă avem de-a face cu probabilități subiective sau obiective, o dată alegerea făcută, metoda respectivă va fi aplicată conform regulilor fundamentale ale probabilisticii prezentate în continuare. Însă înainte de a trece la aceste reguli este necesară definirea a două noțiuni: evenimente reciproc eliminatorii și evenimente independente.

Evenimentele reciproc eliminatorii sunt acele evenimente care nu se pot produce concomitent. Dacă are loc un anumit eveniment, atunci altul/altele sunt excluse. Dacă luăm exemplul clasificării oamenilor după sex, „evenimentele" masculin și feminin sunt reciproc eliminatorii în sensul că dacă o persoană este de sex „feminin", este automat exclusă posibilitatea ca ea să fie, concomitent și de sex „masculin".

Evenimente independente. Două sau mai multe evenimente sunt independente dacă producerea/neproducerea oricăruia dintre ele nu influențează producerea/neproducerea celorlalte. De exemplu, rezultatul oricărei aruncări cu zarul este independent de aruncările anterioare și ulterioare.

Regulile probabilisticii care vor fi prezentate în continuare sunt *aditivitatea, multiplicarea* și *probabilitatea condițională.*

a) *Regula aditivității*

Această regulă este folosită la calcularea probabilității în cazul a două sau mai multor evenimente reciproc eliminatorii. În acest caz, ce vor aduna valorile probabilităților fiecărui eveniment.

Exemplul 1

Care este probabilitatea de a obține un 3 sau un 6 la o singură aruncare a zarului?

P(obținerii unui 3) = 1/6 și P(obținerii unui 6) = 1/6;

∴ P(obținerii unui 3 sau unui 6) = 1/6 + 1/6 = 1/3.

Notă: Rezultatele sunt reciproc eliminatorii atunci când în cazul obținerii unuia, oricare altele sunt excluse.

b) *Regula de multiplicare*

Această regulă este aplicată în cazul șirurilor de evenimente independente pentru care se cunosc valorile probabilităților, cerându-se valoarea probabilității pe ansamblu.

Exemplul 2

Care este probabilitatea obținerii unui 3 și a unui 6 la două aruncări succesive ale zarului?

P(obținerii unui 3) = 1/6 și P(obținerii unui 6) = 1/6;

∴ P(obținerii unui 3 și a unui 6) = 1/6 × 1/6 = 1/36.

Notă: Valoarea 1/36 obținută reprezintă probabilitatea obținerii unui 3 și a unui 6 la două aruncări succesive ale zarului. Dacă ordinea nu este importantă – nu contează dacă se obține 3 și pe urmă 6 întâi 6 și pe urmă 3 – probabilitatea se dublează.

P(obținerii 3 urmată de 6) = *P*(obținerii 3 urmată de 6) + *P*(obținerii 6 urmată de 3);

P(obținerii 3 urmată de 6) = 1/36 + 1/36 = 1/18.

c) *Probabilitatea condiţională*

Reprezintă probabilitatea asociată unei combinaţii de evenimente, cu proprietatea că în cazul unuia dintre ele s-a ajuns anterior la un oarecare rezultat.

Atunci când evenimentele sunt independente, probabilitatea condiţională este aceeaşi ca şi probabilitatea evenimentului ulterior.

Exemplul 3

Probabilitatea aruncării unui total de 10 puncte cu 2 zaruri, înaintea evenimentului (încercării) este de 1/12.

$$P(5 \text{ şi } 5) = 1/6 \times 1/6 = 1/36,$$
$$P(6 \text{ şi } 4) = 1/6 \times 1/6 = 1/36,$$
$$P(4 \text{ şi } 4) = 1/6 \times 1/6 = 1/36,$$
$$1/36 + 1/36 + 1/36 = 3/36 = 1/12.$$

Dar, dacă unul dintre zaruri a fost aruncat deja, obţinându-se un 4, probabilitatea condiţională este probabilitatea de a obţine un 6 cu o singură aruncare a celuilalt zar, care este de 1/6.

Probabilitatea condiţională este reprezentată sub forma

$$P(x \mid y)$$

având semnificaţia

Probabilitatea obţinerii x când s-a obţinut y.

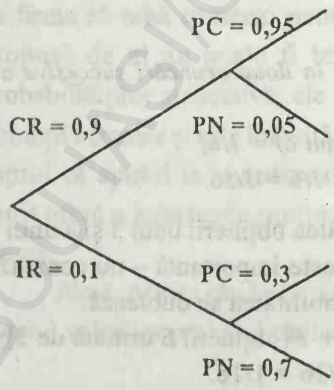
Exemplul 4

Din experienţă anterioară se ştie că o maşină este reglată corect în 90% din cazuri. Atunci când maşina este corect reglată, 95% din produse sunt corespunzătoare, iar atunci când maşina nu este reglată corect, numai 30% din produse sunt corespunzătoare.

Într-o zi, maşina este reglată înainte de pornire şi primul produs este corespunzător. Care este probabilitatea ca maşina să fie corect reglată?

Soluţie

Soluţia se poate prezenta sub forma unui arbore probabilistic sau diagramă, după cum urmează:



$\therefore$ CRPC = 0,9 x 0,95 = 0,855
CRPN = 0,9 x 0,05 = 0,045
IRPC = 0,1 x 0,3 = 0,03
IRPN = 0,1 x 0,7 = 0,07
= 1,00

PC = Produs corespunzător
PN = Produs necorespunzător
CR = Corect reglată
IR = Incorect reglată

∴ Probabilitatea obținerii unui produs corespunzător = CRPC + IRPC = 0,855 + 0,03 = 0,885

∴ Probabilitatea ca mașina să fie corect reglată după obținerea unui singur produs corespunzător

$$\frac{\text{CRPC}}{\text{CRPC} + \text{IRPC}} = \frac{0,855}{0,885} = 0,966.$$

Produse corespunzătoare pot fi obținute atât cu mașina corect reglată, cât și cu mașina incorect reglată. În 1000 de cazuri, vor fi 855 ocazii în care se obțin produse corespunzătoare, mașina fiind corect reglată (CRPC = 0,855), iar în 30 de cazuri, deși este reglată incorect, se obțin totuși produse corespunzătoare (IRPC = 0,03). Prin urmare, dacă obținem un produs corespunzător, putem afirma că sunt 855 de posibilități din 885 de a obține un produs corespunzător când mașina este corect reglată.

5. Aplicații aprofundate ale probabilisticii

Regulile prezentate până în acest moment pot fi rezumate și dezvoltate pe baza exemplelor practice.

Exemplul 5

În primul an de colegiu sunt 100 de studenți, dintre care 36 sunt băieți și studiază contabilitatea și 9 sunt băieți dar nu studiază contabilitatea, 42 sunt fete și studiază contabilitatea, iar 13 sunt fete dar nu studiază contabilitatea.

Folosiți aceste informații pentru a deduce probabilitățile în cazul alegerii la întâmplare a unui student.

Soluție

Informațiile pe care le avem la dispoziție pot fi valorificate în modul cel mai eficient alcătuind un tabel:

	Contabilitate A	Alte studii $\overline{A}$	Total
Băieți B	36	9	45
Fete F	42	13	55
Total	78	22	100

$$1.\ P(B) = \frac{45}{100} = 0,45$$

$$2.\ P(F) = \frac{55}{100} = 0,55$$

$$3.\ P(A) = \frac{78}{100} = 0,78$$

$$4.\ P(\overline{A}) = \frac{22}{100} = 0{,}22$$

$$5.\ P(B \text{ și } A) = \frac{36}{100} = 0{,}36 = P(A \text{ și } B)$$

Deoarece sunt implicate aceleași rubrici ale tabelului

$$6.\ P(B \text{ și } \overline{A}) = \frac{9}{100} = 0{,}09$$

$$7.\ P(F \text{ și } A) = \frac{42}{100} = 0{,}42$$

$$8.\ P(F \text{ și } \overline{A}) = \frac{13}{100} = 0{,}13$$

Probabilitățile de la 1 la 4 pot fi formulate în termenii probabilităților de la 5 la 8.

$$\begin{aligned} 9.\ P(B) &= P(B \text{ și } A) + P(B \text{ și } \overline{A}) \\ &= 0{,}36 + 0{,}09 \\ &= 0{,}45 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10.\ P(F) &= P(F \text{ și } A) + P(F \text{ și } \overline{A}) \\ &= 0{,}12 + 0{,}13 \\ &= 0{,}55 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11.\ P(A) &= P(A \text{ și } B) + P(A \text{ și } F) \\ &= 0{,}36 + 0{,}42 \\ &= 0{,}78 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12.\ P(\overline{A}) &= P(\overline{A} \text{ și } B) + P(\overline{A} \text{ și } F) \\ &= 0{,}09 + 0{,}13 \\ &= 0{,}22. \end{aligned}$$

Acum să presupunem că studentul ales la întâmplare este băiat. Această presupunere modifică datele probabilistice, deoarece secțiunea „fete" a tabelului dispare.

Calculăm posibilitatea ca studentul să studieze contabilitate. *P(A)* nu mai corespunde în noile condiții, probabilitatea care ne interesează acum este *P(A|B)* – probabilitatea ca un student băiat ales la întâmplare să studieze contabilitatea.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$P(A \mid B) = \frac{0,36}{0,45} = 0,80$$

$$= \frac{P(A \text{ și } B)}{P(B)}$$

$$\therefore P(A \text{ și } B) = P(B) \times P(A|B)$$

$$\therefore P(A \text{ și } B) = 0,45 \times 0,80$$

$$= 0,36$$

Acum să presupunem că studentul ales la întâmplare studiază contabilitatea. Să calculăm probabilitatea ca studentul să fie băiat, adică $P(B|A)$.

$$P(B \mid A) = \frac{0,36}{0,78} = 0,462$$

$$= \frac{P(A \text{ și } B)}{P(A)}$$

Așadar $P(A \text{ și } B) = P(A) \times P(B|A)$.

Atenție! Deși $P(A|B) \neq P(B|A)$, între ele există o relație prin intermediul relațiilor $P(A \text{ și } B)$ și $P(B \text{ și } A)$.

$$P(B) \times P(A|B) = P(A \text{ și } B) = P(A) \times P(B|A)$$

$$P(B) \times P(A|B) = P(A) \times P(B|A)$$

de unde

$$P(A \mid B) = \frac{P(A) \times P(B \mid A)}{P(B)}$$

și

$$P(B \mid A) = \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(A)}.$$

Exemplul 6

O companie are trei secții de producție S_1, S_2 și S_3 care contribuie cu 40%, 35% și respectiv 25% la producția totală. S-au stabilit următoarele procentaje de rebuturi:

S_1	2%	(0,02)
S_2	3%	(0,03)
S_3	4%	(0,04)

Înaintea desfacerii se face un control final de calitate. Calculați probabilitatea ca un rebut descoperit la controlul final al calității să provină din secția 1 (S_1).

Soluție

Notăm cu R produsul necorespunzător descoperit.

Considerăm $P(S_1)$ = probabilitatea ca produsul ales la întâmplare să provină din S_1.

Considerăm $P(S_2)$ = probabilitatea ca produsul ales la întâmplare să provină din S_2.

Considerăm $P(S_3)$ = probabilitatea ca produsul ales la întâmplare să provină din S_3.

$$P(S_1) = 0{,}40.$$

$$P(S_2) = 0{,}35.$$

$$P(S_3) = \frac{0{,}25}{1{,}00}.$$

Procentajele de rebuturi sunt:

$$P(R|S_1) = 0{,}02.$$
$$P(R|S_2) = 0{,}03.$$
$$P(R|S_3) = 0{,}04.$$

Probabilitatea solicitată poate fi reprezentată ca fiind:

$$P(S_1|R).$$

Probabilitatea necunoscută $P(R)$ trebuie dedusă din formula

$$P(S_1 \mid R) = \frac{P(S_1) \times P(R \mid S_1)}{P(R)}.$$

Rețineți că $$P(S_2 \mid R) = \frac{P(S_2) \times P(R \mid S_2)}{P(R)},$$

$$P(S_3 \mid R) = \frac{P(S_3) \times P(R \mid S_3)}{P(R)}.$$

Rebutul poate apare din oricare dintre cele trei secții S_1, S_2 sau S_3, așadar:

$$P(S_1|R) + P(S_2|R) + P(S_3|R) = 1{,}0.$$

Deoarece $P(R)$ este numărătorul, iar suma este egală cu unitatea, rezultă că expresia

$$P(S_1) \text{ x } P(R|S_1) + P(S_2) \text{ x } P(R|S_2) + P(S_3) \text{ x } P(R|S_3)$$

trebuie să fie egală cu $P(R)$.

Așadar: P(R) = (0,4 x 0,02) + (0,35 x 0,03) + (0,25 x 0,04)
= 0,0080 + 0,0105 + 0,0100
= 0,0285.

Făcând înlocuirile în $P(S_1 \mid R) = \frac{P(S_1) + P(R \mid S_1)}{P(R)}$ rezultă

$$P(S_1 \mid R) = \frac{0{,}4 \times 0{,}02}{0{,}0285}$$
$$= 0{,}2807.$$

BCU "MIHAIL KOGĂLNICEANU" UNIVERSITY LIBRARY

În mod similar

$$P(S_2 \mid R) = \frac{0{,}35 \times 0{,}03}{0{,}02285}$$
$$= 0{,}3684.$$
$$P(S_3 \mid R) = \frac{0{,}25 \times 0{,}04}{0{,}0285}$$
$$= 0{,}3509.$$

Se observă că 0,2807 + 0,3684 + 0,3509 = 1,000

Prin urmare posibilitatea ca un rebut luat la întâmplare să provină din secția 1 (S_1) este 0,2807.

6. Regula lui Bayes

Principiul care stă la baza obținerii rezultatelor de mai înainte este cunoscut sub numele de **legea lui Bayes** și este interesant de observat că procesul implică sensul opus celui obișnuit și anume de la efect la cauză. În cazul anterior a fost descoperit un produs rebutat și s-a găsit metoda probabilistică prin care se poate stabili în ce măsură el putea să provină din secția 1 (S_1).

Regula lui Bayes este utilizată frecvent în analiza decizională pornind de la arborii de decizie (a se vedea capitolul 3), în care informațiile sunt furnizate sub forma probabilității condiționale, trebuind descoperit mersul acestor posibilități.

Forma generală a regulii sau teoremei lui Bayes este

$$P(A \mid B) = \frac{P(A) \times P(B \mid A)}{P(B)}.$$

7. Permutări

Permutarea reprezintă o aranjare ordonată a unor elemente. Astfel, AB este o permutare diferită față de BA, deși elementele individuale A și B sunt aceleași, dar sunt așezate într-o altă ordine. Cel mai adesea, analiștii trebuie să afle cu precizie numărul de moduri în care se poate produce un eveniment, astfel încât să poată calcula o probabilitate oarecare. Dacă s-ar lista fiecare posibilitate, procesul ar dura foarte mult și ar fi expus greșelilor. Însă această sarcină poate fi îndeplinită rapid și simplu apelând la formule.

Exemplul 7

Un restaurant oferă 3 aperitive, 4 feluri principale și 3 deserturi. Câte meniuri diferite sunt posibile?

Soluția este:

$$3 \times 4 \times 3 = 36 \text{ meniuri diferite.}$$

Această idee poate fi dezvoltată în continuare.

Exemplul 8

Un director de garaj trebuie să planifice rutele pentru șoferi. Dacă trebuie făcute 3 livrări pentru clienții X, Y și Z, câte rute pot fi urmate?

Soluție

În acest caz, se pot lista rutele:

Ruta 1	*X*	*Y*	*Z*
Ruta 2	*X*	*Z*	*Y*
Ruta 3	*Y*	*X*	*Z*
Ruta 4	*Y*	*Z*	*X*
Ruta 5	*Z*	*X*	*Y*
Ruta 6	*Z*	*Y*	*X*

Sunt acoperite toate posibilitățile și astfel numărul de rute posibile este 6. Rețineți că dacă ar fi fost vorba despre 6 clienți, numărul rutelor ar fi crescut spectaculos la 720. Problema este cum să afli numărul rutelor posibile fără a se face apel la listare.

Prima livrare poate fi făcută în 3 feluri (pornind din *X*, *Y* sau *Z*). Să spunem că se începe cu *X*. Pentru a doua livrare au mai rămas numai două posibilități (*Y* sau *Z*). Să spunem că se continuă cu *Y*. Ultima livrare nu poate fi făcută decât într-un singur mod. Astfel, numărul rutelor posibile este

$$3 \times 2 \times 1 = 6 \text{ rute.}$$

Dacă numărul clienților ar fi 6, numărul rutelor posibil de urmat ar fi:

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720.$$

Aceste aranjamente se numesc ***permutări.***

Notă: $3 \times 2 \times 1$ se scrie în mod curent 3!, formulă grafică denumită „trei factorial".

La modul general, o permutare de n elemente are următoarea formulare:

$$n! = (n-1)(n-2)(n-3).....$$

Rețineți că, prin definiție, $1! = 1$ și $0! = 1$.

8. Permutările grupurilor

Este posibil ca analistul să nu dorească să listeze toate elementele, ci grupuri de elemente de pe o listă.

Exemplul 9

O companie are patru instructori, A, B, C, D *și două grupe de pregătire. În câte moduri diferite pot fi numiți cei patru instructori la cele două grupe* X *și* Y*?*

BCU Cluj / UNIVERSITY LIBRARY

Soluție

Posibilitățile de numire sunt:

	X	*Y*
1	*A*	*B*
2	*A*	*C*
3	*A*	*D*
4	*B*	*A*
5	*B*	*C*
6	*B*	*D*
7	*C*	*A*
8	*C*	*B*
9	*C*	*D*
10	*D*	*A*
11	*D*	*B*
12	*D*	*C*

Prima numire poate fi făcută în 4 moduri. Pentru a doua nu mai rămân, însă, decât 3 instructori. Acesta fiind numărul de numiri care se cerea, numărul de permutări este:

$$4 \times 3^* = 12.$$

Să presupunem acum că avem 6 instructori și 3 grupe.

prima însărcinare = 6 posibilități

a doua însărcinare = 5 posibilități

a treia însărcinare = 4 posibilități

Numărul permutărilor este

$$6 \times 5 \times 4^* = 120.$$

* *Observați* ultima cifră în fiecare caz. Ambele valori sunt obținute în același mod.

Instructori *n*	Grupe *r*		
4	-2	+1	= 3
6	-3	+1	= 4
(n	-r	+1)	

Un mod convenabil de aflare a numărului pe permutări a *n* elemente luate câte r este utilizarea următoarei formule:

$$n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-r+1).$$

Notă. Se poate folosi și relația

$$\frac{n!}{(n-1)!}.$$

În cazul cu 4 instructori și 2 grupe, soluția este

$$\frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4\times3\times2\times1}{2\times1} = 12 \text{ moduri}.$$

9. Permutări de elemente similare

Vor exista situații în care elementele care trebuie aranjate nu vor fi toate diferite. În acest caz, numărul de permutări va fi redus.

Exemplul 10

Pentru 3 elemente x, y și z vor exista
3 × 2 × 1 = 6 permutări și anume

xyz	*yxz*	*zxy*
xzy	*yzx*	*zyx*

În cazul în care x = y = p, avantajele vor fi:

ppz	*ppz*	*zpp*
pzp	*pzp*	*zpp*

Numărul permutărilor e redus la 3. Formula pentru permutări convenabile în acest caz va fi:

$$\frac{n!}{n_1!\times n_2!\times n_3!\times\ldots n_x!},$$

unde n_1 sunt un grup de elemente similare, la fel și n_2 până la x tipuri de elemente similare. În acest caz, $n_1 = 2$ și $n_2 = 1$, de unde rezultă:

$$\frac{3!}{2\times1!} = \frac{3\times2\times1}{2\times1\times1} = 3 \text{ moduri}.$$

Este posibil să vi se ceară să stabiliți în câte moduri poate fi așezat un grup de persoane în jurul unei mese.

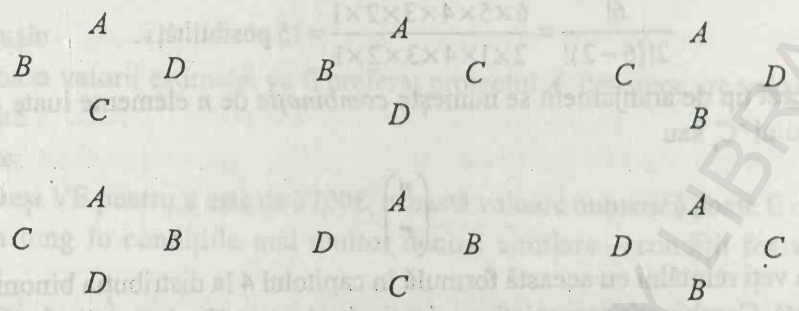
Exemplul 11

A, B, C, D *sunt 4 persoane care iau loc în jurul unei mese de conferințe: în câte feluri pot fi așezate aceste persoane?*

Soluție

Se alege locul lui *A*. În acest fel rămân 3 persoane care pot fi aranjate în 3! moduri, după cum urmează:

BCU CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY



Așadar, există 6 moduri de aranjare a celor 4 persoane. Remarcați faptul că acesta este rezultatul expresiei matematice 3! care este echivalentă cu (4 – 1)!, unde 4 este chiar numărul de persoane care trebuie poziționate în jurul mesei. Prin urmare, 7 persoane vor putea fi așezate în 6! moduri

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720 \text{ moduri.}$$

10. Combinații

Mai pot exista situații care impun realizarea unor selecții în care nu contează ordinea, în sensul că *a, b* este identic cu *b, a*. Această situație este cunoscută sub denumirea de *combinație.*

Exemplul 12

6 ucenici A, B, C, D, E, F trebuie grupați câte 2 pentru un exercițiu. În câte feluri se pot forma aceste grupe de 2? (A, B este același lucru cu B, A și așa mai departe).

Soluția

AB	*BC*	*CD*	*DE*	*EF*
AC	*BD*	*CE*	*DF*	
AD	*BE*	*CF*		
AE	*BF*			
AF				

Așadar, în total, există 15 modalități de formare a perechilor.

Nu este necesar, însă, să listați toate posibilitățile. Pentru calculul combinațiilor poate fi folosită următoarea formulă:

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

unde n este numărul total de elemente, iar r este numărul de elemente din cadrul unui aranjament, exemplul anterior putând fi rezolvat după cum urmează:

$$\frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times1\times4\times3\times2\times1} = 15 \text{ posibilități.}$$

Acest tip de aranjament se numește *combinație* de n elemente luate câte r și are simbolul ${}^{n}C_{r}$ sau

$$\binom{n}{r}$$

Vă veți reîntâlni cu această formulă în capitolul 4 la distribuția binomică.

Notă. Combinația reprezintă o selecție de elemente în care ordinea dispunerii acestora nu contează, adică:

$AB = BA$ (de fiecare dată sunt selectate aceleași 2 elemente).

Spre deosebire de cazul combinației, în cazul permutărilor ordinea este importantă, adică

$AB \neq BA$ (deși sunt aceleași 2 elemente, succesiunea lor este alta).

11. Valoarea estimată

Regulile de bază ale probabilisticii care au fost prezentate până în acest moment ne ajută să cuantificăm opțiunile care se află la dispoziția factorilor de decizie, ajutând prin aceasta în luarea deciziei. Acolo unde opțiunile sunt reprezentate de valori (atâta profit, atâta investiție etc.), ca și în cazul probabilisticii, este adeseori folosit conceptul de *valoare estimată.* Valoarea estimată a unei acțiuni reprezintă produsul probabilității de realizare a profitului cu valoarea acestuia obținută dintr-o serie de încercări.

Exemplul 13

Sunt supuse analizei două proiecte și se cere calcularea valorii estimate pentru fiecare dintre ele. Datele proiectelor au fost estimate după cum urmează:

	Proiectul A					Proiectul B				
	£		p		VE	£		p		VE
Profitul optimist	6000	×	0,2	=	1200	6500	×	0,1	=	650
Profitul probabil	3500	×	0,5	=	1750	4000	×	0,6	=	2400
Profitul pesimist	2500	×	0,3	=	750	1000	×	0,3	=	300
VE a proiectului					£3700					£3350

VE este valoarea estimată

Soluție

Pe baza valorii estimate, va fi preferat proiectul *A*, deoarece are valoarea cea mai ridicată.

Note:

a) Deși VE pentru *A* este de 3700£, această valoare numerică poate fi obținută pe termen lung în condițiile mai multor decizii similare – condiții foarte puțin probabile!

b) Dacă proiectul a fost implementat, poate rezulta oricare dintre cele trei venituri, la valorile estimate.

12. Avantajele și dezavantajele valorii estimate

Valoarea estimată este o tehnică de rezumare utilă, dar are o serie de avantaje și de dezavantaje, ca orice metodă de aproximare.

Avantaje:

a) simplu de înțeles și de calculat;

b) oferă reprezentarea întregii distribuții într-un singur număr;

c) ține cont din punct de vedere matematic de variabilele preconizate ale fiecărui nivel de profit.

Dezavantaje:

a) reprezentând distribuția printr-un număr, nu se ține seamă de alte caracteristici ale distribuției, cum ar fi domeniul de aplicație și asimetria frecvenței de distribuție;

b) pornește de la presupunerea că factorul de decizie nu este înclinat spre risc, respectiv că nu va estima în mod egal distribuțiile, după cum urmează:

	£	*p*	
Profitul pesimist	18 000	0,25	
Profitul probabil	20 000	0,5	VE = 20 000£
Profitul optimist	22 000	0,25	

și

Profitul pesimist	6000	0,2	
Profitul probabil	18 000	0,6	VE = 20 000£
Profitul optimist	40 000	0,2	

Desigur, este puțin probabil ca un factor de decizie să găsească asemenea situații de egalitate datorită înclinației personale pentru risc.

Deși se pare că este foarte mult folosită pentru acest scop, metoda valorii estimate nu este foarte adecvată pentru luarea deciziilor de genul ori-ori. Valoarea estimată poate fi interpretată strict ca valoarea ce ar putea fi practic obținută dacă s-ar lua un număr mare de decizii similare, cu aceleași limite ale profitului și aceleași probabilități asociate. Ceea ce cu greu ar putea reprezenta un mediu de afaceri tipic.

13. Optimizarea nivelurilor de activitate în condiții de nesiguranță

Principiile valorii estimate pot fi folosite pentru calculul stocului maxim sau al nivelului de profit atunci când cererea de pe piață este supusă unor variații aleatorii pe o perioadă oarecare de timp.

Exemplul 14

Un distribuitor cumpără produse perisabile cu 2£/unitate și le vinde cu 5£. Cererea zilnică este nesigură și unitățile nevândute, la sfârșitul zilei sunt înregistrate ca pierderi din cauza perisabilității. Dacă ar face stocuri, ar pierde profitul pe care l-ar fi putut realiza.

Înregistrarea activității sale pe parcursul a 300 de zile este următoarea:

Cererea zilnică (unități)	Nr. de zile	*p*
10	30	0,1
11	60	0,2
12	120	0,4
13	90	0,3
	300	1,0

Ce stoc ar trebui să-și formeze, după o zi pe alta, pentru a avea profit maxim?

Soluția

Este necesară calcularea profitului condiționat (PC) și a profitului estimat (PE).

PC reprezintă profitul care poate fi realizat la orice nivel al stocului și cererii. De exemplu, dacă ar avea un stoc de 13 unități și o cerere de 10 unități

$$PC = (10 \times 5) - (13 \times 2) = 24£,$$

$$PE = PC \times \text{cererea procentuală};$$

de exemplu, în cazul acesta, PC este 24£ și cererea procentuală p = 10%, adică 0,1,

$$\therefore PE = 24£ \times 0,1 = 2,4£.$$

Tabelul 2.1

Valorile profitului condiționat și estimat

Cererea	*p*	Opțiuni de stocare							
		10		11		12		13	
		PC £	PE £	PC £	PE £	PC £	PE £	PC £	PE £
10	0,1	30	3	28	2,8	26	2,6	24	2,4
11	0,2	30	6	33	6,6	31	6,2	29	5,8
12	0,4	30	12	33	13,2	36	14,4	34	13,6
13	0,3	30	9	33	9,9	36	10,8	39	11,7
	1,0		30		32,5		*34,0		33,5

* Optimul

Opțiunea optimă de stocare, dată de tabel, este de 12 unități pe zi

14. Rezolvarea prin formula probabilității marginale

O variantă alternativă pentru rezolvarea problemei de genul celei din exemplul 14 este calcularea profitului marginal (PM), respectiv a profitului realizat prin vânzarea unei unități de produs în plus și a pierderii marginale (P'M), respectiv a pierderii prin vânzarea cu o unitate de produs mai puțin, după care se calculează relația dintre PM și P'M în termeni de asemenea probabilistici.

Exemplul 15

Pornind de la aceleași date ca în exemplul 14, să se rezolve problema prin folosirea relațiilor matematice pentru profitul marginal și pierderea marginală.

Soluție

Din exemplul 14 rezultă:

$$PM = 3£ \text{ și } P'M = 2£.$$

Rezultă că surplusul de unități aflate în stoc trebuie să fie cuprins între limitele următoarei relații:

p (realizarea unor vânzări suplimentare față de stoc) × PM > p (de a nu se face vânzările suplimentare preconizate) × P'M.

Dacă P este probabilitatea realizării unor vânzări suplimentare, $(1 - P)$ este probabilitatea nerealizării vânzării.

La egalitate, se obține:

$$P(PM) = (1 - P)\,(P'M)$$
$$P(PM) + P(P'M) = P'M$$
$$P(PM + P'M) = P'M$$
$$P = \frac{P'M}{PM + P'M}.$$

Introducând aceste date în exemplul 6, obținem

$$P = \frac{2}{3+2} = 0{,}4,$$

respectiv probabilitatea de a se ajunge în situație de egalitate.

Această probabilitate este comparată cu probabilitățile de cerere la diferite niveluri, poziția optimă fiind reprezentată de cererea cea mai mare cu o probabilitate mai mare de P, ceea ce ar însemna:

Cerere	Probabilitatea	
Mai mare de 10 unități	1,00	
Mai mare de 11 unități	0,9	
Mai mare de 12 unități	0,7	Probabilitatea de egalitate $p = 0{,}4$
Mai mare de 13 unități	0,3	

Așadar, stocul cel mai profitabil este de 12 unități.

15. Valoarea informației imperfecte

Se presupune că distribuitorul din exemplul 14 ar putea achiziționa informații de piață perfecte și anume informații care i-ar permite să prevadă exact nivelul cererii zilnice, astfel încât și-ar putea acorda perfect stocul cu cererea din ziua următoare. Cât ar putea plăti distribuitorul respectiv pentru o asemenea informație? Pentru a rezolva acest gen de problemă se compară profitul realizat pe baza informației perfecte cu profitul preconizat optim din tabelul 1.

Profitul realizat cu informația optimă

				£
La o cerere de 10, se stochează 10	Profitul	=	$(10 \times 3£) \times 0{,}1$	= 3,0
La o cerere de 11, se stochează 11	Profitul	=	$(11 \times 3£) \times 0{,}2$	= 6,6
La o cerere de 12, se stochează 12	Profitul	=	$(12 \times 3£) \times 0{,}4$	= 14,4
La o cerere de 13, se stochează 13	Profitul	=	$(13 \times 3£) \times 0{,}3$	= 11.7
				35,7

Deoarece optimul de profit estimat din tabelul 1 era de 34£, distribuitorul ar putea plăti până la 1,7 (35,7 – 34)£ pentru informație.

Exemplul de înainte ilustrează regula generală de calculare a prețului informației perfecte. Mai întâi, se calculează valoarea venitului folosind valoarea estimată și apoi valoarea care s-ar obține cu ajutorul unei informații perfecte, scăzându-se în final una din alta.

Bineînțeles că în practică informația nu este perfectă, deși poate să-și păstreze valabilitatea. Există firme care plătesc sume foarte mari pentru informații cu o marjă de acuratețe rezonabilă, care le permit să-și îmbunătățească actul decizional. Indicatorii de testare ai pieței, marketingul de testare și alte mijloace dau informații imperfecte, ceea ce înseamnă că nu sunt de o acuratețe perfectă, dar suficient de exacte pentru a putea fi folosite. În anumite condiții este posibilă chiar și estimarea valorii informației imperfecte.

16. Valoarea informației imperfecte

Presupunând că ar exista un indice al gradului de acuratețe pe care ar trebui să-l aibă o informație, este posibilă calcularea valorii informației imperfecte. De exemplu, dacă o firmă a apelat la serviciile unei agenții de testare a pieții în mai multe ocazii, atunci îi va fi posibil să stabilească gradul de acuratețe al informațiilor acesteia.

Metoda folosită pentru evaluarea informației imperfecte folosește metoda probabilităților posterioare, care se bazează pe teorema lui Bayes și care este demonstrată de următorul exemplu.

Exemplul 16

Compania Theta Limited are în vedere lansarea unui nou produs, numit gamma.

S-a procedat așadar la estimarea valorilor veniturilor realizate anterior și s-au calculat valorile estimate.

Starea pieții	Probabilitatea	Profit/(Pierdere)	Valoarea estimată
Pozitivă	0.2	60 000	12 000
Negativă	0.6	40 000	24 000
Medie	0.2	(40 000)	(8 000)
			VE = 28 000£

Pentru a avea o informație mai amplă, pe care să-și poată baza deciziile, conducerea are în vedere întreprinderea unui studiu de piață, la un cost estimat de 1000£. Agenția avută în vedere pentru această acțiune este cunoscută ca având rezultate rezonabile, dar nu perfecte, iar din documentele departamentului comercial al firmei se obțin următoarele informații despre performanțele agenției:

Starea actuală a pieței	Indicațiile de piață ale agenției		
	Pozitivă	Medie	Negativă
Pozitivă	60%	30%	–
Medie	40%	50%	10%
Negativă	–	20%	90%

Soluție

Prima etapă constă în calcularea probabilităților anterioare, ceea ce înseamnă probabilitatea ca starea pieții să fie pozitivă, medie sau negativă după realizarea barometrului de piață.

Probabilitatea anterioară	Starea pieței	Rezultatele barometrului		Probabilitatea posterioară
		Starea	Probabilitatea	
0,2	Pozitivă	Pozitivă	0,6	*PP = 0,12
		Medie	0,4	PM = 0,08
0,6	Medie	Pozitivă	0,3	MP = 0,18
		Medie	0,5	MM = 0,30
		Negativă	0,2	MN = 0,12
0,2	Negativă	Medie	0,1	NM = 0,02
		Negativă	0,9	NN = 0,18
				1.00

*PP = 0,12 înseamnă că probabilitatea ca piața să fie bună când agenția o prevede bună este de 0,12 (12%).

Din tabel, probabilitatea de supraveghere poate fi rezumată după cum urmează:

- P (sondajul să dea rezultatul „pozitiv") = PP + MP = 0,12 + 0,18 = 0,3;
- P (sondajul să dea rezultatul „mediu") = PM + MM + NM = 0,08 + 0,30 + 0,02 = 0,4;
- P (sondajul să dea rezultatul „negativ") = MN + RR = 0,12 + 0,18 = 0,3.

Presupunând că lansarea produsului are loc la o previziune de piață favorabilă sau medie și că nu va mai avea loc la o previziune de piață nefavorabilă, se poate realiza următorul tabel:

Rezultatele sondajului	Decizia	Starea reală a pieței	Probabilitățile posterioare	Profit (piedere) £	VE a profitului (pierderii) £
Piață favorabilă	Lansare	Favorabilă	0,12	60 000	7200
		Medie	0,18	40 000	7200
Piață medie	Lansare	Favorabilă	0,08	60 000	4800
		Medie	0,30	40 000	12000
		Nefavorabilă	0,02	(40 000)	(800)
Piață nefavorabilă	Nu se lansează	–	0,3	–	–
			1,00		£30,400

∴ Valoarea informației imperfecte este
30 400£ – 28 000£ = 2 400£.

Având în vedere faptul că sondajul pieței costă 1000£, se poate considera că operațiunea este justificată sub raportul prețurilor. Câștigul este relativ redus (2400£) ca urmare a realizării sondajului și ținând cont și de dificultățile realizării estimării, este posibil ca la nivelul conducerii să se decidă renunțarea la sondaj.

17. Reguli alternative de luare a deciziilor

Regula la care ne-am referit până acum în cuprinsul acestui capitol este alegerea alternativei care maximizează valoarea preconizată. Aceasta este regula de luare a deciziilor care trebuie urmată dacă nu există alte instrucțiuni care să impună o altă cale de urmat. În orice caz, trebuie reținut că există reguli alternative, acestea incluzând:

- regula maximin;
- regula maximax;
- regula minimax de regret;
- regula sau criteriul Hurwich.

Aceste reguli sunt ilustrate cu ajutorul tabelului 2.2 de venituri, care evidențiază posibilitățile de câștig și de pierderi care pot rezulta în urma lansării unor produse diferite în trei condiții diferite ale pieței:

Tabelul 2.2

Tabel de venituri în mii de lire sterline

	Condiții de boom economic	Condiții stabile	Condiții de recesiune
Produsul *A*	+8	1	-10
Produsul *B*	-2	+6	+12
Produsul *C*	+16	0	-26

Dacă probabilitățile sunt de 0,6 pentru boom-ul economic, 0,3 pentru piața stabilă și 0,1 pentru piața în recesiune, valorile căutate sunt:

Produsul A = $(0,6 \times 8) + (0,3 \times 1) + (0,1 \times -10) = 4,1$
Produsul B = $(0,6 \times -2) + (0,3 \times 6) + (0,1 \times 12) = 1,8$
Produsul C = $(0,6 \times 16) + (0,3 \times 0) + (0,1 \times -26) = 7,3$.

Aplicând regula pentru valoarea estimată, ordinea produselor va fi *C, A, B*.
Cum se va modifica această succesiune prin aplicarea alternativelor?

• *Maximin* sau „cel mai bine, în cel mai rău caz". Este o regulă de decizie reflectând prudență, pornind de la maximizarea pierderii minime care s-ar putea manifesta. Pierderile cele mai grave:

A	–10
B	– 2
C	–26

∴ *Clasificarea* produselor aplicând regula maximin: *B, A, C.*

• *Maximax* sau „cel mai bine, în cel mai bun caz". Este o regulă care reflectă optimism, maximizând maximul câștigului. Câștigurile maxime sunt:

A	+ 8
B	+12
C	+16

∴ *Clasificarea* produselor aplicând regula maximax: *C, B, A.*

• *Minimax sau regula regretului.* Este o regulă care tinde să minimalizeze „regretul maxim" care poate urma din alegerea unei anumite strategii. Pentru a înțelege foarte bine este necesară realizarea unui tabel de regret, bazat pe tabelul de câștiguri (v. tabelul 2.2). Regretul se referă la o pierdere întâmplătoare rezultată în urma unei decizii afectată de factori externi imprevizibili, indiferent dacă piața se află in faza de extindere, de stabilitate sau de recesiune (tabelul 2.3).

Tabelul 2.3

Tabelul regretului, în mii de £

	Piață în extindere	Piață stabilă	Piață în recesiune
Produsul *A*	8	5	22
Produsul *B*	18	0	0
Produsul *C*	0	6	38

Notă: pierderile întâmplătoare din tabel sunt calculate prin aducerea celei mai bune situații de la oricare din rubricile de stare a pieței la zero și apoi calculând diferențele astfel apărute. De exemplu, în condiții de recesiune (v. tabelul 2.3) produsul B câștigă +12 dar pentru produsul A se înregistrează o pierdere de -10, ceea ce dă o diferență totală (în comparație cu B) de 22, care reprezintă tocmai pierderea întâmplătoare.

Regretele maxime sunt:

A	22
B	18
C	38

∴ *Clasificarea* produselor după regula minimax a regretului este *B, A, C.*

• *Criteriul lui Hurwicz.* Reprezintă o medie ponderată a celor mai bune și mai slabe câștiguri aduse de fiecare acțiune. Criteriul lui Hurwicz este considerat ca fiind

mai realist decât unele dintre regulile anterioare (maximin, minimax) care se bazează numai pe câștigurile extreme. Calculul se realizează după cum urmează:

Câștigul ponderat = $\alpha \times$ câștigul minim + $(1-\alpha) \times$ câștigul maxim,

unde α este un număr între 0 și 1, numit indice de pesimism-optimism. Valoarea lui α reflectă cel mai adesea atitudinea celui care ia decizia față de riscul realizării unor câștiguri slabe și de posibilitatea obținerii unor câștiguri maxime. Se va alege opțiunea cu câștigul ponderat cel mai mare.

Exemplu

Să presupunem o valoare de 0,7 pentru α, împreună cu valorile din tabelul de câștiguri (cifrele reprezintă mii de £):

	Piață evolutivă	Piață stagnantă	Piață recesivă	Piață evolutivă	Piață stagnantă	Piață recesivă
Produsul *A*	+8	+1	-10	-10	+8	-4,6*
Produsul *B*	-2	+6	+12	-2	+12	+2,2
Produsul *C*	+16	0	-26	-26	+16	-13,4

Clasificarea, conform criteriului lui Hurwicz, pentru $\alpha = 0,7$ este *B, A, C.*

* Fiecare medie ponderată e calculată în același mod. De exemplu,

$$0,7 \times (-10) + 0,3 \times 8 = -4,6.$$

Când se dă pentru α o valoare mai mare de 0,5, precum în exemplul anterior, se poate spune că persoana care a luat decizia este decisă să evite riscurile acordând o atenție deosebită posibilității de a se înregistra un eșec. În cazul în care dimpotrivă, persoana care ia decizia adoră riscul, va alege o valoare mai mică de 0,5 pentru α, de aici putând rezulta o altă clasificare a produselor.

De exemplu, pentru $\alpha = 0,2$ veniturile medii ponderate ar fi:

Produsul *A* = +4,4
Produsul *B* = +9,2
Produsul *C* = +7,6

iar clasificarea produselor ar fi: *B, C, A.*

18. Pierderile întâmplătoare și valoarea estimată

Pierderea fiind opusul negativ al câștigului, este de așteptat ca pierderile întâmplătoare și valoarea preconizată să se afle într-o anumită relație. Acest lucru este perfect adevărat și produsul dintre pierderile întâmplătoare și probabilitatea apariției lor, sau pierderea întâmplătoare estimată, pot fi folosite pentru a se ajunge la aceeași clasificare ca și în cazul valorii estimate. Trebuie menționată deosebirea că în cazul valorii estimate se alege valoarea maximă, iar în cazul pierderii întâmplătoare estimate se alege valoarea minimă.

∴ Minimalizarea pierderilor întâmplătoare estimate duce la aceeași concluzie ca și la maximalizarea valorii estimate.

De exemplu, valorile pierderilor întâmplătoare estimate din tabelul 2.3 sunt:

A $(0,6 \times 8) + (0,3 \times 5) + (0,1 \times 22) = 8,5$
B $(0,6 \times 18) + (0,3 \times 0) + (0,1 \times 0) = 10,8$
C $(0,6 \times 0) + (0,3 \times 6) + (0,1 \times 38) = 5,6$

∴ Clasificarea în ordinea creșterii pierderii întâmplătoare estimate este *C, A, B*, identică celei obținute prin aplicarea regulii valorii estimate, cu deosebirea că acolo se alege ordinea scăzătoare.

19. Rezumat

a) Probabilitățile obiective apar rareori, în condiții reale, în luarea deciziilor, astfel încât se recurge la probabilitățile subiective, respectiv la cuantificarea raționamentului.

b) Cele două reguli de bază ale probabilisticii sunt regula de multiplicare și regula de adunare.

c) Regula lui Bayes ajută la găsirea unei probabilități condiționate (A|B) pornindu-se de la inversul său (B|A).

d) Forma generală a regulii lui Bayes este:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A) \times P(B \mid A)}{P(B)}$$

e) Permutarea este un aranjament ordonat.

f) Numărul de permutări are simbolul ${}^{n}P_{r}$ și se calculează după formula:

$${}^{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

g) Combinația este un aranjament în care nu contează ordinea.

h) Numărul de combinații are simbolul ${}^{n}C_{r}$ și se calculează după formula:

$${}^{n}C_{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

i) Valoarea estimată (VE) are aplicații multiple în luarea deciziilor și se calculează prin produsul dintre venit și probabilitatea obținerii lui. În general, se alege opțiunea cu VE maxim.

j) Deși utilă, VE nu ține seamă de domeniul de aplicație și asimetria frecvenței de distribuție, astfel încât rezultatele trebuie tratate cu circumspecție.

k) Valoarea informației perfecte este dată de diferența dintre profitul ce poate fi obținut pe baza cunoașterii perfecte a tuturor condițiilor și valoarea estimată a câștigurilor fără această cunoaștere perfectă.

l) Regulile alternative de luare a deciziilor sunt Maximin, Maximax, Minimax regret și criteriul lui Hurwicz.

m) Pierderea întâmplătoare reprezintă diferența dintre valoarea câștigurilor posibil de realizat într-o anumită stare a pieței și rezultatele reale.

n) Utilizând pierderea întâmplătoare preconizată minimă ca criteriu de luare a deciziei, se obține aceeași clasificare ca și în cazul VE.

20. De reținut

a) Conceptele probabilistice și valoarea estimată sunt noțiuni foarte frecvente în testele de verificare a cunoștințelor din cursul colegiului, dar și în testele de verificare a pregătirii profesionale, și prin urmare, recomandăm studierea cu mare atenție a acestui capitol.

b) Diferite probleme legate de probabilistică vor apărea în multe alte capitole ale acestui manual (inventariere, estimarea investițiilor, analiză de rețea etc.).

c) Prin natura sa, probabilistica se bazează în principal pe încercări repetate și alte fenomene repetitive. Prin urmare, aplicarea probabilităților în luarea deciziilor de genul „ori una-ori alta" trebuie analizată cu toată atenția.

d) Tipul firmei, societății comerciale, obiectivele sale, stilul și aspectele etice trebuie avute toate în vedere pentru alegerea criteriilor celor mai potrivite de luare a deciziilor. De exemplu, o societate comercială din sectorul public poate fi eliminată din investițiile speculative, trebuind să îndeplinească o serie de obligații statutare la prețuri de cost minime. În asemenea condiții, destul de tipice de altfel, utilizarea criteriului minimax poate fi cel mai potrivit, în timp ce alte tipuri de societăți comerciale pot tinde să opteze pentru regula maximax.

Întrebări de autoevaluare *Numerele din paranteze reprezintă paragrafele.*

1. Faceți distincția între probabilitățile obiective și subiective (3).
2. Definiți regulile de multiplicare și adunare din probabilistică (4).
3. Care este principiul legii lui Bayes? (6)
4. Faceți distincția între permutare și combinație (7-10).
5. Cum se calculează valoarea estimată?
6. Care sunt avantajele și dezavantajele utilizării valorii estimate drept criteriu de luare a deciziilor?
7. Presupunând că există date din trecut referitoare la cererea pentru un anumit produs, precum și informații probabilistice, cum poate fi folosită o valoare dată pentru a se obține informații perfecte (14) și informații imperfecte (16)?
8. Definiți regulile de luare a deciziilor minimax și maximax (17).
9. Cum se calculează valorile din tabelul de regret (v. tabelul 2.3.)? (17).
10. Care este legătura dintre pierderile întâmplătoare estimate și valoarea estimată? (18).

Exerciții cu răspunsuri

1. Se extrage o carte dintr-un pachet de 52 de cărți amestecate în prealabil bine. Care este probabilitatea extragerii unui rege sau a unui as?

2. Înregistrarea solicitărilor de reparații la un garaj și probabilitatea apariției lor sunt următoarele:

Cererea zilnică	Probabilitatea
5	0,3
6	0,7

Cererea zilnică este independentă.

Care este probabilitatea ca, pe o perioadă de două zile, numărul cererilor să fie:

a) 10 cereri.

b) 11 cereri.

c) 12 cereri.

3. Analiza chestionarelor completate de turiști a arătat că 0,75 erau satisfăcuți de vacanța petrecută la Costa Lotta. Probabilitatea de a avea apă caldă în camere este de 0,6. Dacă probabilitatea aprecierii vacanței ca fiind reușită depinde de existența apei calde este de 0,9, care este probabilitatea să fi existat apă caldă, dacă un turist consideră că a avut un concediu reușit?

Răspunsuri la exerciții

1. $P_{\text{rege}} = \frac{4}{52}$ $P_{as} = \frac{13}{52}$ $P_{\text{rege și as}} = \frac{1}{52}$

$$\therefore P_{\text{rege sau as}} = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} + \frac{1}{52} = \frac{18}{52} = \frac{9}{26}$$

2. 10 cereri: $P(5 \text{ și } 5) = 0,3 \times 0,3 = 0,09$

11 cereri: $P(5 \text{ și } 6) = 0,3 \times 0,7 = 0,21$
$P(6 \text{ și } 5) = 0,7 \times 0,3 = 0,21$ $= 0,42$

12 cereri: $P(6 \text{ și } 6) = 0,7 \times 0,7 = 0,49$

$= 1,00$

3. Acest exercițiu face apel la regula lui Bayes care are forma generală:

$$P(A|B) = \frac{P(A) \times P(B|A)}{P(B)}.$$

Notații C – apă caldă; R – concediu reușit

$P(R) = 0,75$; $P(C) = 0,6$ și $P(R|H) = 0,9$.

$$\therefore P(C|R) = \frac{P(C) \times P(R|C)}{P(R)} = \frac{0,6 \times 0,9}{0,75} = 0,72.$$

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

3. ARBORELE DECIZIONAL

1. Obiective

După parcurgerea acestui capitol:

- veți ști ce se înțelege prin arbore decizional;
- veți putea defini nodul decizional și nodul consecințelor decizionale;
- veți înțelege modul de concepere a unui arbore decizional folosind pasul înainte;
- veți ști cum se calculează valoarea rezultată folosind pasul înapoi;
- veți ști cum se aplică teorema lui Bayes în diagrama decizională.

2. Arborele decizional – definiție

Este o metodă grafică de prezentare a ordinii deciziilor și a consecințelor lor, împreună cu relațiile interactive dintre ele. Opțiunile posibile sunt reprezentate ca ramuri ale arborelui, iar consecințele posibile pentru fiecare opțiune în parte sunt reprezentate ca ramuri secundare. Pe scurt, arborele decizional prezintă punctele de decizie, rezultatele (care în general sunt dependente de probabilități) și valorile rezultate. Frecvent, dar nu întotdeauna, arborele este însoțit și de o evaluare realizată prin metoda valorii preconizate.

3. Structura arborilor decizionali

Structura și componentele tipice ale unui arbore decizional sunt reprezentate în fig. 3.1.

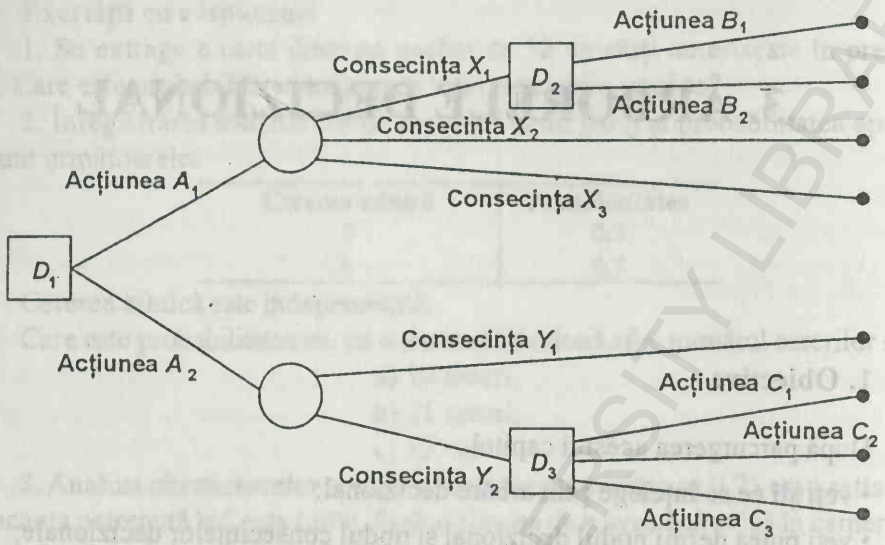


Fig. 3.1.

Observații:

a) Remarcați faptul că există două tipuri de noduri, unele reprezentate prin pătrate, *nodurile decizionale*, iar celelalte reprezentate prin cercuri, *nodurile consecințelor decizionale.*

b) Nodurile decizionale sunt punctele în care se poate face alegerea între mai multe alternative, decizia managerială făcându-se pe baza estimărilor și calculelor de profit preconizate.

c) Nodurile consecințelor decizionale sunt punctele în care rezultatele depind de probabilități; de exemplu, în fig. 3.1 decizia A_1 înseamnă „construirea unei ramuri a fabricii" – consecințele X_1, X_2 și X_3 putând reprezenta variantele de niveluri de vânzări ale produselor: înalt, mediu, redus, fiecare dintre aceste posibilități fiind însoțită de o evaluare a probabilității de apariție.

4. Conceperea arborilor decizionali

Următorul exemplu poate fi folosit pentru ilustrarea modului de concepere a arborilor decizionali și de evaluare a consecințelor.

Exemplul 1

O companie are în vedere lansarea unui nou produs. Succesul acestei idei depinde de abilitatea unui concurent oarecare de a lansa un produs concurențial (probabilitate estimată la 60%) și de raportul dintre prețul companiei și al concurenței.

Tabelul 3.1 arată profiturile pentru fiecare categorie de prețuri care poate fi aleasă de companie, în funcție de posibilele prețuri ale concurenței.

Tabelul 3.1

Profituri în mii de £

Nivelul prețului companiei	Nivelul prețului concurenței			Profitul în absența concurenței
	Redus	Mediu	Înalt	
Redus	30	42	45	50
Mediu	34	45	49	70
Înalt	10	30	53	90

Compania trebuie să stabilească prima prețul produsului său, pentru că urmează să-l lanseze prima, astfel încât concurența va avea timp să reacționeze la nivelul de preț propus de companie.

Estimarea probabilității ca și concurența să stabilească diferitele niveluri de prețuri pe care le are în vedere compania este reprezentată în tabelul 3.2.

Tabelul 3.2

Nivelul de preț al companiei	Preconizarea nivelului de preț al concurenței		
	Redus	Mediu	Înalt
Redus	0,8	0,15	0,05
Mediu	0,20	0,70	0,10
Înalt	0,05	0,35	0,60

Sarcini

a) Conceperea unui arbore decizional și analiza problemei;

b) Recomandări pentru atitudinea companiei.

Soluția

Primul pas constă în trasarea propriu-zisă a arborelui, începând din stânga, reprezentând diferitele moduri decizionale și noduri de consecințe decizionale. În această fază trebuie să vă concentrați asupra aspectului logic al problemei, fără a ține cont de valori și probabilități.

Rezultatul acestui prim stadiu în rezolvarea problemei este reprezentat de fig. 3.2, a cărei logică de concepție trebuie verificată prin confruntarea cu formularea problemei (acest stadiu este cunoscut sub denumirea de *pasul înainte*).

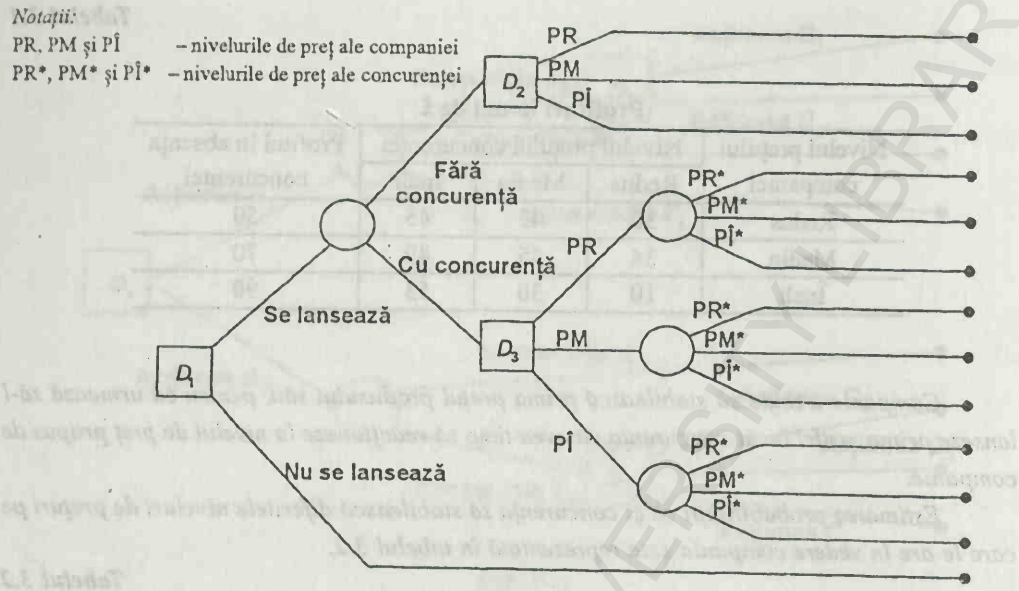


Fig. 3.2.

Se observă că arborele este o combinație de noduri decizionale D_1, D_2 și D_3 și de noduri de consecințe decizionale, care reflectă dacă va exista sau nu concurență și prețul estimat al acesteia.

Următorul pas constă în completarea arborelui cu valorile rezultate preconizate și cu procentele din tabelele A și B din formularea problemei (fig. 3.3).

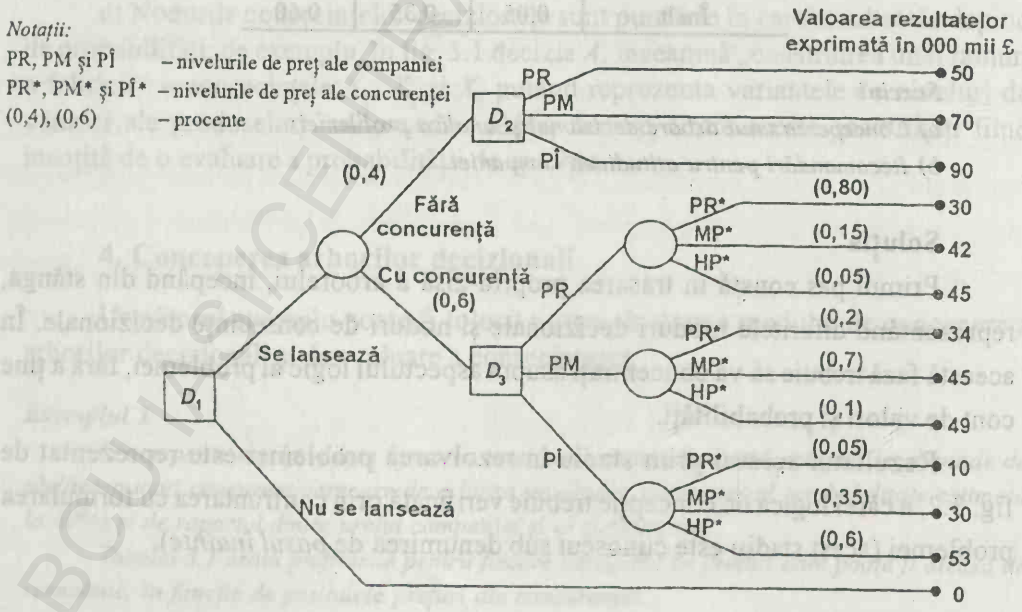


Fig. 3.3.

Pasul final pornește de la posibilitățile de manifestare a diferitelor situații și de la valorile rezultante ale acestora, pentru a calcula valorile preconizate în respectivele situații, astfel încât să fie puse în evidență deciziile corecte. În cazul pasului final se lucrează de la dreapta la stânga, fiind cunoscut sub denumirea de *pasul înapoi* (fig. 3.4).

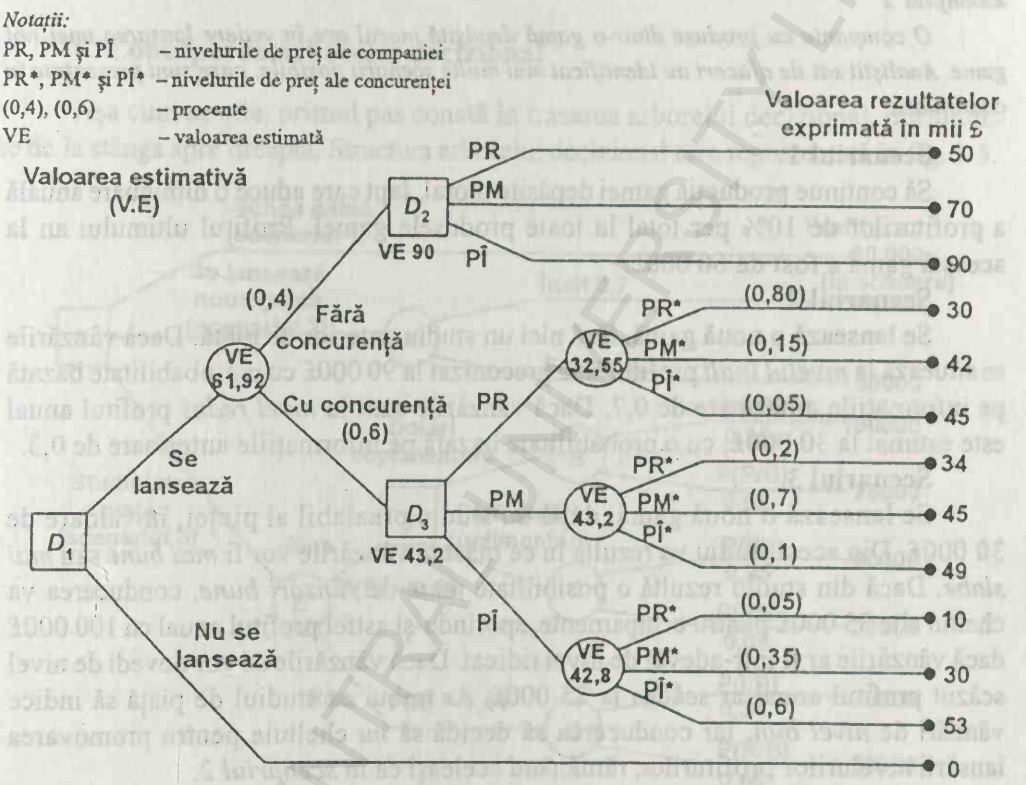


Fig. 3.4.

În fig. 3.4 sunt evidențiate valorile preconizate prin rezultantele numerice (respectiv probabilitatea ori valoarea), iar în D_2 și D_3 sunt prezentate cele mai ridicate valori preconizate pentru D_2 și D_3 calculate din valorile numerice ale fiecărei ramuri și subramuri, indicând cea mai bună decizie.

Interpretare și recomandări

Fig. 3.4 arată că decizia D_1 a companiei trebuie să fie lansarea produsului (pentru o valoare preconizată de 61,92 contra unei valori preconizate 0 în cazul hotărârii anulării lansării). Dacă nu va exista concurență, decizia D_2 trebuie să fie alegerea unui nivel de preț înalt (cu o valoare preconizată de 90). Dacă apare concurența la produs, decizia D_3 a companiei trebuie să fie vânzarea la un nivel de preț mediu, obținându-se astfel cea mai bună valoare evaluată și anume 43,2.

5. Teorema lui Bayes și arborii decizionali

Ideile dezvoltate în capitolul 2 referitoare la teorema lui Bayes pot fi aplicate și analizei arborilor decizionali.

Să luăm exemplul următor:

Exemplul 2

O companie cu produse dintr-o gamă depășită moral are în vedere lansarea unei noi game. Analiștii săi de afaceri au identificat mai multe scenarii posibile, care sunt prezentate în continuare.

Scenariul 1

Să continue producția gamei depășite moral, fapt care aduce o diminuare anuală a profiturilor de 10% per total la toate produsele gamei. Profitul ultimului an la această gamă a fost de 60 000£.

Scenariul 2

Se lansează o nouă gamă, fără nici un studiu anterior de piață. Dacă vânzările se situează la *nivelul înalt* profitul este preconizat la 90 000£ cu o probabilitate bazată pe informațiile anterioare de 0,7. Dacă vânzările sunt la *nivel redus* profitul anual este estimat la 30 000£, cu o probabilitate bazată pe informațiile anterioare de 0,3.

Scenariul 3

Se lansează o nouă gamă, după un studiu prealabil al pieței, în valoare de 30 000£. Din acest studiu va rezulta în ce măsură vânzările vor fi *mai bune* sau *mai slabe*. Dacă din studiu rezultă o posibilitate mare de *vânzări bune*, conducerea va cheltui alte 35 000£ pentru echipamente, sporindu-și astfel profitul anual cu 100 000£ dacă vânzările ar fi într-adevăr de nivel ridicat. Dacă vânzările se vor dovedi de nivel scăzut profitul anual ar scădea la 25 000£. Ar trebui ca studiul de piață să indice vânzări de *nivel bun*, iar conducerea să decidă să *nu* cheltuie pentru promovarea lansării nivelurilor profiturilor, rămânând aceleași ca în *scenariul 2*.

Dacă studiul de piață indică *„nivel scăzut"*, conducerea se va mulțumi cu un nivel al vânzărilor într-adevăr redus. Totuși, dacă nivelul vânzărilor se dovedește a fi ridicat, profitul anual poate crește la numai 70 000£ din cauza constrângerilor impuse de capacitatea de producție. Antecedentele companiei care efectuează sondajele de piață indică următoarele rezultate:

		Nivelul real al vânzărilor	
		Înalt	Scăzut
Nivelul preconizat al vânzărilor	Înalt	*0,8	0,1
	Scăzut	0,2	0,9

* Când nivelul real al vânzărilor a fost *înalt*, compania de sondaje indicase *nivelul înalt* în 80% din cazuri și așa mai departe.

Se folosește un orizont de timp de 6 ani, pentru a se da indicații conducerii companiei asupra scenariului care ar trebui adoptat.

Nu se ține seama de fluctuațiile monetare.

6. Conceperea arborelui decizional

Așa cum se știe, primul pas constă în trasarea arborelui decizional, pornindu-se de la stânga spre dreapta. Structura arborelui decizional esre reprezentată în fig. 3.5.

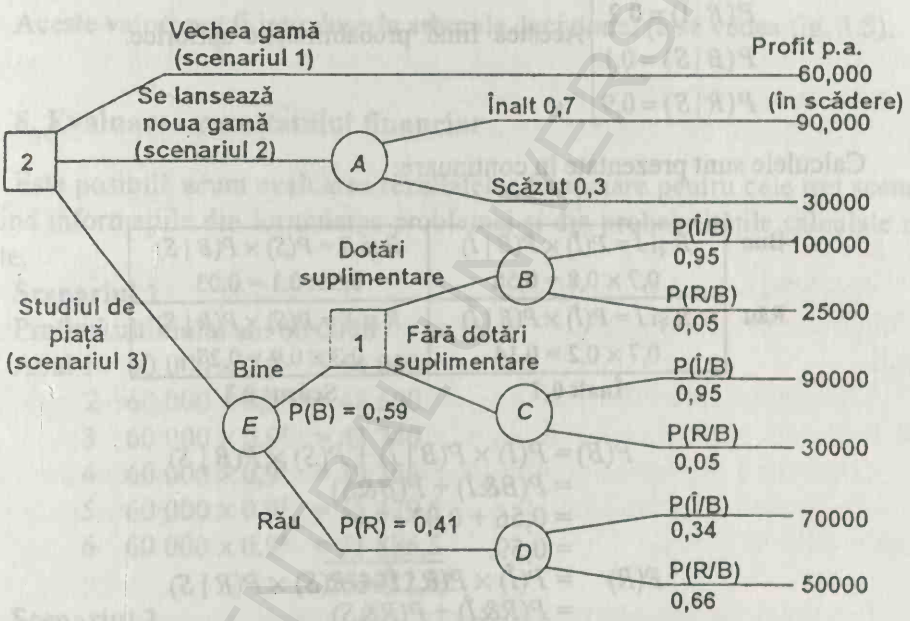


Fig. 3.5 Arborele decizional, exemplul 2.

Notă: Diferitele valori posibile pentru scenariul 3 sunt calculate în continuare.

7. Calculul probabilităților

Din arborele decizional se observă că trebuie calculate următoarele probabilități:

$P(B)$
$P(R)$ pentru studiul de piață

BCU IAȘI CENTRALA UNIVERSITARĂ LIBRARY

$$\left.\begin{array}{l} P(\hat{I}\,|\,B) \\ P(S\,|\,B) \\ P(\hat{I}\,|\,R) \\ P(S\,|\,R) \end{array}\right\} \text{pentru nivelul vânzărilor}$$

Din valorile care au fost puse la dispoziție s-au calculat următoarele valori ale probabilităților:

$$\left.\begin{array}{l} P(B\,|\,\hat{I}) = 0{,}8 \\ P(R\,|\,\hat{I}) = 0{,}2 \\ P(B\,|\,S) = 0{,}1 \\ P(R\,|\,S) = 0{,}9 \end{array}\right\} \text{Acestea fiind probabilitățile apriorice.}$$

Calculele sunt prezentate în continuare:

Bun	B și $\hat{I} = P(\hat{I}) \times P(B\,|\,\hat{I})$ $0{,}7 \times 0{,}8 = 0{,}56$	B și $S = P(S) \times P(B\,|\,S)$ $0{,}3 \times 0{,}1 = 0{,}03$
Rău	R și $\hat{I} = P(\hat{I}) \times P(R\,|\,\hat{I})$ $0{,}7 \times 0{,}2 = 0{,}14$	R și $S = P(S) \times P(R\,|\,S)$ $0{,}3 \times 0{,}9 = 0{,}27$
	Înalt 0,7	**Scăzut 0,3**

$$\begin{aligned} P(B) &= P(\hat{I}) \times P(B\,|\,\hat{I}) + P(S) \times P(B\,|\,S) \\ &= P(B\&\hat{I}) + P(B\&S) \\ &= 0{,}56 + 0{,}03 \\ &= 0{,}59. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(R) &= P(\hat{I}) \times P(R\,|\,\hat{I}) + P(S) \times P(R\,|\,S) \\ &= P(R\&\hat{I}) + P(R\&S) \\ &= 0{,}14 + 0{,}27 \\ &= 0{,}41. \end{aligned}$$

Notă: P(B) + P(R) = 0,59 + 0,41 = 1,00

Din regula lui Bayes:

$$P(\hat{I}\,|\,B) = \frac{P(B\,|\,\hat{I}) \times P(\hat{I})}{P(B)}$$

$$= \frac{0{,}56}{0{,}59} = 0{,}95.$$

$$P(S\,|\,B) = \frac{P(B\,|\,S) \times P(S)}{P(B)}$$

$$= \frac{0{,}03}{0{,}59} = 0{,}05.$$

BCU IASI CENTRUL UNIVERSITAR IBRARY

$$P(\hat{I} \mid R) = \frac{P(R \mid \hat{I}) \times P(\hat{I})}{P(R)}$$

$$= \frac{0{,}14}{0{,}41} = 0{,}34.$$

$$P(S \mid R) = \frac{P(R \mid S) \times P(S)}{P(R)}$$

$$= \frac{0{,}27}{0{,}41} = 0{,}66.$$

Aceste valori pot fi introduse în arborele decizional (a se vedea fig. 3.5).

8. Evaluarea rezultatului financiar

Este posibilă acum evaluarea rezultatelor financiare pentru cele trei scenarii folosind informațiile din formularea problemei și din probabilitățile calculate mai înainte:

Scenariul 1

Profitul ultimului an: 60 000£

Anul 1 $60\,000 \times 0{,}9 = 54\,000$
2 $60\,000 \times 0{,}9^2 = 48\,600$
3 $60\,000 \times 0{,}9^3 = 43\,740$
4 $60\,000 \times 0{,}9^4 = 39\,366$
5 $60\,000 \times 0{,}9^5 = 35\,429{,}5$
6 $60\,000 \times 0{,}9^6 = 31\,886{,}5$

253022,0£

Scenariul 2

Valoarea preconizată a lansării directe.

Nodul (A): $0{,}7(90\,000 \times 6) + 0{,}3(30\,000 \times 6)$
$= 378\,000£ + 54\,000 = 432\,000£.$

Scenariul 3

Valoarea estimată a studiului de piață.

Nodul (B): $0{,}95(100\,000 \times 6) + 0{,}05(25\,000 \times 6)$
$= 570\,000£ + 7500 = 577\,500£$

Din care se vor scădea 35 000£ pentru dotări suplimentare = 542 500£

Nodul (C): $0{,}95(90\,000 \times 6) + 0{,}05(30\,000 \times 6)$
$= 513\,000£ + 9.000 = 522\,000£$

Nodul 1: Se compară 542 500£ cu £522.000.
∴ Este justificată o cheltuială suplimentară.
Se notează 542 500£ în punctul (E).

Nodul (D): $0,34(70\,000 \times 6) + 0,66(50\,000 \times 6)$
$= 142\,800£ + 198\,000£ = 340\,800£$
Nodul 2: 340 800£ sau 0£ rezultă dacă se renunță la lansare.
Nodul (E): $0,59 \times 542\,500 + 0,41 \times 340\,800$
$320.075£ + 139\,728 = 459\,803£$
Deducerea cheltuielii pentru sondajul pieței:
$459\,803£ - 30\,000 = 429\,803£$.
Nodul 2: Sumarul deciziei finale:
Scenariul 1 VMP = 253 022£.
Scenariul 2 VMP = 432 000£.
Scenariul 3 VMP = 429 803£.

Prin urmare, se va recomanda alegerea scenariului 2 deoarece s-a estimat că acesta ar aduce cea mai ridicată valoare monetară estimată. Scenariul 3 este de asemenea aproape de situația de a fi ales.

În momentul decontării cheltuielilor de lansare, situația se poate schimba.

9. De reținut

a) Arborii decizionali nu relevă mai multe informații decât ar putea fi relevate sub forma unui tabel, dar facilitează formarea unei imagini de ansamblu asupra întregii situații.

b) Invariabil, arborii decizionali cuprind evaluări ale unor investiții care urmează să se desfășoare pe parcursul unui anumit număr de ani.

c) Deoarece se folosesc valorile estimate drept criteriu pentru luarea deciziilor, arborii decizionali vor suferi ca și valoarea estimată de aceleași neajunsuri enumerate la capitolul 2.

Întrebări de autoevaluare *Numerele din paranteze se referă la numerotarea paragrafelor*

1. Ce sunt arborii decizionali? (2)
2. Faceți distincția între tipurile de noduri ce apar în arborii decizionali. (3)
3. Ce se înțelege prin metoda pasului înainte? (4)
4. Ce se înțelege prin metoda pasului înapoi? (4)

Exerciți cu răspunsuri

1. O firmă a pus la punct un produs nou, numit X. Firma are de ales între testarea pieței și abandonarea proiectului. Detaliile sunt enumerate în continuare.

Costul testării pieței 50 000£, rezultatele probabile fiind favorabile (P = 0,7) și nefavorabile (P = 0,3).

Atunci când rezultatul testării pieței e favorabil, firma are de ales între abandonarea produsului sau producerea sa atunci când cererea anticipată este:

Redusă	P = 0,25	**Pierdere**	100 000£
Medie	P = 0,6	**Profit**	150 000£
Înaltă	P = 0,15	**Profit**	450 000£

Dacă testarea pieței relevă condiții nefavorabile, proiectul ar fi abandonat.

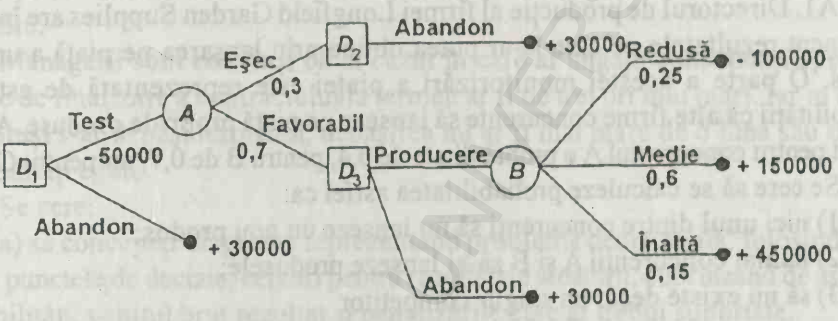
Abandonarea lansării produsului aduce un câștig de 35 000£ reprezentând costul mașinilor care ar fi trebuit achiziționate.

Se cere să se conceapă un arbore decizional cuprinzând noduri și probabilități.

2. Evaluați valorile pentru arborele decizional de la primul exercițiu.

Răspunsuri la exerciții

1.



2. Valoarea estimată pentru nodul *b* $[0{,}25 \times (-100\,000)] + (0{,}6 \times 150\,000) + (0{,}15 \times 450\,000) = 132\,500$£

∴ variantele în D_3 sunt +30 000 și 132 500.

∴ producerea are o valoare estimată de 132 500£.

Valoarea estimată în nodul A $(0{,}3 \times 30\,000) + (0{,}7 \times 132\,500) = 101\,750$£

∴ diferența valorilor estimate în D_1 este

$101\,750 - 50\,000 = 51\,750$ și 30 000£

∴ se recomandă testarea pieței la costul de 50 000£ și începerea producției în cazul unor rezultate favorabile.

EVALUARE ŞI RECAPITULARE

PARTEA 1

Întrebări cu răspunsuri

Răspunsurile pot fi găsite începând cu pagina 549

A1. Directorul de producție al firmei Longfield Garden Supplies are în vedere permanent rezultatele pe care le-ar putea obține prin lansarea pe piață a unui nou produs. O parte a acestei monitorizări a pieței este reprezentată de estimarea probabilității că alte firme concurente să lanseze pe piață propriile produse. Astfel, a estimat pentru concurentul A o probabilitate de 0,4, pentru B de 0,7, iar pentru C de 0,2.

Se cere să se calculeze probabilitatea astfel ca:

1) nici unul dintre concurenți să nu lanseze un nou produs;

2) numai concurenții A și B să-și lanseze produsele;

3) să nu existe decât un singur competitor

ACCA Tehnici de luare a deciziilor (întrebare parțială)

A2. O companie farmaceutică a dezvoltat un nou tratament pentru migrene, care este testat pe un număr de 1000 de voluntari. În cadrul unuia dintre teste, unor voluntari li s-a administrat tratamentul medicamentos, iar în cazul altora s-a apelat la efectul placebo, administrându-li-se o substanță neutră și inofensivă. Rezultatele testului sunt următoarele:

	Tratament medicamentos	Tratament neutru (efect placebo)
Rezultate parțiale	600	125
Nici un rezultat	150	125

Se cere să se calculeze:

a) probabilitatea ca starea unui voluntar ales la întâmplare să se fi ameliorat;

b) probabilitatea condiționată ca starea voluntarului să se fi ameliorat ca urmare a tratamentului;

c) probabilitatea condiționată ca voluntarul a cărui stare nu s-a schimbat să fi primit totuși tratamentul;

d) probabilitatea condiționată ca voluntarul să manifeste efectul placebo, având în vedere că starea lui s-a ameliorat;

e) Explicați pe scurt ce anume vă sugerează datele din tabel în privința eficacității tratamentului.

CIMA Evaluarea Costurilor și Metodele Cantitative

A3. O companie de construcții are un contract în valoare de 1 000 000£ pentru finalizarea construcției unei clădiri până în data de 31 martie a anului respectiv, dar se confruntă cu întârzieri datorită complexității lucrărilor. Managerii trebuie să decidă dacă se poate continua activitatea în aceleași condiții sau dacă angajează consultanți-specialiști la un cost de 200 000£.

În cazul în care compania ar continua activitatea ca și în prezent, are o șansă de numai 30% să încheie lucrările la termenul stabilit prin contract, întârzierea putând fi de una, două sau trei luni, cu probabilități egale. În cazul depășirii termenului, se percep penalizări de 100 000£ pentru fiecare lună (sau perioadă dintr-o lună) de întârziere.

Managerii sunt convinși că în cazul în care ar angaja consultanți-specialiști, șansele de finalizare a contractului la termen ar fi de trei ori mai mari. Iar în cazul în care totuși s-ar depăși termenul, depășirea nu ar fi mai mare de o lună sau două, cu probabilități egale.

Se cere:

a) să concepeți diagrama reprezentând problema decizională, folosind pătrate pentru punctele de decizie, cercuri pentru rezultatele aleatorii, cuprinzând de asemenea probabilități, venitul brut rezultat și penalizările care ar trebui suportate;

b) să analizați arborele decizional, folosind tehnicile valorii preconizate;

c) să redactați un scurt raport pentru consiliul de administrație, prin care să recomandați pe baza unor raționamente și comentarii, decizia cea mai favorabilă.

CIMA – Metode Cantitative

A4. Taurus Press, o companie cuprinzând o editură și o tipografie, a achiziționat și instalat recent o mașină de fotocopiere. Piesele de schimb pentru această mașină sunt accesibile numai în acest moment și niciodată altcândva în viitor, astfel încât Taurus Press trebuie să decidă ce număr de piese de schimb să achziționeze. Mașina este garantată moral și fizic pentru o perioadă de cinci ani de exploatare și, conform experienței anterioare, distribuția probabilistică a defecțiunilor în acest interval de timp este dată în tabelul de mai jos:

Numărul defecțiunilor în decursul perioadei de exploatare	Probabilitatea
0	0,15
1	0,3
2	0,25
3	0,2
4	0,1

Fiecare piesă de schimb costă 5000£, însă dacă mașina s-ar defecta și nu ar exista piesele de schimb necesare, costul pe care ar trebui să-l plătească Taurus Press la cursul curent ar fi de 20 000£ (nu este necesar calculul amortizării în timp).

Se cere:

a) să se calculeze numărul posibil de defecțiuni pe durata de exploatare a mașinii;

b) să se calculeze costul total pentru fiecare număr de defecțiuni și numărul de piese de schimb achiziționate;

c) să folosiți criteriul valorii monetare estimate pentru a calcula numărul optim de piese de schimb care ar trebui cumpărare acum;

d) să calculați valoarea estimată a informației perfecte pentru aflarea numărului de defecțiuni care pot surveni în perioada de exploatare a mașinii;

e) valorile de utilizare, u(x), ce pot fi asociate costurilor, £(x), în această situație. Folosiți datele din tabelul de mai jos pentru a obține numărul optim de piese de schimb care trebuie comandate, apelând la criteriul utilizării estimate maxime.

x	$u(x)$
0	1,00
5 000	0,97
10 000	0,94
15 000	0,90
20 000	0,86
25 000	0,81

x	$u(x)$
30 000	0,76
35 000	0,70
40 000	0,64
45 000	0,57
50 000	0,50
55 000	0,42

x	$u(x)$
60 000	0,34
65 000	0,26
70 000	0,18
75 000	0,09
80 000	0,00

Comparați metoda utilizării estimate cu metoda valorii monetare estimate din punctul de vedere al valorii drept criteriu în luarea deciziilor.

ACCA Tehnici decizionale

A5. Bronco Manufacturing Company își propune să lanseze pe piață un sistem de securitate pentru locuințe. Acesta este produs în trei modele: standard, deluxe și super, care diferă din punctul de vedere al sofisticării și complexității, dar pentru moment compania are capacitatea de a produce un singur model. A fost efectuată o analiză a absorbției probabile pe piață a celor trei modele și pe baza acestei analize s-a făcut o estimare a profiturilor rezultante.

Nivel de absorbție	Probabilitatea de absorbție	Profituri (în mii de £)		
		Modelele		
		Standard	Deluxe	Super
Excelent	0,2	60	100	120
Moderat	0,5	40	60	80
Redus	0,3	20	0	-40

Se cere:

a) Să hotărâți ce model ar trebui lansat pe piață, folosind:

1) criteriul profitului maxim estimat;

2) criteriul de decizie maxim.

În contextul acestei întrebări, subliniați pe scurt limitările care marchează fiecare din cele două criterii menționate.

b) Care ar fi valoarea monetară a cunoașterii nivelului de absorbție pe modele, înaintea luării deciziei ca modelul să fie produs și comercializat.

c) Directorul economic de la Bronco estimează următoarele utilități pentru diferite sume de abni de la 40 000£ până la 120 000£, după cum urmează:

Valoarea monetară, în mii de £	-40	-20	0	20	40	60	80	100	120
Utilitatea	0	0,20	0,37	0,52	0,65	0,78	0,89	0,96	1

Reconsiderați hotărârea luată la punctul a, folosind criteriul maximalizării valorii utilității. Comparați metoda utilității estimate cu metoda profitului estimat din punctul de vedere al valorii lor ca criteriu în luarea deciziilor.

d) Un studiu de piață aprofundat confirmă probabilitatea de 0,2 pentru un nivel de absorbție „excelent". Cu toate acestea, probabilitățile pentru niveluri moderate și reduse sunt nesigure.

Considerând p ca fiind probabilitatea unui nivel de absorbție moderat, determinați plaja de valori ale lui p pentru care fiecare model ar trebui să fie preferat (folosind metoda utilității maxime estimate).

ACCA Tehnici decizionale

A6. O companie își vinde produsele clienților săi cu o înțelegere de discount de 1% lunar (ceea ce înseamnă că o factură emisă într-o anumită lună are scadența de plată la sfârșitul lunii următoare, cu un discount de 1% din valoarea facturată). Dacă plata se efectuează după acest termen, clienților nu li se mai face acest discount.

85% dintre clienții companiei își achită facturile în limitele termenului convenit. Din rest, 40% achită facturile cu o întârziere de încă o lună, iar 70% dintre restanțieri achită cu întârziere de încă o lună (total, două luni întârziere).

Facturile de vânzări ale companiei totalizează în medie 2,632 milioane £ pe lună până pe 31 martie 1995. Se preconizează o creștere a vânzărilor cu circa 6% până pe 31 martie 1996. Indicii anuali de inflație, începând din 31 mai 1992 sunt următorii:

	Indicele de inflație (până la 31 mai 1992 = 100)	
Până la 31 mai 1993	104,4	Real
Până la 31 mai 1994	107,9	Real
Până la 31 mai 1995	110,9	Real
Până la 31 mai 1996	113,6	Estimat

Se cere:

a) Să se calculeze pentru ultimele 12 luni înainte de 31 mai 1996, în mii de £ estimarea pentru:

1) valoarea vânzărilor medii anuale;

2) discountul total acordat clienților, conform înțelegerii.

b) Să se calculeze probabilitățile ca:

1) o factură să rămână neplătită două luni după expirarea termenului de plată;

2) o factură să fie plătită între prima și a doua lună de la expirarea termenului de plată conform înțelgerii.

c) Să se facă pe scurt, distincția între „evenimentele condiționale" și "evenimentele reciproc eliminatorii".

ACCA Informația managerială

Întrebări fără răspunsuri

B1. O bucătărie centrală asigură mâncarea gătită pentru mai multe cantine ale unei organizații. Preparatele care nu sunt solicitate sunt folosite în alimentația porcilor, la o valoare netă de 1p/porția. Un anumit fel, notat D, este vândut cantinelor la prețul de 1£ și prepararea sa costă 20p.

Pornind de la solicitările anterioare se preconizează ca în 250 de zile lucrătoare din decursul unui an calendaristic cantinele să solicite următoarele cantități:

La 100 zile	40
La 75 zile	50
La 50 zile	60
La 25 zile	70

Bucătăria pregătește felul respectiv în serii de câte 10 porții și trebuie să stabilească numărul de serii de câte 10 porții care vor fi gătite în următorul an.

Vi se cere:

a) Să calculați profitul maxim estimat pe an, dacă în fiecare zi s-ar prepara aceeași cantitate din felul D.

b) Să calculați costul maxim care ar putea fi plătit pentru informația perfectă în legătură cu cererea (40, 50, 60 sau 70), presupunându-se că în fiecare zi ar trebui pregătit același număr de serii de câte 10 porții.

CIMA Tehnic cantitative

B2. DCH Supplies Ltd. trebuie să achiziționeze un copiator pentru departamentul administrativ. Modelul cel mai adecvat pentru nevoile acestuia poate fi achiziționat direct de la producător, la prețul unitar de 4200£. Cu intenția de a face o economie, directorul departamentului s-a informat în legătură cu posibilitatea achiziționării unui model la mâna a doua și a găsit unul la prețul de 2700£. După verificarea copiatorului, directorul are siguranța că, în mare, aparatul se află într-o stare tehnică bună, dar are suspiciuni în legătură cu modulul central de copiere,

componentul principal al aparatului. Din experiență, el bănuie o probabilitate de 0,3 ca acest component să nu mai fie acceptabil din punct de vedere funcțional. Un modul central de copiere nou costă 2400£. Există posibilitatea ca, după achiziționarea copiatorului la mâna a doua, compania DCH să se vadă nevoită să achiziționeze și un modul central nou, la prețul menționat.

Se cere:

a) 1) Reprezentați aceste informații sub forma unui arbore decizional. Aplicați metoda valorii estimate pentru a formula recomandarea cea mai bună pentru directorul departamentului.

2) Ce alte caracteristici/elemente trebuie să mai aibă în vedere directorul în luarea deciziei?

b) Înaintea luării deciziei, copiatorul la mâna a doua poate fi trimis pentru o verificare amănunțită la un service local. Costul verificării ar fi 200£, dar în acest fel, compania ar ști cu siguranță dacă modulul central este acceptabil sau nu.

Pornind numai de la informația financiară, formulați o recomandare pentru directorul departamentului în acest sens.

c) DCH Supplies Ltd. angajează un inginer care poate să verifice și el copiatorul, la un cost de numai 100£, numai că în acest caz, testul nu ar fi complet. Pornind de la experiența anterioară, tabelul care urmează conține probabilitățile relevante pentru această situație.

		Starea reală a componentei principale	
		Acceptabilă	Defectuoasă
Predicția inginerului în privința modulului	Satisfăcătoare 0,8	0,8	0,2
	Nesatisfăcătoare 0,2	0,3	0,7
		0,7	0,3

De exemplu, probabilitatea ca inginerul să declare modulul principal de copiere nesatisfăcător din punct de vedere tehnic e de 0,2, iar probabilitatea ca modulul să fie acceptabil în ciuda predicției "nesatisfăcător" dată de inginer e de 0,3.

Reprezentați aceste informații într-un arbore decizional și formulați recomandarea potrivită pentru directorul departamentului.

ACCA Tehnici decizionale

B3. Ca urmare a creșterii solicitărilor pentru locuri de parcare auto la nivelul unui oraș, proprietarii unei parcări auto își revizuiesc planul de afaceri. Ei trebuie să hotărască asupra uneia dintre cele 3 opțiuni pentru anul ce urmează:

Opțiunea 1. Să nu facă nici o schimbare. Profitul anual este de 100 000£. Există o posibilitate foarte redusă ca în decursul următorului an să se confrunte cu un nou concurent.

Opțiunea 2. Să mărească prețurile cu 50%. În acest caz, există 75% posibilitatea apariției unui concurent. Estimările profitului pe anul următor, efectuate de către Consiliul de Administrație în această situație sunt:

2A. Cu un concurent nou		2B. Fără concurent	
Probabilitatea	Profit (£)	Probabilitatea	Profit (£)
0,3	150 000	0,5	200 000
0,4	120 000	0,3	150 000
0,3	80 000	0,2	100 000

Opțiunea 3. Să extindă rapid parcările auto, cu un cost de 50 000£, păstrând prețurile nemodificate. Profiturile în acest caz sunt estimate identic cu cazul 2B de mai sus, cu deosebirea că probabilitatea ar fi 0,6; 0,3 și respectiv 0,1.

Vi se cere:

a) să concepeți un arbore decizional pentru această problemă, incluzând toate informațiile relevante;

b) folosind valorile estimate să analizați arborele decizional și să formulați recomandarea pentru una dintre variante, însoțită de o argumentare;

c) să formulați orice presupuneri și rezerve pe care le sesizați în cursul analizei.

CIMA Metode cantitative.

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITARA

PARTEA 2

4. STATISTICĂ – INTRODUCERE

1. Obiective

1. După parcurgerea acestui capitol:

• vă veți reîmprospăta cunoștințele de bază din domeniul statisticii;

• veți înțelege cum se construiesc și cum se utilizează distribuțiile frecvențiale;

• veți ști să calculați și să folosiți media aritmetică, mediana și modulul;

• veți înțelege cum se calculează mărimile-cheie ale dispersiei: deviația standard și varianța;

• veți ști ce anume se înțelege prin asimetrie;

• veți putea descrie distribuția normală și veți putea utiliza tabelele pentru suprafețele normale;

• veți ști care sunt caracteristicile distribuției binomice și ale distribuției Poisson;

• veți înțelege când se poate folosi aproximația normală în locul celei binomice.

2. Analiza statistică

Analiza statistică sau, mai simplu, statistica, operează cu informații cantitative. Analiza statistică este o metodă științifică de analizare a volumurilor mari de date numerice, prin rezumarea caracteristicilor lor esențiale și a relațiilor dintre aceste date, făcând posibil, prin generalizarea acestei analize să se determine tipare comportamentale, efecte specifice și tendințe de viitor. Statistica poate fi aplicată în orice domeniu în care se dispune de volume mari de date numerice, nu numai în contabilitate și afaceri, ci și în medicină, inginerie, științe, administrație publică și multe alte domenii.

Teoria statistică are la bază matematica probabilistică, care constituie baza, nu numai pentru determinarea caracteristicilor generale ale datelor, ci și pentru determinarea gradului de credibilitate a fiecărei generalizări. Din punctul de vedere al domeniului afacerilor, principalii pași ai unei analize statistice sunt:

a) colectarea datelor provenind din diverse surse deja constituite sau din sondaje efectuate pe eșantioane reprezentative de subiecți;

b) analiza și interpretarea datelor prin mijloacele tehnicilor statistice;

c) utilizarea rezultatelor calculate, împreună cu diverse estimări probabilistice, costuri și venituri preconizate, astfel încât luarea deciziilor să fie o chestiune rațională.

3. Distribuția frecvențială

Înainte ca datele să poată fi folosite sau analizate efectiv, în prealabil este necesară gruparea sau aranjarea datelor brute într-o formă care să le facă mai ușor de prelucrat. O astfel de formă importantă, care este baza majorității aplicațiilor din această lucrare este *distribuția frecvențială.*

Distribuția frecvențială arată diferitele valori variabile și incidența lor (cu alte cuvinte frecvența cu care au fost observate, notate), sau în cazul cel mai des întâlnit, incidența claselor de valori, condiții în care este vorba despre *distribuția frecvențială grupată.*

De exemplu, a fost notat numărul înregistrărilor realizate de 50 de operatori în decursul unei ture de lucru, după cum urmează:

Tabelul 4.1

1162	1497	1391	1468	1406
1286	1329	1410	1340	1277
1419	1103	1383	1401	1343
1509	1292	1227	1288	1596
1322	1457	1184	1359	1461
1128	1339	1429	1540	1235
1384	1485	1498	1322	1520
1505	1572	1517	1417	1485
1401	1292	1255	1132	1336
1362	1305	1262	1396	1426

Aceste numere pot fi rearanjate în ordine crescătoare (sau descrescătoare), operație numită *ordonare,* rearanjate în ordine crescătoare cu proprietatea că fiecare număr de înregistrări apare o singură dată, alături de frecvența (notată *f*) cu care apare. Cel mai simplu însă este ca numerele de înregistrări să fie direct grupate pe anumite clase, împreună cu frecvența înregistrărilor respective.

Un asemenea aranjament ar fi următorul:

Tabelul 4.2

Distribuție frecvențială grupată

Înregistrări			Frecvența (*f*)
1100	până la	1200	5
1200	până la	1300	9
1300	până la	1400	14
1400	până la	1500	15
1500	până la	1600	7
			$50 = \Sigma f$

unde Σf reprezintă totalul frecvențelor.

Note:

a) Tabelul 4.2 reprezintă o metodă convenabilă și cu o valoare informativă ridicată, de rezumare a datelor originale brute, cu o anumită pierdere în ceea ce privește acuratețea.

b) La tabelul 4.2 se folosesc intervale egale pentru clasele avute în vedere. Pot fi folosite însă și clase inegale sau cu intervale deschise.

c) Se observă că $\Sigma f = 50$, adică numărul total de înregistrări din tabelul 4.1.

4. Date discrete sau continue

Datele discrete au valori distincte, reprezentate prin numere întregi. Astfel, numărul de angajați dintr-un departament poate fi 0, 1, 2, 3, 4 etc. și nu 2,7 sau 4,35. Datele continue pot avea orice valori într-un interval oarecare, fie numere întregi, fie fracționare. Astfel, dacă ar fi vorba despre o listă de mase, am putea avea orice valori, cum ar fi 10,68 kg, 14,753 kg, 16 kg, 21,005kg. Dacă pornim de la date continue cu care alcătuim o distribuție frecvențială, aceasta se va numi distribuție frecvențială continuă. Distribuțiile frecvențiale continue se pretează cel mai bine analizei statistice și majoritatea tabelelor statistice se bazează pe valori continue.

Pentru acest motiv, în cazurile în care ne confruntăm cu o populație statistică numeroasă, se trece de cele mai multe ori la valori continue, chiar dacă datele propriu-zise sunt discrete.

Pentru ușurarea rezolvării, aceeași presupunere se face și în cazul întrebărilor de examinare.

Notă. Termenul „populație" este folosit în sensul statistic, desemnând *toate* obervațiile posibile ale unei cantități date, care este vizată la un moment dat. Un termen alternativ este *univers*.

5. Reprezentarea distribuției frecvențiale

Cea mai răspândită metodă de reprezentare a distribuției frecvențiale grupate este histograma. Histograma este constituită dintr-un set de bare sau coloane verticale, ale căror arii sunt proporționale cu frecvențele pe care le reprezintă. Pe axa verticală se notează frecvențele, iar pe axa orizontală se notează intervalele de valori ale claselor. În fig. 4.1 este prezentată histograma distribuției date în tabelul 4.2.

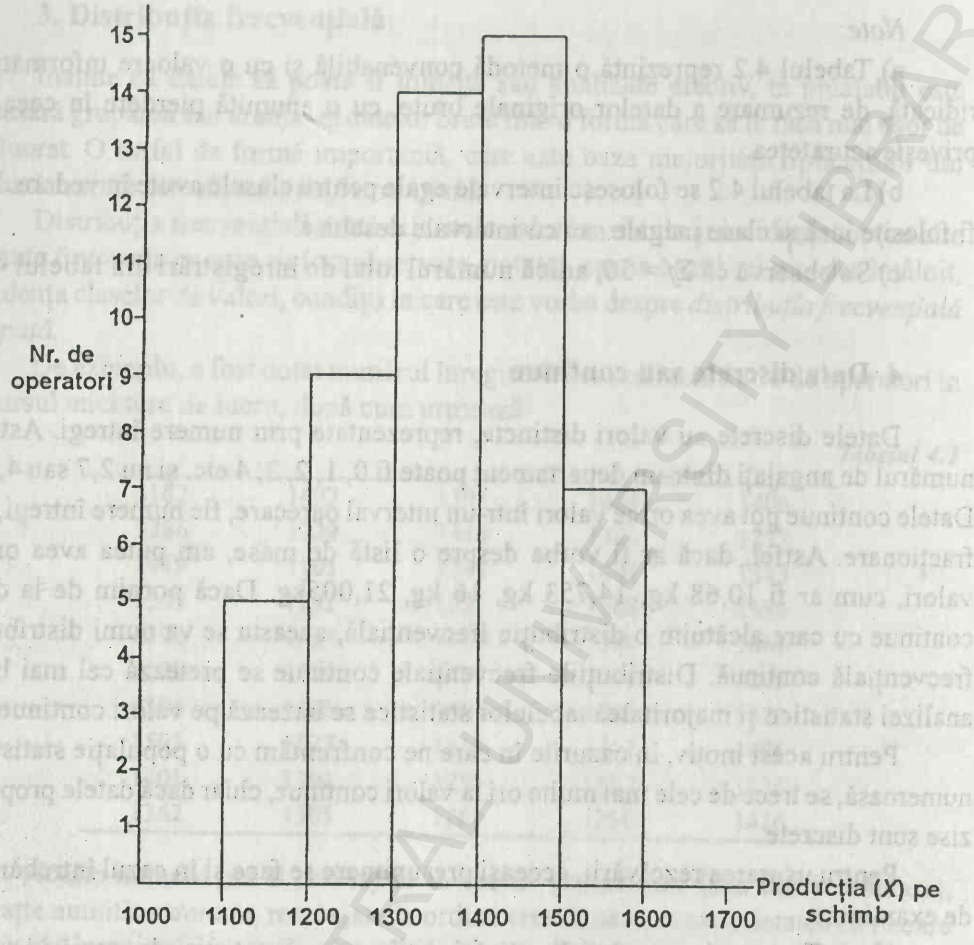


Fig. 4.1. Histogramă.

Notă. Histograma din fig. 4.1 are înălțimea barelor (dreptunghiurilor) direct proporțională cu frecvența claselor alese. Aceasta se datorește faptului că s-au ales clase de valori egale. Dacă intervalele claselor de valori alese nu sunt egale, frecvența clasei este reprezentată de **aria barei** și nu de înălțimea acesteia. Astfel, dacă avem o clasă cu intervalul de valori *dublu* decât intervalul standard, frecvența clasei este trasată la *jumătatea* clasei standard, iar dacă avem o clasă cu intervalul de valori redus la *jumătate*, frecvența clasei va fi trasată la *dublul* clasei standard și așa mai departe.

Un mijloc alternativ de reprezentare pentru histogramă, pornind de la aceleași notații pe axe, este poligonul frecvențelor, în care segmentele de dreaptă unesc punctele din mijlocul intervalelor de valori ale claselor alese. Suprafața poligonului este egală cu suprafața histogramei. În fig. 4.2 sunt reprezentate, sub forma poligonului frecvențelor datele din tabelul 4.2.

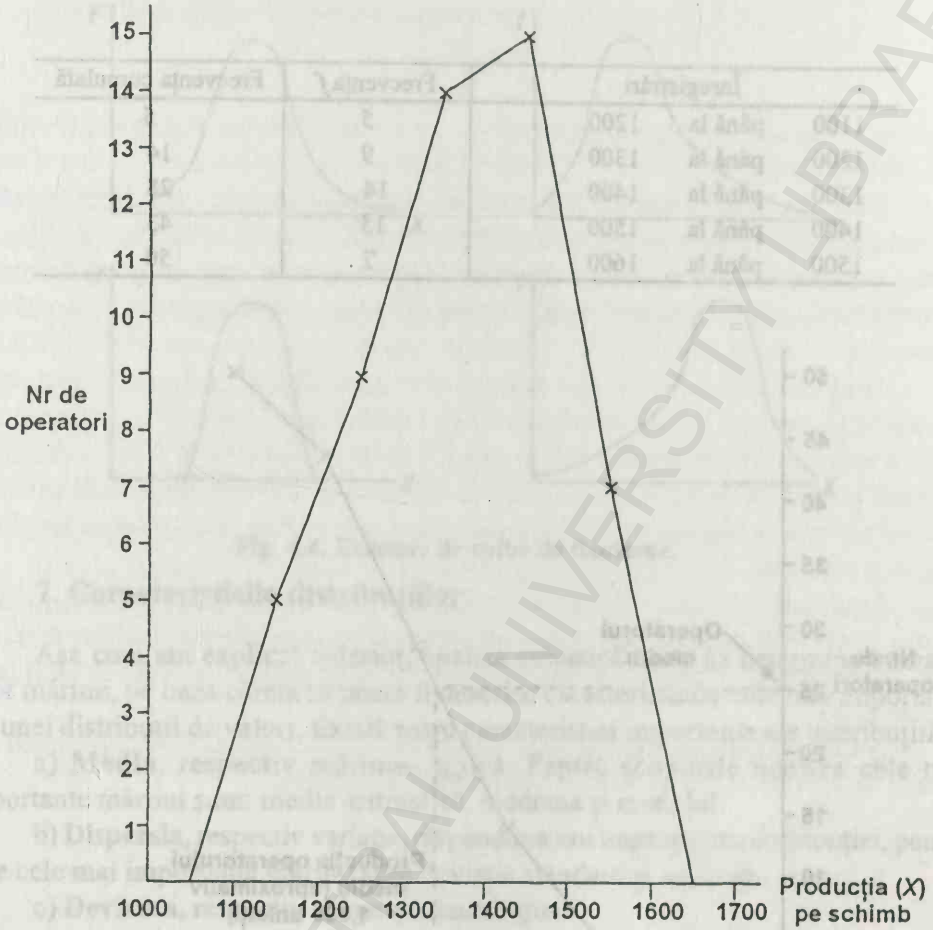


Fig. 4.2. Poligonul frecvențelor.

În anumite situații este posibil să se solicite reprezentarea distribuției frecvențiale prin curba sau ogiva frecvențelor cumulate. Aceste diagrame se trasează prin plotarea frecvențelor cumulative ale distribuției față de limita superioară a intervalului de valori al fiecărei clase. Diagramele constituie o metodă grafică ce facilitează găsirea mediei distribuției.

De exemplu, datele din tabelul 4.2 pot fi reprezentate sub forma unei ogive, notându-se numărul mediu de înregistrări efectuate de operatorul cu un nivel mediu de activitate. În continuare este prezentat tabelul 4.2 completat cu o coloană cu frecvențe cumulate, iar în fig. 4.3 este reprezentat grafic tabelul 4.2 modificat.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Înregistrări			Frecvența *f*	Frecvența cumulată
1100	până la	1200	5	5
1200	până la	1300	9	14
1300	până la	1400	14	28
1400	până la	1500	15	43
1500	până la	1600	7	50

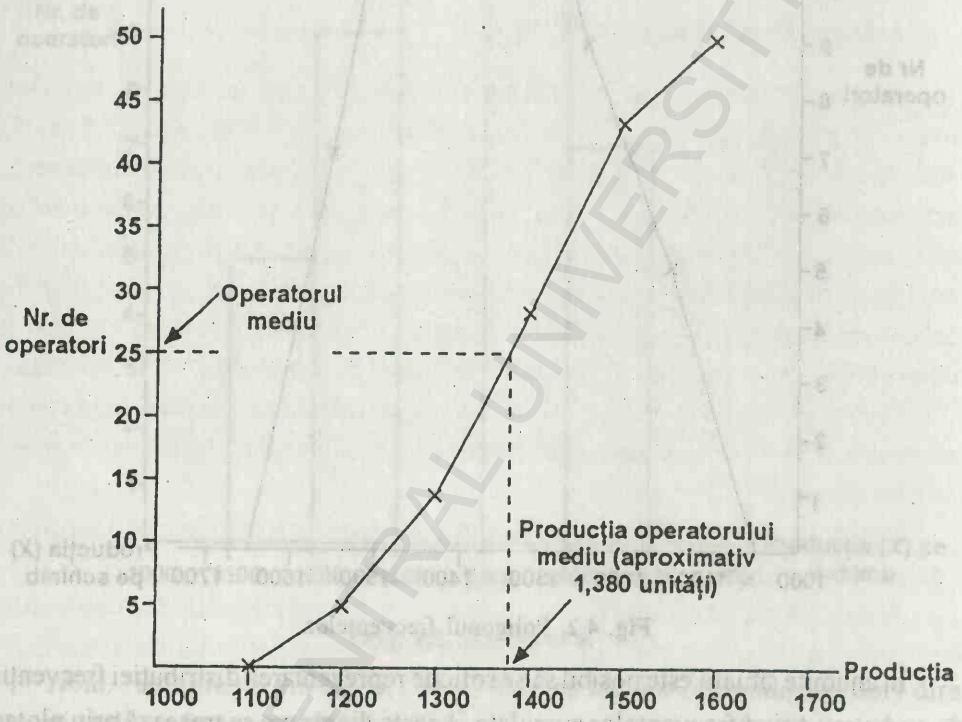


Fig. 4.3. Diagrama frecevențelor cumulate din tabelul 4.2.

6. Curbe de frecvențe

Pentru descrierea distribuțiilor frecvențiale ale unei populații de date continue pot fi trasate și grafice curbilinii. Aceasta este forma limită de dezvoltare a histogramei sau a poligonului frecvențelor, atunci când numărul de clase alese tinde la infinit, iar intervalele de valori ale claselor tind la zero. În fig. 4.4 sunt reprezentate câteva tipuri de curbe de frecvențe.

BCU CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

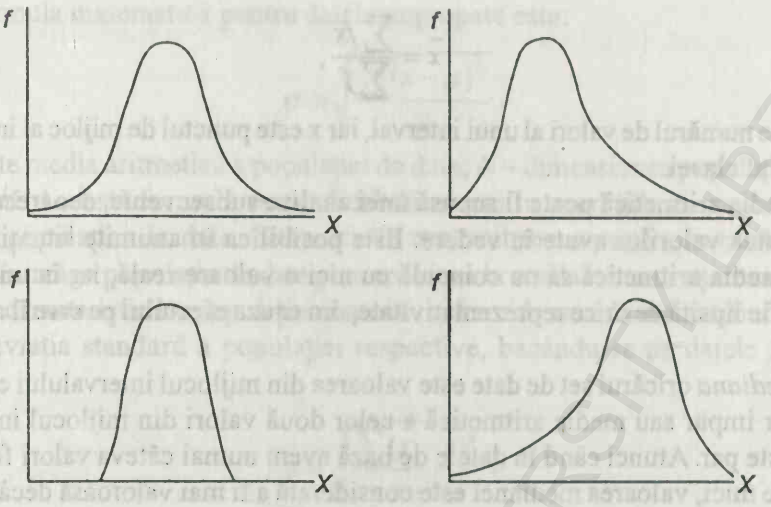


Fig. 4.4. Exemple de curbe de frecvențe.

7. Caracteristicile distribuțiilor

Așa cum am explicat anterior, analiza statistică tinde să determine sumarul unor mărimi, pe baza cărora să poată fi descrise caracteristicile cele mai importante ale unei distribuții de valori. Există patru caracteristici importante ale distribuțiilor:

a) **Media**, respectiv mărimea tipică. Pentru scopurile noastre cele mai importante mărimi sunt: media aritmetică, mediana și modulul.

b) **Dispersia**, respectiv variația, răspândirea sau împrăștierea distribuției, pentru care cele mai importante mărimi sunt deviația standard și varianța.

c) **Devierea**, respectiv asimetria distribuției.

d) **Punctul culminant** sau vârful distribuției, care se referă la aspectul vârfului graficului.

8. Media

De departe cea mai importantă măsură pentru medie este media artimetică, notată în general cu $\bar{x}$. Media aritmetică sau media, pe scurt se calculează cu ajutorul următoarei formule:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n},$$

unde n este numărul total al valorilor.

Atunci când datele sunt aranjate într-o distribuție frecvențială grupată, formula devine:

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f},$$

unde *f* este numărul de valori al unui interval, iar x este punctul de mijloc al intervalului de valori al clasei.

Media aritmetică poate fi supusă unei analize subsecvente, deoarece se referă la totalitatea valorilor avute în vedere. Este posibil ca în anumite situații valoarea dată de media aritmetică să nu coincidă cu nici o valoare reală, iar în unele cazuri poate să fie lipsită de orice reprezentativitate, din cauza efectului pe care îl au valorile extreme.

Mediana oricărui set de date este valoarea din mijlocul intervalului când *n* este un număr impar sau media aritmetică a celor două valori din mijlocul intervalului când *n* este par. Atunci când în datele de bază avem numai câteva valori foarte mari sau foarte mici, valoarea medianei este considerată a fi mai valoroasă decât valoarea mediei aritmetice, deși nu poate fi folosită ulterior în calcule, așa cum se întâmplă cu media aritmetică.

Modulul reprezintă valoarea care apare cel mai frecvent sau valoarea în jurul căreia se observă cel mai ridicat grad de înghesuire. În condiții obișnuite, modulul este semnificativ numai dacă avem o înghesuire pronunțată a valorilor în jurul unui singur punct.

Notă. Din definițiile de mai înainte rezultă că, în cazul unei distribuții simetrice, media aritmetică, mediana și modulul au aceeași valoare.

9. Dispersia

Dispersia reprezintă împrăștierea și variația valorilor unui set de date numerice. Este necesară măsurarea gradului de dispersie a valorilor pentru următoarele două motive:

a) Pentru aprecierea nivelului de încredere ce poate fi acordat metodei de mediere a valorilor datelor.

b) Pentru a servi ca bază pentru controlul variabilității. De exemplu, evaluarea gradului de variație a calității reprezintă o parte esențială a metodelor de control al calității în fabrici și ne vom ocupa de acest subiect în cuprinsul acestei lucrări.

Cea mai importantă măsură a dispersiei este *deviația standard*, notată cu σ. Valoarea numerică a deviației standard se obține prin:

a) Ridicarea la pătrat a valorilor individuale ale deviației date de media aritmetică.

b) Adunarea pătratelor deviațiilor.

c) Împărțirea acestei sume la numărul de elemente ale distribuției.

d) Calcularea valorii rădăcinii pătrate a rezultatului operației de la punctul c.

Formula matematică pentru datele negrupate este:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x-\mu)^2}{N}},$$

unde μ este media aritmetică a populației de date; N – dimensiunea populației de date.

Notă. Această formulă este aplicabilă numai în condițiile cunoașterii tuturor detaliilor populației de date. Deoarece în cea mai mare parte a cazurilor nu este cunoscut întreaga populație de date și se apelează la sondarea unor eșantioane pentru estimarea caracteristicilor populației respective, formula care dă cea mai bună estimare pentru deviația standard a populației respective, bazându-se pe datele sondajului este:

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n-1}},$$

unde s este estimarea lui σ, respectiv deviația standard a populației analizate.

Deviația standard se măsoară în aceleași unități ca și constanta. De exemplu, dacă se calculează media aritmetică și deviația standard ale vârstelor unui grup de oameni, răspunsurile se vor da după cum urmează:

- media aritmetică $= \bar{x} = 43{,}5$ ani,
- deviația standard $= \sigma = 6{,}9$ ani.

Varianța reprezintă pătratul deviației standard, adică

varianța $= \sigma^2$.

În cazul în care datele primare sunt aranjate în grupe de distribuție frecvențială, formulele de mai înainte vor deveni:

1) Pentru o populație:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f(x-\mu)^2}{\sum f}},$$

unde $\Sigma f = N$ = dimensiunea populației de date.

2) Pentru un eșantion de date

$$s = \sqrt{\frac{\sum f(x-\bar{x})^2}{\sum f - 1}},$$

unde $\Sigma f - 1 = n-1$, n fiind dimensiunea eșantionului.

Formulele matematice de mai înainte sunt prezentate atât în forma de bază cât și în forme alternative, utile pentru ușurarea calculelor.

De exemplu, formula pentru deviația standard a unei populații de date:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x-\bar{x})^2}{n-1}},$$

poate fi rearanjată, obținându-se o formulă alternativă, după cum urmează:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}}{n-1}}.$$

O altă formulă convenabilă în cazul utilizării calculatorului este următoarea:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fx^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fx}{\sum f}\right)^2}.$$

Spre deosebire de deviațiile standard, variațele pot fi adiționate. Aceasta este o proprietate importantă pentru cazul în care trebuie combinate două distribuții de frecvențe; cu alte cuvinte, pentru două distribuții, A și B care au variațele σ_A^2 și σ_B^2, varianța combinației distribuțiilor va fi $\sigma_A^2 + \sigma_B^2$.

Prin următorul exemplu se arată modul de calcul a mărimilor pe care le-am prezentat.

Exemplul 1

Să se calculeze media aritmetică, deviația standard și varianța următoarelor date primare:

5, 8, 15, 29, 47, 47, 64, 71, 74.

Soluția

Avem 9 valori, adică $n = 9$.

x	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
5	-35	1225
8	-32	1024
15	-25	625
29	-11	121
47	+7	49
47	+7	49
64	+24	576
71	+31	961
74	+34	1156
$\Sigma x = 360$		5786

$$\therefore \text{Media aritmetică } \bar{x} = \frac{360}{9} = 40$$

$$\therefore \text{Varianța } \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{5786}{9-1} = 723{,}25.$$

BCU IAȘI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

iar deviația standard = $\sqrt{723{,}25} = 26{,}893$.

Notă. Mediana datelor primare din exemplu este valoarea din mijlocul șirului, respectiv a 5-a, care este 47. Modulul este valoarea care apare cel mai frecvent, respectiv tot 47, fiind singura valoare care apare de două ori.

Exemplul 2

Calculați media aritmetică și deviația standard pentru eșantionul de date primare din tabelul 4.3.

Tabelul 4.3

Intervalul de valori al claselor	Punctul mediu x	f	fx	$f(x-\bar{x})^2$
1100 - 1200	1150	5	5 750	242 000
1200 - 1300	1250	9	11 250	129 600
1300 - 1400	1350	14	18 900	5 600
1400 - 1500	1450	15	21 750	96 000
1500 - 1600	1550	7	10 850	226 800
		50	68 500	700 000

Soluția

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{68\,500}{50} = 1370 \text{ unități.}$$

Deoarece tabelul 4.3 cuprinde datele primare ale unui eșantion, deviația standard se calculează după cum urmează:

$$s = \sqrt{\frac{\sum f(x-\bar{x})^2}{n-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{700\,000}{49}}$$

$$= 119{,}52 \text{ unități.}$$

10. Dispersia relativă și absolută

Deviația standard oferă informații importante cu privire la dispersia *absolută* pentru distribuția dată; cu cât este mai mare deviația standard, cu atât este mai ridicat și nivelul de împrăștiere a datelor.

În anumite situații este util să existe o măsură a *dispersiei relative* a distribuției, în special în cazul comparării distribuțiilor. Mărimea care oferă această imagine relativă este coeficientul de variație sau, așa cum este mai larg cunoscut, *coeficientul de dispersie.*

Acesta este de fapt, raportul dintre deviația standard a unei distribuții și media aritmetică a distribuției, exprimată sub formă procentuală.

$$\text{Coeficientul de variație} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$$

De exemplu, distribuția A variază relativ mai mult sau mai puțin decât distribuția B având în vedere că:

$$\sigma_A = 5{,}5 \qquad \bar{x}_A = 45$$

$$\sigma_B = 2{,}6 \qquad \bar{x}_B = 18{,}5?$$

Coeficienții de variație sunt:

$$A = \frac{5{,}5}{45} \times 100 = 12{,}2\%,$$

$$B = \frac{2{,}6}{18{,}5} \times 100 = 14{,}05\%.$$

∴ Distribuția B este relativ mai variabilă decât distribuția A.

11. Descrierea

Atunci când o distribuție nu este simetrică, se spune că există o deviere. Efectul devierii este acela că media aritmetică, mediana și modulul diferă față de situația în care ar fi existat simetrie. În fig. 4.5 sunt ilustrate devierile pozitive și negative, precum și pozițiile mediei aritmetice, a medianei și a modulului.

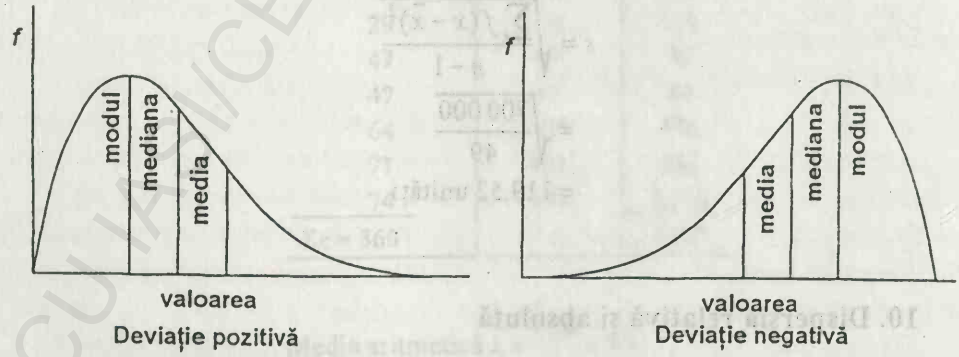


Fig. 4.5

Calcularea valorii exacte a devierii impune existența unei tehnici avansate, însă o valoare aproximativă și sensul devierii pot fi stabilite prin *coeficientul Pearson pentru deviație*, și anume:

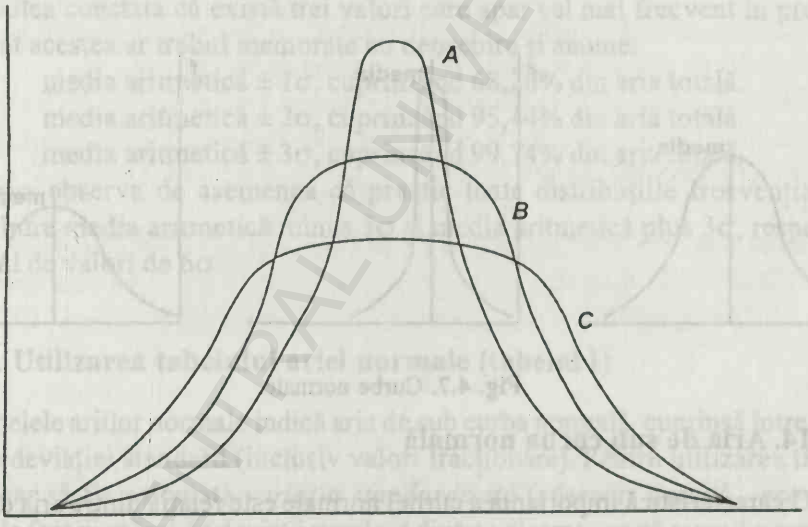
$$Sk = \frac{3(\text{Media} - \text{Mediana})}{\sigma}.$$

Această formulă are o aplicabilitate limitată, iar deviația este în general apreciată mai mult în termeni descriptivi decât rezumată sub forma unei singure valori.

12. Forma vârfului

Această mărime se referă la forma vârfului graficului distribuției frecvențiale. Aceasta poate varia de la *plată* (respectiv mai plată decât forma normală), *medie* (respectiv forma normală) și *ascuțită* (respectiv mai ascuțită decât forma normală).

Aceste forme sunt reprezentate în fig. 4.6.



A – distribuție ascuțită
B – distribuție medie (normală)
C – distribuție plată

Fig. 4.6

13. Distribuția normală

După prezentarea caracteristicilor generale ale distribuțiilor, ne vom opri asupra unei anumite distribuții pe care o vom prezenta în detaliu. Este vorba despre *distribuția normală* sau *curba normală*. Distribuția normală este cea mai importantă distribuție din domeniul statisticii, manifestându-se adeseori în cazul descrierii unor evenimente naturale și este de o importanță deosebită în teoria eșantioanelor și a deducției statistice, care vor fi prezentate ulterior în lucrare.

Principalele caracteristici ale distribuției normale sunt:

a) Este o distribuție continuă.

b) Este reprezentată printr-o curbă cu formă perfect simetrică, de clopot.

c) Capetele curbei distribuției se apropie fără a intersecta axa orizontală.

d) Formula matematică a curbei este:

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2}$$

(deși această formulă nu trebuie memorată este important de reținut faptul că toate proporțiile unei distribuții normale pot fi descrise numai în condițiile cunoașterii mediei aritmetice și a deviației standard pentru distribuția respectivă).

e) Media aritmetică, modulul și mediana trec prin vârful curbei și împart aria delimitată între curbă și axa orizontală în două jumătăți perfect egale.

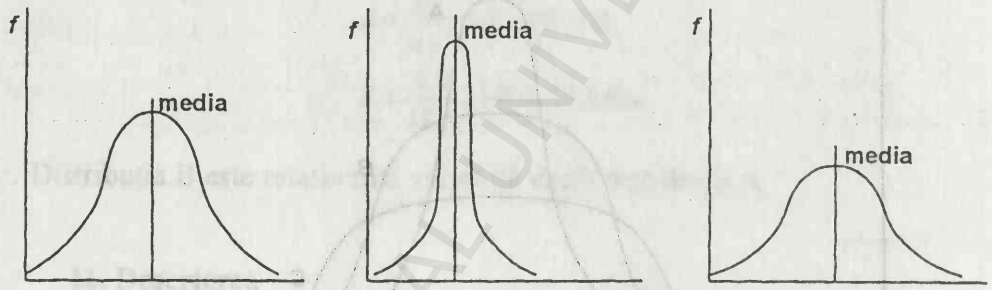


Fig. 4.7. Curbe normale.

14. Aria de sub curba normală

O caracteristică importantă a curbei normale este relația dintre aria delimitată sub curba normală (respectiv procentajul numărului de date primare) și deviația standard a distribuției.

De exemplu, 68,25% din aria totală este cuprinsă între punctul reprezentând media aritmetică, plus și minus o deviație standard.

Curba normală fiind perfect simetrică, rezultă că aria dintre punctul reprezentând media aritmetică și punctul reprezentând media aritmetică minus o deviație standard este de 34,13%, egală cu aria cuprinsă între punctul reprezentând media aritmetică și punctul reprezentând media aritmetică plus o deviație standard, care este tot de 34,13%. Această situație rezultă din fig. 4.8, unde μ(min) este media aritmetică a numărului de date.

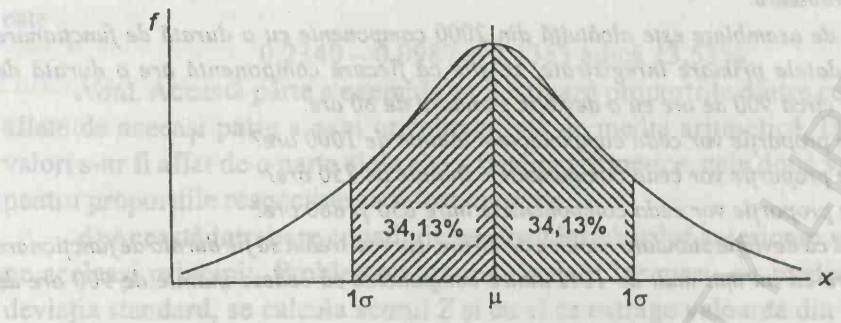


Fig. 4.8

Aria cuprinsă între oricare două perpendiculare pe axa orizontală, care intersectează graficul, poate fi găsită în tabelul (I) "Arii determinate de curba normală", dar veți putea constata că există trei valori care apar cel mai frecvent în probleme, astfel încât acestea ar trebui memorate cu deosebire și anume:

media aritmetică ± 1σ, cuprinzând 68,26% din aria totală.
media aritmetică ± 2σ, cuprinzând 95,44% din aria totală.
media aritmetică ± 3σ, cuprinzând 99,74% din aria totală.

Se va observa de asemenea că practic toate distribuțiile frecvențiale sunt cuprinse între media aritmetică minus 3σ și media aritmetică plus 3σ, respectiv pe un interval de valori de 6σ.

15. Utilizarea tabelului ariei normale (tabelul I)

Tabelele ariilor normale indică aria de sub curba normală, cuprinsă între diferite valori ale deviației standard (inclusiv valori fracționare). Pentru utilizarea tabelelor este necesar să fie calculată *variația standardizată* (adeseori numită *„scorul Z"*), care este de fapt numărul de deviații standard dintre valoarea cerută și media aritmetică.

Z se calculează cu relația:

$$Z = \left| \frac{x - \mu}{\sigma} \right|,$$

unde:

Z este numărul de deviații standard dintre valoarea cerută și media aritmetică;
x – valoarea variabilei avută în vedere;
μ – media aritmetică a populației de date;
σ – deviația standard a populației de date.

Paralelele verticale care încadrează expresia matematică se citesc „modul de..." și indică faptul că nu interesează dacă rezultatul este pozitiv sau negativ, ci numai valoarea sa numerică.

Exemplu de problemă

O linie de asamblare este alcătuită din 2000 componente cu o durată de funcționare limitată. Din datele primare înregistrate, se știe că fiecare componentă are o durată de funcționare de circa 900 de ore cu o deviație standard de 80 ore.

a) În ce proporție vor ceda componentele înainte de 1000 ore?

b) În ce proporție vor ceda componentele înainte de 750 ore?

c) În ce proporție vor ceda componentele între 850 și 880 ore?

d) Știind că deviația standard rămâne de 80 ore, care va trebui să fie durata de funcționare necesară pentru ca nu mai mult de 10% dintre componente să cedeze înainte de 900 ore de funcționare.

Rezolvare

a) $$Z = \left|\frac{1000 - 900}{80}\right| = 1{,}25$$

($Z = 1{,}25$ înseamnă că valoarea care este studiată, 1000 de ore de funcționare se află la 1,25 unități de deviația standard față de media de 900 de ore).

Examinând tabelul I se va vedea că valoarea unui scor Z de 1,25 este 0,3944. Deoarece jumătate din distribuție este situată sub valoarea de 900, proporția în care componentele cedează înainte de 1000 de ore de funcționare este 0,5 + 0,3944 = =89,44%.

Dacă s-ar cere acest lucru, s-ar putea calcula și numărul de componente care pot ceda înainte să împlinească 1000 de ore de funcționare, după cum urmează:

$2000 \times 0{,}8944 = 1788{,}8$, valoare care poate fi rotunjită la 1789.

b) $$Z = \left|\frac{900 - 750}{80}\right| = 1{,}875$$

iar din tabele se obține valoarea de 0,4696. În acest caz, cerându-se proporția de componente care vor ceda înainte de 750 de ore de funcționare, valoarea din tabel se deduce din 0,5.

∴ Proporția componentelor care pot ceda înaintea împlinirii a 750 ore de funcționare

$= 0{,}5 - 0{,}4696 = 0{,}0304$ adică 3,04%.

c) Când se cere să se determine proporția dintre cele două valori, dintre care nici una nu este medie aritmetică, este necesară consultarea tabelelor, pentru a găsi proporția dintre o medie aritmetică, o valoare și proporția dintre cealaltă medie aritmetică și cea de-a doua valoare, după care se poate face diferența dintre cele două proporții:

$$Z = \left|\frac{900 - 850}{80}\right| = 0{,}625 \text{ care dă o proporție de } 0{,}2340,$$

$$Z = \left|\frac{900 - 880}{80}\right| = 0{,}25 \text{ care dă o proporție de } 0{,}0987.$$

∴ Proporția de componente care vor ceda între 850 și 880 de ore de funcționare este

$$0{,}2340 - 0{,}0987 = 0{,}1353 \text{ adică } 13{,}53\%.$$

Notă. Această parte a exemplului ilustrează proporțiile dintre cele două valori aflate de aceeași parte a axei orizontale față de media aritmetică. Dacă cele două valori s-ar fi aflat de o parte și de alta a mediei aritmetice, cele două valori calculate pentru proporțiile respective ar fi fost *adunate.*

d) Această întrebare constituie reversul întrebărilor anterioare, dar se bazează pe aceleași principii. Problemele de mai înainte începeau cu media aritmetică și deviația standard, se calcula scorul Z și cu el se extrage valoarea din tabel. De data aceasta vom începe cu proporția și vom urma aceiași pași, dar în sens invers, pentru a găsi o nouă valoare a mediei aritmetice.

Dacă se impune ca nu mai mult de 10% dintre componente să cedeze înainte de 900 de ore de funcționare, rezultă că 90% din aria de sub grafic trebuie să fie mai mare de 900, așa cum se vede în fig. 4.9.

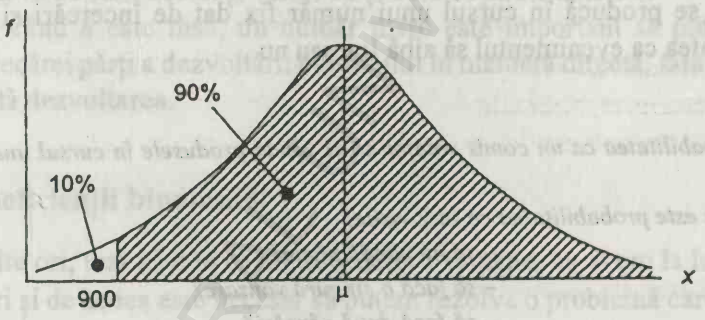


Fig. 4.9

Având în vedere faptul că tabelele dau valori numai pentru jumătate din reprezentarea grafică (cele două jumătăți fiind identice), va trebui să căutăm în tabel o valoare cât mai apropiată de 0,4 (rezultatul operației 0,9 – 0,5).

Așa cum puteți observa analizând tabelul, cea mai apropiată valoare de 0,4 este 0,3997. La această valoare, scorul Z este 1,28.

$$\text{Astfel } 1{,}28 = \left|\frac{\text{media} - 900}{80}\right|$$

$$\therefore 102{,}4 = \text{media} - 900$$

$$\therefore \text{media} = 1002{,}4 \text{ ore.}$$

Așadar, dacă durata medie de funcționare a componentelor ar fi de 1002,4 ore, cu o deviație standard de 80 ore, mai puțin de 10% dintre componente vor ceda înainte să împlinească 900 de ore de funcționare.

Consultați apendicele pentru o discuție mai amplă asupra tabelelor de distribuție.

16. Alte distribuții probabilistice

Distribuția binomică și distribuția lui Poisson sunt tot distribuții probabilistice, cu alte cuvinte descriu în mod direct probabilitatea frecvenței cerute de apariție/ producere a unui eveniment. Distribuția binomică și distribuția lui Poisson descriu comportamentul atributelor *deciziilor,* cum ar fi succesul sau eșecul, bun sau rău, negru sau alb, în timp ce distribuția normală descrie comportarea variabilelor sau a mărimilor, cum ar fi: înălțimea, greutatea, durata vieții etc. Distribuția binomică și distribuția lui Poisson sunt distribuții discrete, deosebindu-se și prin aceasta de distribuția normală, care este continuă.

17. Distribuția binomică

Distribuția binomică este utilă în rezolvarea problemelor în care ne confruntăm cu necesitatea calculării numărului de ocazii în care un eveniment poate să se producă sau să nu se producă în cursul unui număr fix dat de încercări și prin aceasta, probabilitatea ca evenimentul să aibă loc sau nu.

Exemplu

Probabilitatea ca un comis voiajor să-și vândă produsele în cursul unei singure vizite este de 0,2.

Care este probabilitatea ca în 2 vizite:

– să nu vândă nimic?

– să facă o singură vânzare?

– să facă două vânzări?

Soluția

Considerăm p = probabilitatea de vânzare – 0,2

Considerăm q = probabilitatea de a nu vinde = 1– 0,2 = 0,8.

Rezultatele posibile ale celor două vizite sunt următoarele:

Vizita 1	Vizita 2	Probabilitățile
Vinde	Vinde	$p \times p = p^2 = 0{,}2^2 = 0{,}04$
Vinde	Nu vinde	$p \times q = 0{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}16$
Nu vinde	Vinde	$q \times p = 0{,}8 \times 0{,}2 = 0{,}16$
Nu vinde	Nu vinde	$q \times q = q^2 = 0{,}8^2 = 0{,}64$
		1,00

Așadar P(să nu vândă) = 0,64.

P(unei vânzări) = 0,32 (0,16 + 0,16).

P(a două vânzări) = 0,04.

În cazul acestui exemplu a fost simplu să notăm fiecare posibilitate în parte, dar în cazul în care avem de-a face cu numere mari de încercări (de exemplu un număr mare de vizite) acest proces ar deveni greoi și incomod.

Din fericire, există o abordare mai simplă și anume, prin dezvoltarea expresiei binomice de forma generală:

$$(p + q)^n,$$

unde: p este probabilitatea ca un eveniment să aibă loc;
q – probabilitatea ca un eveniment să nu aibă loc;
n – numărul de încercări.

În exemplul de mai înainte, p = probabilitatea de a se face o vânzare (0,2) și q = probabilitatea de a nu se face nici o vânzare (0,8), iar n = numărul de vizite (2).

Folosim dezvoltarea binomului pentru a confirma probabilitățile.

$$\begin{aligned} \therefore (p + q)^2 &= p^2 + 2pq + q^2 \\ &= 0{,}2^2 + 2(0{,}2 \times 0{,}8) + 0{,}8^2 \\ &= 0{,}04 + 0{,}32 + 0{,}64. \end{aligned}$$

Se observă că sunt aceleași valori ca și cele obținute anterior.

Atunci când n este însă, un număr mare este important să putem calcula coeficienții fiecărei părți a dezvoltării binomului în manieră directă, fără a fi obligați să scriem toată dezvoltarea.

18. Coeficienții binomului

De multe ori, mai ales în cazul diferitelor examene, nu avem la îndemână un tabel de valori și de aceea este necesar să putem rezolva o problemă care se rezumă la un binom, pornind de la datele primite și fără alt ajutor.

Să presupunem că se cere transcrierea întregii dezvoltări pentru următorul binom: $(p + q)^5$.

Primul pas constă în transcrierea succesiunii de termeni ai dezvoltării:

$$(p^5) + (p^4q) + (p^3q^2) + (p^2q^3) + (pq^4) + (q^5).$$

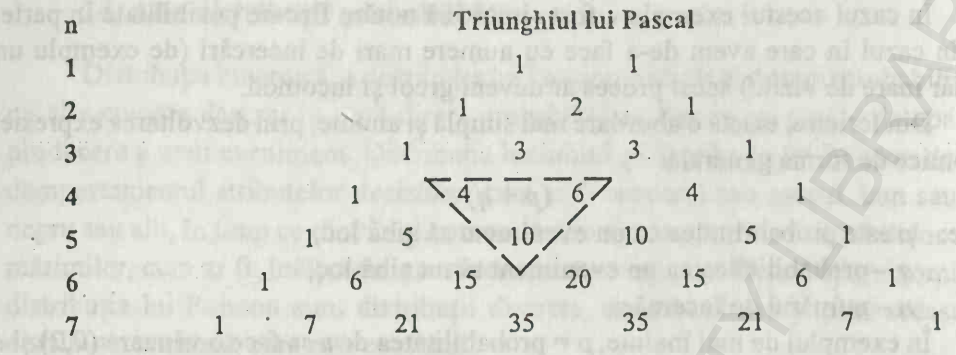
Se observă că:

• numărul termenilor (adică 6, în acest caz) este cu o unitate mai mare decât valoarea lui n (care în acest caz era 5).

• indicele de putere al lui p începe cu n (5 în acest caz) scăzând de la o paranteză la alta, în timp ce indicele de putere al lui q crește.

• indicii de putere ai lui p și q din fiecare paranteză, adunați dau aceeași sumă (respectiv egală cu n și anume 5).

Următorul pas constă în calcularea coeficientului fiecărui termen, respectiv a valorii din fața fiecărei paranteze. Acest lucru se poate realiza folosind *triunghiul lui Pascal* sau prin *formula combinațiilor*.



și așa mai departe pentru valori tot mai mari ale lui *n*.

Numerele de pe fiecare linie se obțin prin adunarea numerelor adiacente de pe linia de deasupra, așa cum arată și triunghiul punctat din figură. Observați faptul că valorile sunt simetrice pe fiecare linie și că pe fiecare linie există un termen mai mult decât valoarea lui *n* corespunzătoare liniei respective. Coeficienții dezvoltării binomului pot fi citiți din triunghi, din dreptul valorii corespunzătoare a lui *n*. Astfel, dacă *n* este 5, ca în exemplul nostru, coeficienții sunt:

1 5 10 10 5 1

Astfel, dezvoltarea lui $(p+q)^5$ este

$$p^5 + 5(p^4q) + 10(p^3q^2) + 10(p^2q^3) + 5(pq^4) + q^5.$$

19. Formula combinației

Deși este convenabil pentru valori mici ale lui *n*, triunghiul lui Pascal devine incomod la valori mari, caz în care poate fi folosită formula de calcul a combinațiilor, cu egală ușurință, pentru orice valoare a lui *n*.

Forma generală a formulei de calcul a combinațiilor, prezentată în capitolul 2, ne permite să găsim un număr de combinații de *r* elemente luate câte *n*.

Aplicând formula de calcul a combinațiilor pentru a găsi coeficienții pentru exemplul ales, $(p+q)^5$, vom obține următoarele valori:

$$\binom{5}{0} \text{ sau } C_0^5 = \frac{5!}{0!\times(5!-0!)} \quad \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = 1$$

(notă: $0! = 1$)

$$\binom{5}{1} \text{ sau } C_1^5 = \frac{5!}{1!\times(5!-1!)} \quad \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 5$$

$$\binom{5}{2} \text{ sau } C_2^5 = \frac{5!}{2!\times(5!-2!)} \quad \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\times3\cdot2\cdot1} = 10$$

$$\binom{5}{3} \text{ sau } C_3^5 = \frac{5!}{3!\times(5!-3!)} \quad \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\times2\cdot1} = 10$$

$$\binom{5}{4} \text{ sau } C_4^5 = \frac{5!}{4!\times(5!-4!)} \quad \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{4\cdot3\cdot2\cdot1\times1} = 5$$

$$\binom{5}{5} \text{ sau } C_5^5 = \frac{5!}{5!\times(5!-5!)} \quad \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = 1$$

Avantajul aplicării formulei de calcul a combinațiilor constă în aceea că nu este necesară calcularea întregii dezvoltări în cazul în care se cere doar o singură valoare. De exemplu, să presupune că probabilitatea favorabilă este de 0,8 și probabilitatea nefavorabilă este de 0,2. Care este probabilitatea ca dintr-un grup de 12 evenimente, 10 să fie favorabile?

Practic, această problemă presupune calcularea unei singure probabilități din dezvoltarea binomului și anume

$$x(p^{10}q^2),$$

unde x este coeficientul corespunzător termenului $(p^{10}q^2)$ al dezvoltării binomului, p este probabilitatea favorabilă, iar q este probabilitatea nefavorabilă.

Pentru a calcula coeficientul x, aplicăm formula:

$$C_{10}^{12} = \frac{12!}{10!\times(12-10)!} = \frac{12\times11}{2} = 66.$$

Așadar, probabilitatea de a avea 10 evenimente favorabile dintr-un tabel de 12 este:

$$66(0{,}8^{10} \times 0{,}2^2) = 0{,}2834, \text{ adică } 28{,}34\%.$$

20. Media aritmetică și deviația standard a distribuției binomice

Media aritmetică a unei distribuții binomiale se găsește făcând produsul dintre p – probabilitatea evenimentului care ne interesează și n – numărul de încercări, respectiv

$$\text{Media} = np.$$

Această valoare este egală cu valoarea preconizată, discutată în capitolul 2.

Varianța distribuției binomiale se calculează astfel:

$$\text{Varianța} = npq, \text{ astfel încât deviația standard va fi}$$

$$\sigma = \sqrt{npq}.$$

Exemplu

Să presupunem că avem aceleași date ca în problema de la paragraful 19, respectiv un eșantion de 12 posibilități cu o probabilitate pozitivă de 0,8; se cere să se calculeze care este numărul estimat de evenimente pozitive din cele 12 posibilități și deviația standard.

Soluția

Numărul estimat de evenimente pozitive este: $np = 12 \times 0,8 = 9,6$.

Deviația standard este: $\sqrt{npq} = \sqrt{12 \times 0,8 \times 0,2} = 1,386$.

21. Caracteristicile distribuției binomice

a) Este o distribuție discretă a posibilităților de producere a unui eveniment cu două efecte – succes sau eșec; bun sau rău.

b) Încercările trebuie să fie independente unele de altele. Această presupunere implică alegerea unui eșantion dintr-o populație infinită de date primare. Eșantioanele cu înlocuitori îndeplinesc această cerință, în timp ce atunci când se aleg eșantioane fără înlocuitori, distribuția binomică este utilă numai dacă este formată din mai puțin de 20 de elemente.

c) Când numărul de încercări crește și dacă $p \approx 0,5$, distribuția binomică tinde spre distribuția normală. Pentru ca distribuția normală să consituie o aproximare acceptabilă, trebuie ca $np > 5$.

d) Principalii parametri ai distribuției binomiale sunt:

$$\mu = np,$$

$$\sigma = \sqrt{npq},$$

$$\text{Deviația standard} = \frac{q - p}{\sqrt{npq}}.$$

22. Un exemplu practic de utilizare a distribuției binomiale

Exemplu

Anumite componente sunt ambalate în containere de câte 100 de bucăți. După inspectarea unui mare număr de containere, numărul mediu de componente defecte descoperite este de 10, cu o deviație standard de 3. Presupunând că producția continuă în aceleași condiții, cu deosebirea că ambalarea componentelor se face în containere de câte 300 de bucăți se cere:

a) care va fi numărul mediu de componente defecte descoperite în fiecare container mare?

b) care va fi deviația standard a numărului de componente defecte pentru fiecare container mare?

c) câte componente ar trebui ambalate într-un container, astfel încât deviația standard a numărului de componente defecte să fie 1% din totalul componentelor dintr-un container?

Soluția

Proporția componentelor defecte $= \frac{13}{100} = 0,1$.

Proporția de componente bune $= 1 - 0,1 = 0,9$.

Media aritmetică $= np = 100 \times 0,1 = 10$ componente defecte în medie.

Deviația standard $= \sqrt{npq} = \sqrt{100 \times 0,1 \times 0,9} = 3$.

Se confirmă așadar, valorile indicate în formularea problemei.

a) În cazul containerelor mari de 300 de bucăți:

$\therefore n = 300$

$\therefore$ numărul mediu de componente defecte $= 300 \times 0,1 = 30$.

b) Deviația standard devine

$$\sqrt{npq} = \sqrt{300 \times 0,1 \times 0,9} = 5,2.$$

c) Pentru ca deviația standard să fie de 1% din total:

$$\therefore \sqrt{npq} = \frac{n}{100},$$

$$\therefore \sqrt{n \times 0,1 \times 0,9} = \frac{n}{100},$$

$$\therefore n \times 0,1 \times 0,9 = \frac{n^2}{10.000},$$

$$900n = n^2,$$

$$900 = \frac{n^2}{n} = n.$$

$\therefore$ Fiecare container ar trebui să conțină 900 de bucăți.

23. Aproximația normală pentru distribuția binomială

Ca o generalizare mai largă, este corectă folosirea aproximației normale pentru distribuția binomială, în următoarele condiții:

– dacă $np > 5$ când $p < 0,5$;

– dacă $nq < 5$ când $p > 0,5$.

Atunci când sunt folosite proporțiile în locul valorilor absolute, formulele prezentate anterior nu se mai pot aplica, rămânând valabile numai următoarele relații:

– media aritmetică a populației $= \mu = p$;

$$\text{Deviația standard} = \sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}}.$$

Exemplu

Din datele culese anterior, se știe că 60% dintre studenți trec examenele din prima sesiune. Folosind aproximația normală a distribuției binomiale, se cere să se calculeze probabilitatea ca cel puțin 65% dintr-un grup de 200 de studenți să treacă examenele din prima sesiune.

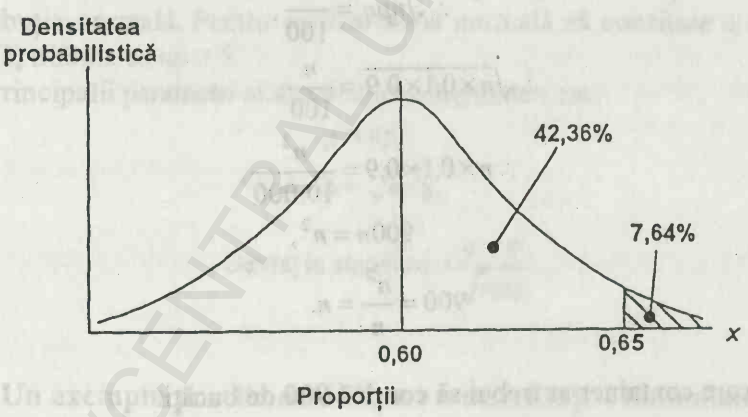
Soluția

$$p = 0{,}6;\ q = 1 - p = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}6 \times 0{,}4}{200}} = 0{,}035$$

$$z = \frac{0{,}65 - 0{,}60}{0{,}035} = 1{,}43, \text{ ceea ce înseamnă } 0{,}4236 \text{ sau } 42{,}36\%,$$

conform tabelului I. Aceasta înseamnă că există o șansă de (0,5 – 0,4236) = 0,0764 = 7,64% ca 65% dintre studenți să treacă examenele în prima sesiune. Reprezentarea grafică este următoarea:



24. Distribuția Poisson

Există situații în care distribuția binomică nu poate fi folosită pentru a fi calculată probabilitatea de producere a unui fenomen de 0, 1, 2, 3 etc. ori în cursul unui număr de încercări, deoarece valorile lui n și p nu sunt cunoscute. De exemplu, putem ști că pe o anumită porțiune de autostradă au avut loc 6 accidente într-un an. Cu toate acestea, nu putem exprima numărul 6 sub o formă procentuală deoarece nu cunoaștem valoarea lui n – numărul total de posibilități de producere a accidentelor rutiere pe porțiunea respectivă. De aici rezultă că termenul q, adică probabilitatea ca un accident să nu se producă, nu mai are sens.

Tot ceea ce putem afirma este că „n", numărul posibilităților de producere a accidentelor este infinit și că numărul accidentelor care au loc efectiv este relativ redus, din moment ce „p" – probabilitatea producerii unui accident este mică.

În asemenea situații (când n tinde la infinit, iar p este mic) se poate aplica regula de distribuție a lui Poisson.

Această regulă este o varietate de distribuție discretă, derivată din distribuția binomială. Distribuția Poisson poate fi aplicată fără a se cunoaște valorile lui n și p și se bazează numai pe valoarea medie a distribuției. Astfel, dacă știm numărul mediu reprezentând ocaziile în care s-a produs un eveniment într-un anumit interval de timp, atunci probabilitatea ca acel eveniment să se producă de 0, 1, 2, 3 etc ori este dată de termenii succesivi ai dezvoltării:

$$\frac{e^{-m}}{0!}+\frac{me^{-m}}{1!}+\frac{m^2e^{-m}}{2!}+\frac{m^3e^{-m}}{3!}\ldots$$

unde e = 2,718 este o constantă și m = media evenimentelor pe o perioadă.

De exemplu, la nivelul unei divizii de transport are loc, în medie, o defecțiune pe săptămână care impune ca un vehicul să fie supus unor reparații.

Care este programul preconizat de reparații pe o perioadă de 100 de săptămâni?

m = nr. mediu pe săptămână = 1

Nr. reparații	Probabilitatea	Programul de reparații pentru 100 de săptămâni
0	$\frac{e^{-m}}{0!}=\frac{2{,}718^{-1}}{1}=\frac{1}{2{,}718}=0{,}3679$	$0{,}3679\times 100$ = 37 săptămâni fără reparații
1	$\frac{me^{-m}}{1!}=\frac{1\times 2{,}718^{-1}}{1}=\frac{1}{2{,}718}=0{,}3679$	$0{,}3679\times 100$ = 37 săptămâni cu o reparație
2	$\frac{m^2e^{-m}}{2!}=\frac{1^2\times 2{,}718^{-1}}{2\times 1}=\frac{1}{5{,}436}=0{,}1840$	$0{,}184\times 100$ = 18 săptămâni cu două reparații
3	$\frac{m^3e^{-m}}{3!}=\frac{1^3\times 2{,}718^{-1}}{3\times 2\times 1}=0{,}0613$	$0{,}0613\times 100$ = 6 săptămâni cu trei reparații
4	$\frac{m^4e^{-m}}{4!}=\frac{1^4\times 2{,}718^{-1}}{4\times 3\times 2\times 1}=0{,}0153$	$0{,}0153\times 100$ = 2 săptămâni cu patru reparații
5	$\frac{m^5e^{-m}}{5!}=\frac{1^5\times 2{,}718^{-1}}{5\times 4\times 3\times 2\times 1}=0{,}0036$	$0{,}0036\times 100$ = variantă fără importanță
	Total probabilitate = 1,00	Total săptămâni = 100

Se va vedea că probabilitatea calculată cu ajutorul formulei de distribuție a lui Poisson devine tot mai redusă cu fiecare termen calculat, tinzând spre zero, dar fără să-l atingă.

Aceste calcule sunt de asemenea foarte laborioase și plictisitoare, motiv pentru care există tabele antecalculate pentru probabilități Poisson, pentru orice valoare a lui m. Aceste tabele dau valori individuale sau cumulate pentru probabilitățile respective, tabelul VI cuprinzând câte un rezumat al fiecărui tip de tabel.

25. Derivația standard a distribuției Poisson

Acesta este un exemplu de simplitate deosebită.

Varianța distribuției Poisson este egală cu media aritmetică, iar deviația standard este egală cu rădăcina pătrată a mediei aritmetice, respectiv

$$\text{varianța} = m,$$

$$\text{deviația standard} = \sqrt{m},$$

unde m este media aritmetică a distribuției Poisson.

26. Caracteristicile distribuției Poisson

a) Este o distribuție discretă și este o formă redusă a distribuției binomice pentru cazurile în care n este mare, iar p sau q sunt mici.

b) Media aritmetică este egală cu varianța.

c) De obicei prezintă o deviere/asimetrie pozitivă, dar în nici un caz nu poate prezenta o deviere/asimetrie negativă.

d) Asimetria standardizată se stabilește cu ajutorul relației $\frac{1}{\sqrt{m}}$ unde m este media aritmetică.

e) Atunci când n ia valori foarte mari, distribuția Poisson poate fi aproximată cu distribuția normală.

f) Media aritmetică = np.

27. Aplicațiile distribuției Poisson

Distribuția Poisson este similară distribuției binomice, dar se aplică atunci când n, numărul de evenimente are valori mari sau este necunoscut, iar p, probabilitatea producerii unui eveniment este foarte mică comparativ cu q, probabilitatea ca evenimentul să nu se producă. Regula principală este aceea că distribuția Poisson se aplică pentru n mai mare de 50 și np, media aritmetică mai mică decât 5. Vom da în continuare câteva exemple, dar este important să se înțeleagă că distribuția Poisson

se aplică numai în cazul evenimentelor care se produc cu totul întâmplător, independente unele de celelalte.

Exemplu

Clienții unui punct service se prezintă la intervale aleatorii cu o medie de 30 de persoane pe oră. Folosind distribuția Poisson se cere să se afle probabilitatea ca:

a) să nu sosească nici un client într-un minut;

b) să sosească exact câte un client pe minut;

c) să sosească doi sau mai mulți clienți într-un minut;

d) să sosească trei sau mai puțini clienți într-un minut.

Soluția

Intervalul de timp folosit este un minut, cu o medie aritmetică de $\frac{30}{60} = 0{,}5$.

a) P(nici un client) = 0,6065 din tabelul VI(a)

b) P(1 client) = 0,3033 din tabelul VI(a)

c) P(2 sau mai mulți clienți) = 1 – 0,9098
= 0,0902

Valoarea 0,9098 reprezintă probabilitatea cumulată ca un client sau nici un client să nu sosească într-un minut și este luată din tabelul VI(b). Deoarece suma probabilităților fiecărui număr posibil de sosiri în decursul unui minut este egal cu 1, probabilitatea sosirii a 2 sau mai mulți clienți simultan este 1 – P (1 sau mai puțini).

d) P(3 sau mai puțini) = 0,9982 din tabelul VI(b).

Exemplu

O firmă cumpără arcuri în cantități foarte mari, știindu-se din experiență că 0,2% sunt defecte. Departamentul de inspecție grupează loturi de câte 500 de bucăți. Se cere stabilirea unui standard pentru inspectori, astfel încât dacă într-un lot se găsește un număr de arcuri defecte mai mare decât numărul standard, întregul lot livrat poate fi respins, având siguranța în proporție de cel puțin 90% că acesta era într-adevăr rebutat.

Ce număr de arcuri defecte la un eșantion trebuie considerate ca standard de respingere?

Soluția

Avem 0,2% rebuturi și loturi de verificare de câte 500 de bucăți.

$$m = 500 \times \frac{0{,}2}{100} = 1$$

Pentru a găsi probabilitatea ca 0, 1, 2, 3 etc. sau mai multe bucăți defecte să fie găsite într-un lot, se deduc, cu ajutorul tabelului VI(b), probabilitățile pornind de la valoarea 1, după cum urmează:

P(0 sau mai multe defecte) = siguranță = 1

P(1 sau mai multe defecte) = 1 – 0,3679 = 0,6321

P(2 sau mai multe defecte) = 1 – 0,7358 = 0,2642

P(3 sau mai multe defecte) = 1 – 0,9197 = 0,0803

P(4 sau mai multe defecte) = 1 – 0,9810 = 0,0190

Aceste probabilități semnifică, de exemplu, faptul că există 26,42% șanse ca 2 sau mai multe arcuri defecte să fie descoperite într-un lot de 500 de bucăți cu o incidență a rebuturilor de 0,2%. Așadar, dacă se vor refuza eșantioanele cu 2 sau mai multe bucăți defecte, există o siguranță de 73,58% (1 – 0,2642) că întreaga cantitate livrată este defectă.

Deoarece firma dorește să aibă un grad de siguranță de minim 90%, standardul ar trebui stabilit la 3 sau mai multe arcuri defecte descoperite într-un lot. Această situație este posibilă în numai 8,03% din cazuri, astfel încât firma poate fi sigură 91,97% că lotul primit este realmente rebutat.

28. Sugestii/ponturi în legătură cu tipul de distribuție care se aplică în diverse situații

Nu este întotdeauna simplu de recunoscut situații în care se pot aplica diversele tipuri de distribuții (normală, binomică sau Poisson). Următoarele sugestii/ponturi se pot dovedi utile:

Distribuția binomică:

a) Efectele au valori discrete și nu există intervale continue de valori posibile. De exemplu, în cazul în care este vorba despre oameni, nu pot exista decât valori discrete: 1, 2, 3 etc. Nu putem avea 2,35 oameni.

b) Când nu sunt decât două situații posibile: bun/rău, negru/alb, masculin/feminin, acceptabil/inacceptabil etc.

c) Când probabilitatea ca un element să aibă două calități posibile este p, astfel încât probabilitatea ca elementul să aibă o altă calitate este $(1 - p)$. De regulă, $(1 - p)$ se notează q, astfel încât $(p + q) = 1$.

d) Atunci când numărul de elemente, n este mare, iar p nu este situat în apropierea valorilor 0 sau 1, astfel încât distribuția este aproximativ simetrică, probabilitățile binomiale pot fi aproximate folosind distribuția normală cu aceeași medie aritmetică ($\mu = np$) și deviație standard ($\sigma = \sqrt{npq}$)

Distribuția Poisson

La fel ca și distribuția binomială, are proprietatea că se aplică în cazul evenimentelor care se produc rar.

a) Când numărul de elemente n este mare; prin convenție, mai mare de 50.

b) p este mic comparativ cu q astfel încât np (media aritmetică a distribuției Poisson) este mai mică decât să spunem 5.

Distribuția normală

Cel mai frecvent tip de distribuție probabilistică aplicat.

a) Se aplică variabilelor cu intervale continue de valori; ca de exemplu timpul, greutățile, distanțele, dimensiunile, ratele de creștere etc.

b) Se aplică și atunci când ne confruntăm cu cantități mari, chiar dacă este vorba despre variabilele cu valori discrete (a se vedea note de la distribuția binomială, punctul d).

29. Rezumat

a) Analiza statistică este procesul de analizare a datelor primare din care rezultă informații utile.

b) Distribuția frecvențială arată numărul manifestărilor pentru fiecare valoare variabilă.

c) Datele primare discrete au valori distincte, din care sunt excluse orice valori intermediare, pe când datele primare continue pot avea orice valoare.

d) Principalele mărimi folosite pentru rezumarea distribuțiilor sunt: mediile, dispersia, devierea și forma vârfului.

e) Cea mai folosită medie este media aritmetică și cea mai utilă mărime pentru dispersie este deviația standard. Coeficientul de variație stabilește un raport între aceste două mărimi rezultând o măsură a dispersiei relative.

f) Curba normală reprezintă graficul distribuției continue, are formă de clopot, perfect simetrică, media aritmetică și deviația standard fiind mărimile care o descriu complet.

g) Tabelul I, valorile numerice ale suprafețelor de sub curba normală, cuprinde procentele reprezentând suprafețele dintre curba normală și axa orizontală, în funcție de numărul de deviații standard cu care un punct de pe axă este deplasat față de media aritmetică. Numărul de deviații standard față de media aritmetică poartă denumirea de variație standardizată sau „scorul Z".

h) Distribuția binomică și distribuția Poisson sunt distribuții de probabilități discrete care descriu comportamentul unor atribute cum ar fi: bun sau rău, negru sau alb.

i) Formula generală pentru binomuri este $(p + q)^n$, iar dezvoltarea acestei formule care se poate face folosind triunghiul lui Pascal sau formula generală pentru combinații, are ca rezultat, rezultatul oricărei combinații posibile a elementelor p și q.

j) Media aritmetică și deviația standard pentru distribuția binomică sunt date de formulele np și respectiv, $\sqrt{npq}$.

k) În cazurile în care $np > 5$, cu $p < 0{,}5$ sau $nq > 5$ cu $p > 0{,}5$ aproximația normală poate fi preferată celei binomice.

l) Când n tinde la infinit și p tinde la zero, se folosește distribuția Poisson, chiar și în cazurile în care valorile lui n și p sunt necunoscute, cunoscându-se numai valoarea mediei aritmetice.

m) Valoarea variantei în cazul distribuției Poisson este egală cu media aritmetică, adică: varianța = m, deviația standard = $\sqrt{m}$, unde m este media artimetică pentru

distribuția Poisson. Când *n* tinde la infinit, distribuția Poisson devine aproximativ egală cu distribuția normală.

30. De reținut

a) Punctele situate la $+1\sigma$ și -1σ de punctul mediei aritmetice al curbei normale constituie punctele de inflexiune ale curbei.

b) Gruparea datelor primare ca în cazul distribuției frecvențiale ușurează foarte mult calculele, dar aceasta în detrimentul acurateței.

c) Deși deviația standard reprezintă de departe cea mai adecvată măsură pentru dispersie, în anumite cazuri rangul (diferența dintre valoarea cea mai mare și cea mai mică) și deviația medie sunt alte două mărimi care se pot dovedi foarte importante.

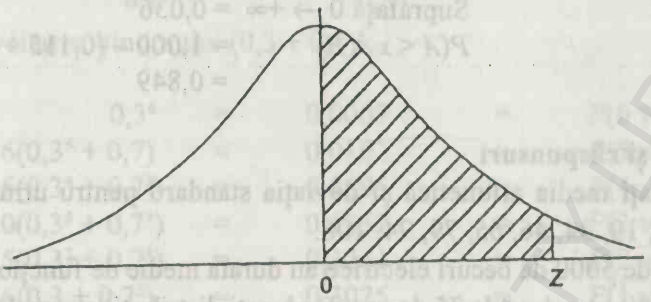
Întrebări de autocontrol *Numerele dintre paranteze se referă la numerotarea paragrafelor*

1. Ce înseamnă analiză statistică? (2)
2. Descrieți o distribuție frecvențială grupată. (3)
3. Faceți distincția între datele primare discrete și continue. (4)
4. Ce este poligonul frecvențelor? (5)
5. Care sunt cele patru caracteristici fundamentale ale distribuțiilor? (7)
6. Care este cea mai importantă măsură a tendinței centrale? (8)
7. Ce este dispersia și care este formula deviației standard? (9)
8. Care este măsura dispersiei relative? (10)
9. Desenați diagrame reprezentând deformarea pozitivă și negativă. (11)
10. Ce este curba de distribuție plată? (12)
11. Care sunt principalele caracteristici ale distribuției normale? (13)
12. Ce procent al suprafeței dintre curba normală și axa orizontală este cuprins între punctul mediu $\pm 1\sigma$? (14)
13. Definiți distribuția probabilistică. (16)
14. Care este forma generală a unui binom? (17)
15. Care sunt căile alternative de stabilire a coeficienților pentru termenii dezvoltării binomului? (18)
16. Care este formula pentru media unei distribuții binomice? Dar pentru deviația standard? (21)
17. Când se preferă aproximația normală celei binomice? (23)
18. Descrieți distribuția Poisson. (24)
19. Care sunt caracteristicile distribuției Poisson? (26)

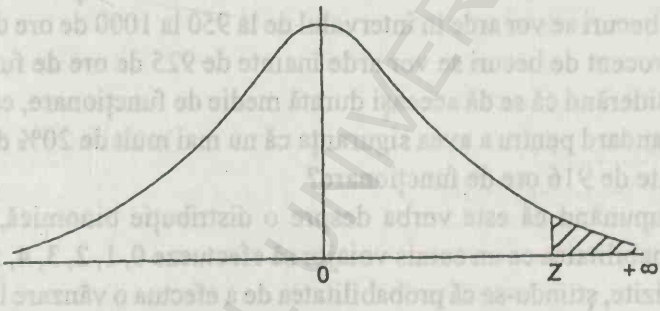
Apendice

Trebuie să se țină seamă de faptul că există mai multe moduri de alcătuire a tabelelor pentru distribuția normală.

Tabelul I se referă la suprafețele cuprinse între grafic și intervalul $(0; Z)$ de pe axa orizontală, după cum se poate observa în imaginea următoare.

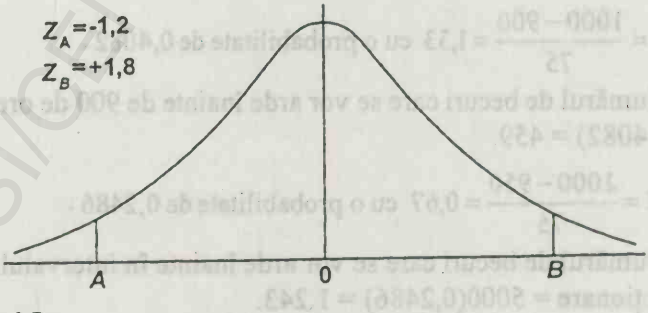


Tabelul II se referă la suprafețele cuprinse între grafic și intervalul $(Z; \infty)$ de pe axa orizontală, după cum se poate observa în imaginea următoare.



În mod evident, rezultatul unei probleme nu va diferi din cauza modului de alcătuire al tabelelor de valori, dar cititorul trebuie să fie în măsură să se poată servi de oricare dintre tabele.

De exemplu, în cazul diagramei de mai jos, se cere să se calculeze probabilitatea ca o valoare x să se afle pe axa orizontală în intervalul (A; B).



Din tabelul I:

$Z_A = -1{,}2$ Suprafața $0 \rightarrow A = 0{,}3849$

$Z_B = +1{,}8$ Suprafață $0 \rightarrow B = 0{,}4641$

de unde: $P(A < x < B) = 0{,}3849 + 0{,}4641$

$= 0{,}849$

Din tabelul II:

$Z_A = -1,2$	Suprafața $0 \rightarrow -\infty$	$= 0,115$
$Z_B = +1,8$	Suprafață $0 \rightarrow +\infty$	$= 0,036$
de unde:	$P(A < x < B)$	$= 1,000 - (0,115 + 0,036)$
		$= 0,849$

Exerciții și răspunsuri

1. Calculați media aritmetică și deviația standard pentru următoarele date primare: 12, 15, 19, 34, 46, 65, 79, 94, 108.

2. Un lot de 5000 de becuri electrice au durata medie de funcționare de 1000 de ore și o deviație standard de 75 de ore. Deduceți distribuția normală pentru acest caz.

a) Câte becuri se vor arde înainte de 900 de ore de funcționare?

b) Câte becuri se vor arde în intervalul de la 950 la 1000 de ore de funcționare?

c) Ce procent de becuri se vor arde înainte de 925 de ore de funcționare?

d) Considerând că se dă aceeași durată medie de funcționare, care ar trebui să fie deviația standard pentru a avea siguranța că nu mai mult de 20% dintre becuri se vor arde înainte de 916 ore de funcționare?

3. Presupunând că este vorba despre o distribuție binomică, se cere să se calculeze probabilitatea ca un comis voiajor să efectueze 0, 1, 2, 3, 4, 5 sau 6 vânzări în cursul a 6 vizite, știindu-se că probabilitatea de a efectua o vânzare la fiecare vizită este de 0,3?

Nu se vor folosi tabelele pentru aflarea rezultatului.

Răspunsuri

1. $\bar{x} = 52,44 \qquad \sigma = 33,68.$

2. a) $Z = \dfrac{1000 - 900}{75} = 1,33$ cu o probabilitate de 0,4082.

$\therefore$ Numărul de becuri care se vor arde înainte de 900 de ore de funcționare $= 5000(0,5\text{-}0,4082) = 459.$

b) $Z = \dfrac{1000 - 950}{75} = 0,67$ cu o probabilitate de 0,2486.

$\therefore$ Numărul de becuri care se vor arde înainte în intervalul de 950 și 1000 de ore de funcționare $= 5000(0,2486) = 1.243.$

c) $Z = \dfrac{1000 - 925}{75} = 1$ cu o probabilitate de 0,3413.

$\therefore$ Numărul de becuri care se vor arde înainte de 925 de ore de funcționare $= 0,5 - 0,3413 = 15,57\%.$

d) Din tabele se găsește o probabilitate de 0,3(0,5 – 0,2), cu un scor Z de 0,84.

Astfel, $0{,}84 = \dfrac{1000 - 916}{\text{d.s.}^*}$ $\therefore \text{d.s.} = \dfrac{84}{0{,}84} = 100.$

3. Dezvoltarea binomului $(0{,}3 + 0{,}7)^6$:

$0{,}3^6$	=	0,0007	=	P(6 vânzări)
$6(0{,}3^5 + 0{,}7)$	=	0,0102	=	P(5 vânzări)
$15(0{,}3^4 + 0{,}7^2)$	=	0,0595	=	P(4 vânzări)
$20(0{,}3^3 + 0{,}7^3)$	=	0,1852	=	P(3 vânzări)
$15(0{,}3^2 + 0{,}7^4)$	=	0,3241	=	P(2 vânzări)
$6(0{,}3 + 0{,}7^5)$	=	0,3025	=	P(1 vânzare)
$0{,}7^6$	=	0,1176	=	P(0 vânzări)

*d.s. – distribuție statistică

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

5. STATISTICĂ – DEDUCȚIA STATISTICĂ

1. Obiective:

După parcurgerea acestui capitol:

- veți ști ce se înțelege prin deducție statistică;
- veți cunoaște principalele caracteristici ale diferitelor metode de testare, cum sunt: testările aleatorie, sistematică, stratificată, procentuală;
- veți putea calcula și folosi eroarea standard a mediei;
- veți înțelege principiile limitei de certitudine;
- veți putea folosi factorul de corecție pentru populații finite;
- veți ști cum se face estimarea proporțiilor populațiilor de date primare;
- veți înțelege când și în ce fel poate fi utilizată distribuția „t" a lui Student.

2. Definiția deducției statistice

Deducția statistică poate fi definită ca procesul prin care se trag concluziile asupra unei mărimi sau a unui atribut al unei populații (de exemplu media sau deviația standard) pe baza analizei datelor primare obținute prin testări. Deducția statistică reprezintă o arie importantă de aplicare a teoriei statistice, constituind obiectul unei multitudini de întrebări de examene.

Există o multitudine de motive pentur efectuarea de testări pe diverse eșantioane, astfel încât să se ajungă la concluzii valabile pentru întreaga populație de date. De exemplu, dacă ar fi necesară evaluarea greutății medii a populației adulte a Marii Britanii, ar fi foarte puțin practic (pentru a nu mai menționa costurile) să fie cântărită, în parte, fiecare persoană de vârstă adultă, calculându-se apoi greutatea medie. Mai simplu este să se aleagă un eșantion reprezentativ, problema rezolvându-se simplu, prin cântărirea persoanelor respective și apoi calcularea greutății medii. Există și cazuri în care măsurătorile sau procesul de testare este distructiv, astfel încât testarea eșantioanelor este singura metodă fezabilă. De exemplu, n-ar avea nici un rost ca un producător de becuri electrice să testeze toate becurile pe care le produce pentru a stabili durata medie de funcționare a becurilor sale.

Testarea eșantioanelor este mai ieftină, mai rapidă și, adeseori, singura metodă favorabilă de culegere a informațiilor despre populațiile de date. Tipul de eșantion

ales este numit eșantion aleator (uneori "eșantion probabilistic") și are proprietatea că fiecare element al său are aceeași probabilitate de a fi ales.

Termenul "aleator" nu trebuie înțeles ca "întâmplător". Selectarea aleatorie se face după o serie de norme stabilite în condiții obiective, adeseori după tabele de numere aleatorii sau pe baza unor programe de calculator de generare de numere aleatorii. Deși metoda de testare a eșantioanelor aleatorii simple este rareori folosită singură în condiții reale, ea are o importanță specială, deoarece constituie baza unor sisteme mai complexe de testare și pentru că ilustrează cel mai bine procesul de testare.

3. Testarea

Testarea eșantioanelor reprezintă procesul de examinare a unui număr reprezentativ de elemente (oameni, obiecte, cifre) extrase dintr-o populație sau univers întreg de date primare. Scopul testării eșantioanelor constă în descoperirea unor trăsături sau atribute ale întregii populații extrapolate de la caracteristicile elementelor eșantioanelor respective. De exemplu, este posibil să fie necesară o estimare a mediei aritmetice sau a deviației standard pentru o populație de date sau stabilirea tipului de distribuție (Poisson, normală sau așa mai departe) care poate fi aplicată populației respective de date primare. Eșantionul oferă numai posibilitatea estimării caracteristicilor populației respective, acuratețea acestei estimări depinzând de:

a) mărimea eșantionului. În general, cu cât eșantionul este mai mare, cu atât mai mare este și probabilitatea ca el să fie într-adevăr reprezentativ pentru populația de date respectivă;

b) modul de selectare a elementelor eșantionului;

c) de nivelul de variabilitate al populației.

În practică, planificarea și operarea testărilor pe eșantioane este o problemă foarte complexă și tehnică, însă condiția fundamentală este selecționarea unui eșantion cât mai reprezentativ cu putință, evitându-se ideile preconcepute, la prețuri de cost realiste.

Eșantionul aleator pur, cu alte cuvinte eșantionul ale cărui elemente aveau probabilitățile identice de a fi alese, este cel mai bun model teoretic pentru testare, dar și pentru alegerea sa este necesar un suport. Acest suport de alegere a eșantionului poate fi o listă a elementelor sau membrilor populației de date primare. Astfel, dacă s-ar solicita alegerea unui eșantion de plătitori de impozite la nivelul unui district, suportul alegerii eșantionului ar fi registrul fiscal întocmit și ținut de autoritatea locală. În practică, de multe ori este foarte greu sau imposibil de asigurat un suport de alegere a eșantionului, deoarece:

a) Chiar și în cazurile în care există liste întocmite acestea pot fi inexacte sau depășite moral.

b) Există o multitudine de sisteme pentru care nu se poate obține sau crea un suport pentru alegerea eșantionului. De exemplu, un producător de bere dorește o testare pe un eșantion de băutori de bere tare, germană. Cum ar putea fi creat un suport de alegere a eșantionului în acest caz? Răspunsul este „nu este posibil!"

c) Populația de date primare se poate afla în continuă creștere și schimbare.

d) Costurile creării unui suport de alegere a eșantionului pot fi prohibitive, disproporționate față de beneficiul reprezentat de creșterea certitudinii în acuratețea estimărilor realizate pe baza respectivului eșantion.

Este necesar ca, în cazurile în care există deja un suport parțial pentru alegerea eșantionului, să se acționeze cu discernământ. De exemplu, dacă s-ar dori sondarea opiniei posesorilor de autovehicule într-o anumită chestiune, folosirea ca suport de alegere a eșantionului a listelor de membri ai cluburilor motocicliștilor și automobiliștilor nu ar duce la obținerea unui eșantion aleator. Aceasta din cauză că mulți posesori de autovehicule nu sunt membri ai nici unuia dintre aceste cluburi, fiind astfel automat excluși din populația din rândul căreia urmează să se facă alegerea eșantionului.

Datorită problemelor practice multiple care grevează acest subiect, au fost imaginate diverse metode de alegere quasi-aleatorie a eșantioanelor, acestea fiind actualmente larg utilizate.

4. Alegerea quasi-aleatorie a eșantioanelor

Diferitele metode care vor fi descrise în cuprinsul acestui paragraf tind să conducă la alegerea unor eșantioane reprezentative, fără a ține cont de limitările impuse de costuri și fezabilitate. Metodele quasi-aleatorii sunt:

Alegerea sistematică
Alegerea stratificată
Alegerea multifazică
Alegerea din grupuri constituite
Alegerea proporțională

Alegerea sistematică

Această metodă este utilizată în mod frecvent în cadrul controlului producției și a calității. Începând cu un moment aleator ales, se reține câte un produs la fiecare n produse realizate. Să presupunem că s-a hotărât verificarea fiecărui al o sutelea produs începând cu produsul numărul 67. Numerele produse reținute pentru verificări sunt:

67, 167, 267, 367 și așa mai departe.

Intervalul dintre elementele reținute pentru a forma eșantionul de testare se numește interval de selecție și este și el aleator.

În acest caz trebuie avut în vedere să nu existe un model regulat care, prin coincidență sau dimpotrivă, să influențeze alegerea elementelor pentru eșantionul de testare.

Alegerea stratificată

Este o metodă utilizată în mod curent atunci când populațiile de date primare pot fi împărțite în grupuri sau straturi.

Se aleg aleator elemente din fiecare grup, în proporții corespunzătoare proporțiilor cu care contribuie fiecare dintre aceste grupuri la constituirea populației luată ca întreg. De exemplu, să presupunem că se cere formarea unui eșantion de 100 de persoane ales dintr-un grup de spitale, al cărui număr total de salariați poate fi exprimat astfel:

Personal	Nr.	Proporții
Medici	200	10%
Asistente	600	30%
Personal auxiliar	800	40%
Personal administrativ	400	20%
	2000	100%

Pentru realizarea unui eșantion de 100 de persoane vor fi selectați după cum urmează:

Medici	10
Asistente	30
Personal auxiliar	40
Personal administrativ	20
	100

Alegerea multifazică

Reprezintă un sistem foarte practic, folosit pentru reducerea timpului total afectat călătoriilor de către persoane care iau interviuri, concomitent cu reducerea costurilor. Alegerea multifazică este asemănătoare alegerii stratificate, cu deosebirea că grupurile și subgrupurile sunt alese de această dată în funcție de poziția geografică/ localizarea lor și nu după o caracteristică socială oarecare. O țară poate fi împărțită în unități teritoriale mari, să spunem „zone", care pot fi stabilite aleator la un număr de 5. Din fiecare zonă va fi ales un eșantion aleator de (să zicem) 6 orașe, din care se vor alege eșantioane aleatorii de oameni care urmează să fie supuși interviului. Procesul stratificării poate continua dincolo de nivelul orașului, în funcție de omogenitatea populației acestuia.

Alegerea din grupuri constituite

Este un sistem foarte util, prin care se reduc semnificativ costurile de formare a eșantioanelor în cazurile în care nu există un suport satisfăcător de alegere a eșantionului. Se aleg aleator câteva areale geografice (sate sau străzi ale orașelor), după care sunt supuși interviului toți locuitorii din zonele alese.

Alegerea proporțională

Acest mod de formare a eșantionului nu se bazează pe nici o preselecție, elementele sale fiind alese pe loc de către operator. Pentru evitarea unei atitudini subiective a operatorului față de obiectul selecției, alegerea proporțională este

subîmpărțită în diferite categorii cum ar fi bărbați/femei, tineri/ bătrâni, salariați/ șomeri etc. Operatorului i se dau anumite proporții pentru fiecare categorie și aceasta are datoria să facă selecția cu discreție. Atunci când acest tip de alegere este aplicat defectuos, sistemul poate fi alterat în mod hotărâtor, astfel încât este necesar un control apropiat și verificarea muncii operatorului. Metoda este ieftină și destul de eficientă, fiind de aceea aplicată pe scară largă.

Prezentarea scurtă de mai înainte are rolul de a schița tipurile cele mai comune de constituire a eșantioanelor reprezentative; în cazurile în care acestea urmează să fie supuse unei analize statistice, se va preciza faptul că s-a lucrat cu un eșantion aleator. Într-un asemenea caz, se poate presupune că eșantionul este cu adevărat reprezentativ și liber de influențe.

5. Tipuri de deducții

Deducțiile statistice pot fi împărțite în două tipuri – *estimarea* și *testarea ipotetică.* Estimarea are ca obiect selectarea caracteristicilor populațiilor de date primare (cum ar fi media eșantionului și deviația standard). Caracteristicile populației sunt cunoscute sub denumirea de *parametrii populației,* în timp ce caracteristicile eșantionului sunt cunoscute sub denumirea de *statistica eșantionului.* În cursul acestui capitol ne vom ocupa și de estimare, în timp ce testarea ipotetică – respectiv procesul de elaborare a unei teorii sau ipoteze despre anumite caracteristici ale unei populații de date, după care se aleg eșantioane pentru a vedea dacă ipoteza este susținută sau nu – constituie subiectul capitolului imediat următor.

Inițial, se va presupune că toate eșantioanele cu care lucrăm sunt eșantioane *mari* (mai mari de 30 de elemente, să spunem) extrase dintr-o populație cu un număr infinit de elemente, sau că alegerea eșantionului s-a efectuat cu înlocuirea elementelor extrase din populație, ceea ce echivalează cu același lucru. Eșantioanele reduse și populațiile finite impun o abordare diferită, la care vom face referire ulterior.

6. Proprietățile bunilor estimatorilor

Există patru proprietăți care definesc un bun estimator:

a) *Lipsa ideilor preconcepute.* Se spune că un estimator este liber de idei preconcepute dacă media mediilor eșantioanelor sale $\bar{x}$ alese din toate eșantioanele de mărimea n, extrase dintr-o populație de mărimea N, este egală cu parametrul populației (μ). În acest fel, media distribuției mediilor eșantioanelor ar fi egală cu media populației.

b) *Consistența.* Un estimator este considerat consistent atunci când pe măsură ce mărimea eșantionului crește, precizia parametrilor de estimare a populației respective crește de asemenea.

c) *Eficiența.* Un estimator este considerat mai eficient decât un altul atunci când, pentru formarea mai multor eșantioane, varianța lui este mai mică.

d) *Suficiența.* Se spune că un estimator este suficient atunci când folosește toată informația pe care i-o asigură un eșantion reprezentativ pentru estimarea parametrului solicitat al populației.

Foarte rar, în condiții practice, avem toate valorile unei populații pentru a putea calcula parametrii populației respective. Invariabil, se aleg eșantioane tocmai pentru a avea o estimare a parametrilor populației. Pentru acest motiv, este necesar să se facă distincția între simbolurile folosite pentru statistica eșantioanelor și parametrii populațiilor, după cum urmează:

	Statistica eșantioanelor	Parametrii populației
Media aritmetică	$\bar{x}$	μ
Deviația standard	s	σ
Numărul de elemente	n	N

7. Estimarea mediei populației

Folosirea mediei eșantionului pentru deducerea mediei populației constituie o practică curentă în statistică.

Dacă se alege o serie de eșantioane de mărime n (unde $n \geq 30$), dintr-o anumită populație, se va descoperi că:

a) Media fiecărui eșantion este aproape egală cu media populației (dacă media unui eșantion este egală cu media populației avem de-a face cu o pură coincidență).

b) Mediile eșantioanelor sunt grupate mai aproape de valoarea mediei populației decât valorile originale inițiale.

c) Cu cât sunt mai mari eșantioanele, cu atât mai înghesuite sunt valorile mediilor lor în jurul valorii mediei populației.

d) Distribuția mediilor eșantioanelor urmează o curbă normală.

Ultima observație constituie și unul dintre aspectele așa-numitei *teoreme a limitei centrale*, care este cea mai importantă teoremă a statisticii. În esență, prin această teoremă se afirmă faptul că mediile eșantioanelor (ca și mediana și deviația standard) tind să fie distribuite normal pe măsura creșterii lui n, aproape indiferent de forma populației originale.

Teorema limitei centrale conferă distribuției normale locul-cheie care i se cuvine în teoria alegerii eșantioanelor.

Deoarece distribuția mediilor eșantioanelor este normală, sau foarte aproape de normal, ea poate fi descrisă complet prin media sa și deviația standard. Distribuția tuturor mediilor eșantioanelor posibile este cunoscută sub denumirea de distribuție pe eșantioane a mediei, iar deviația sa standard se numește *eroare standard*. Situația

aceasta este convenabilă, pentru că de câte ori auzim „eroarea standard" știm pe dată că este vorba despre o distribuție pe eșantioane.

$$\text{Eroarea standard a mediei} = s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Notă. Această formulă este valabilă atunci când avem un eșantion mare și o populație mare, adică $n > 30$ și $n < 5\%$ din N.

Cu cât este mai mică eroarea standard cu atât mai mare va fi precizia valorii eșantionului. Cuvântul „eroare" este folosit în locul lui „deviație" tocmai pentru a sublinia faptul că variațiile dintre valorile mediilor eșantioanelor se datorează erorilor în alegerea eșantioanelor.

8. Un exemplu de medie și eroare standard a mediei

Exemplu

O companie achiziționează o cantitate mare de deșeuri metalice de la operația de debitare și dorește să știe greutatea medie a unei bucăți de metal. Se alege un eșantion aleator de 625 bucăți care se cântărește stabilindu-se că greutatea medie a unei bucăți este de 150 g, cu o deviație standard pe bucată de 30 g. Care este valoarea estimată a mediei populației și care este eroarea standard a mediei. Care ar fi eroarea standard dacă eșantionul era alcătuit din 1225 bucăți?

Soluție

Media per bucată este de 150 g, astfel încât valoarea estimată a mediei populației este 150 g

$$\text{sau } \bar{x} = 150\,\text{g} = \hat{\mu} = 150\,\text{g},$$

unde $\hat{\mu}$ constituie „cea mai bună estimare a lui".

Când $n = 625$

eroarea standard a mediei:

$$= \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{30}{\sqrt{625}} = 1{,}2\text{g}.$$

Când $n = 1225$

$$s_{\bar{x}} = \frac{30}{\sqrt{1225}} = 0{,}857\text{g}.$$

Se observă că, prin mărirea numărului de elemente al eșantionului, valoarea erorii standard se reduce, fapt care ține de bunul simț în ultimă instanță, deoarece este de așteptat ca un eșantion mai mare să dea rezultate mai bune decât unul mai mic.

Estimarea obținerii pentru media populației 150 g reprezintă ceea ce numim *estimare punctuală.*

Această estimare este ușor de făcut, dar până în acest moment am ignorat complet întrebarea cea mai importantă: cât de bună poate fi o estimare? Lucrul acesta se poate stabili folosind ceea ce se numește *limită de certitudine.*

9. Limitele de certitudine

Limitele de certitudine reprezintă capetele unei zone sau a unui interval de certitudine, care este o zonă sau un interval de valori în care putem avea certitudine că se află adevărata medie a populației (sau a parametrului considerat). Limitele de certitudine, pentru mediile populațiilor, se bazează pe media eșantionului, pe eroarea standard și pe caracteristicile cunoscute ale distribuției normale.

Se știe că distribuția normală are următoarele caracteristici:

- media ± 1,96σ include 95% din populație;
- media ± 2,58σ include 99% din populație.

Caracteristicile acestea pot fi utilizate pentru a calcula limitele de certitudine pentru valoarea respectivă a mediei populației, dacă stabilim și media eșantionului și eroarea standard.

De exemplu, care sunt limitele de certitudine de 95% pentru estimarea mediei populației din exemplul de la paragraful 8?

$$\bar{x} = 150\,\text{g} \quad \text{și} \quad s_{\bar{x}} = 1{,}2\,\text{g}.$$

∴ Pentru un nivel de certitudine de 95%

$$\mu = \bar{x} \pm 1{,}96\, s \cdot s_{\bar{x}}$$
$$= 150 \pm 1.96\,(1{,}2)\,\text{g}$$
$$= 150 \pm 2.35\,\text{g}.$$

Aceasta înseamnă că putem fi siguri în proporție de 95% că media populației este cuprinsă în zona de certitudine dintre valorile de 147,65 g și 152,35 g.

Pentru un nivel de certitudine de 99%, limitele sunt:

$$\mu = 150 \pm 2.58\ (1{,}2)\,\text{g},$$

deci 146,9 și, respectiv 153,1 g.

Note:

a) Mărind certitudinea de la 95% la 99%, sporește încrederea că zona de certitudine conține media populației, însă estimarea acesteia are o precizie redusă.

b) Se poate alege orice nivel de certitudine și în funcție de valoarea acestuia, din tabelele de suprafețe normale se află valoarea corespunzătoare a erorii standard. Oricum, corelațiile dintre procentele de 95% și 99% și erorile standard de 1,96σ și 2,58σ sunt frecvent întâlnite și merită să fie memorate.

Principiile implicate în stabilirea limitelor de certitudine pot fi aplicate și pentru calibrarea dimensiunilor eșantioanelor pentru a se putea atinge un anumit nivel de precizie.

De exemplu, câte elemente ar trebui să conțină eșantionul din exemplul de la paragraful 8 dacă dorim să fim 95% siguri că media populației este cuprinsă într-un interval de 2 g al valorilor mediilor eșantioanelor.

Pentru că se dă valoarea nivelului de certitudine, singura cale de creștere a preciziei rămâne reducerea erorii standard, care se poate realiza prin creșterea numărului de elemente ale eșantionului.

Pentru a avea certitudine în proporție de 95% pentru limite de 2 g, eroarea standard este de 1,02 g, adică $\frac{2}{1,96} = 1,02$ g.

$$\therefore \text{deoarece } s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} \text{ rezultă } 1,02 = \frac{30}{\sqrt{n}},$$

$$\therefore \sqrt{n} = \frac{30}{1,02},$$

$$n = 865.$$

Principiile limitelor de certitudine au fost ilustrate în corelație cu valorile mediilor aritmetice, dar aplicarea lor nu este limitată exclusiv la estimarea mediei populației în funcție de un anumit eșantion. Acest concept este valabil pentru un spectru foarte larg de aplicații statistice.

10. Factorul de corecție pentru populații finite

Eșantioanele mari extrase din populații practic nelimitate de date primare permit o creștere a acurateței deviației standard a eșantionului ca estimare a deviației standard a populației, reducând eroarea standard și prin aceasta, mărind certitudinea că media eșantionului constituie o bună estimare a mediei populației.

În mod evident însă nu toate populațiile au un număr de elemente practic nelimitat, putând exista chiar și populații reduse numeric. În aceste condiții, proporția populației incluse în eșantion este relativ mare. Atunci când eșantionul cuprinde mai mult de 5% din efectivul populației, eroarea standard se ajustează înmulțind-o cu factorul de corecție pentru populații finite.

$$\text{Factorul de corecție pentru populații finite} = \sqrt{\frac{N-n}{N-1}},$$

unde N este dimensiunea populației – numărul de elemente care o compun și n dimensiunea eșantionului – numărul de elemente care o compun.

Prin adăugarea factorului de corecție, eroarea standard devine

$$s_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}.$$

În mod alternativ, când populația are mai mult de 100 de elemente, se folosește o altă corecție

$$s_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times \sqrt{1-\frac{n}{N}}.$$

Utilizarea factorului de corecție pentru populații finite duce întotdeauna la reducerea valorii erorii standard.

Exemplu

Avem un eșantion format din 80 elemente extrase aleator dintr-o populație de 800 de elemente. Deviația standard a eșantionului este de 6 g.

Care este valoarea factorului de corecție pentru populații finite?

Care este aproximația acestui factor?

Care este eroarea standard a mediei?

Soluția

$$\text{Factorul de corecție} = \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \sqrt{\frac{800-80}{800-1}} = 0{,}9493.$$

$$\text{Aproximarea factorului} = \sqrt{1-\frac{n}{N}} = \sqrt{1-\frac{80}{800}} = 0{,}9486.$$

Se observă că s-au obținut trei cifre consecutive ale valorilor factorului de corecție aproape identice 0,949, ceea ce reprezintă o acuratețe suficient de mare pentru cazurile practice.

$$\text{Eroarea standard a mediei } s_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times \sqrt{1-\frac{n}{N}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{80}} \times 0{,}949$$

$$= 0{,}637 \text{ g}.$$

Notă. Eroarea standard fără luarea în calcul a factorului de corecție este

$$\frac{6}{\sqrt{80}} = 0{,}671 \text{ g}.$$

BCU IASI CENTRALA UNIVERSITARA

11. Estimarea proporțiilor populațiilor

Până în acest moment, deducția statistică a fost aplicată mediei aritmetice. Un proces similar poate fi aplicat pentru alte tipuri de mărimi statistice – mediane, deviații standard, proporții și așa mai departe. În fiecare caz, analiza include trei elemente esențiale:

a) mărimea căutată, așa cum a fost determinată pentru eșantion;
b) eroarea standard a mărimii;
c) distribuția în eșantion a mărimii.

Așa cum am explicat în capitolul anterior, proporția reprezintă un atribut al populației mai curând decât valoarea unei variabile.

Estimarea proporțiilor populațiilor prin statistica eșantioanelor respectă același model ca și cel prezentat pentru media aritmetică. Diferența majoră este reprezentată de faptul că distribuția binomică este de asemenea implicată. Deducția statistică bazată pe distribuția binomică implică o serie de dificultăți tehnice cauzate de caracterul discret al distribuției și de asimetria intervalelor de certitudine.

Din fericire, când „*n*" are valori mari iar *np* și *nq* are valori mai mari de 5, distribuția binomică poate fi aproximată prin distribuția normală. În acest mod, analiza este ușurată în mod semnificativ, conceptele scoase în evidență pentru media aritmetică putând fi aplicate direct pentru proporții.

Formula relevantă pentru eroarea standard a proporției eșantionului este

$$s_{ps} = \sqrt{\frac{pq}{n}}.$$

Folosind această valoare, putem stabili limitele de certitudine pentru estimarea proporțiilor populației numai pe baza proporției eșantionului, procedând la fel ca în cazul mediei aritmetice.

Exemplu

Un eșantion aleator format din 400 de pasageri ai unei rute de cale ferată se pronunță în favoarea unui nou orar propus în proporție de 55%.

Având în vedere un procent de certitudine de 95%, să se calculeze ce procent din totalul călătorilor de pe ruta respectivă sunt de acord cu orarul propus?

Soluția

$$n = 400; p = 0{,}55 \text{ și } q = 1 - 0{,}55 = 0{,}45.$$

Întrucât $np = 220$, așadar cu mult mai mare decât 5, se poate folosi aproximarea normală.

$$s_{ps} = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}55 \times 0{,}45}{400}} = 0{,}025.$$

∴ Putem avea certitudinea în proporție de 95% că proporția populației care este de acord cu noul orar este cuprinsă între:

$$p_s \pm 1{,}96 s_{ps},$$

$= 0,55 \pm 1,96(0,025) = 0,55 \pm 0,049,$
$= 0,501$ până la $0,599.$

12. Estimarea pentru eșantioanele mici

Până în acest moment am mers pe presupunerea că toate eșantioanele erau mari ($n > 30$). În aceste condiții, s care reprezintă deviația standard a eșantionului este folosită ca o estimare a lui σ, deviația standard a populației. În continuare, se știe că distribuția mediei eșantionului este aproape normală astfel încât pot fi folosite proprietățile distribuției normale pentru calculul limitelor de certitudine, pe baza erorii standard a mediei.

În orice caz, proprietățile și relațiile trecute în revistă mai înainte nu sunt valabile dacă eșantionul este mic ($n < 30$), deoarece media aritmetică a eșantioanelor mici nu are o distribuție normală. În aceste condiții se va folosi distribuția t a lui Student.

Pentru aplicarea acestei distribuții, tot ceea ce este necesar de făcut este înlocuirea unei valori date „t" (din tabelul III) cu valoarea z obținută din tabelul I (suprafața sub curba normală), după cum urmează:

Eșantion mare

$$\mu = \bar{x} \pm z s_{\bar{x}}$$

Pentru un nivel de certitudine de 95% $z = 1,96$
Pentru un nivel de certitudine de 99% $z = 2,58$
(valorile lui z sunt luate din tabelul suprafețelor normale).

Eșantioane mici

$$\mu = \bar{x} \pm t s_{\bar{x}}$$

unde valoarea lui t este obținută din tabelul III pentru nivelul de certitudine care se cere.

Se va constata că procesele sunt similare, cu excepția faptului că distribuția Student este folosită pentru eșantioane mici.

13. Distribuția „*t*"

Această metodă de distribuție este utilizată când se lucrează cu eșantioane mici și atunci când este necesar să se calculeze estimări pentru σ, deviația standard a populației, pe baza valorii s, deviația standard a eșantionului.

Formulele utilizate sunt următoarele:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$, unde s este estimarea lui σ,

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n-1}}$$, așa cum s-a definit anterior.

Caracteristicile distribuției sunt următoarele:

a) este o distribuție exactă, unimodală și simetrică față de 0;

b) graficul acestei distribuții este mai plat decât graficul distribuției normale, respectiv suprafețele corespunzătoare extremității graficului sunt mai mari decât în cazul distribuției normale;

c) odată cu creșterea numărului de elemente al eșantionului distribuția *t* tinde spre distribuția normală.

Pentru utilizarea tabelelor de distribuție „*t*" (tabelul III) este necesar să se stabilească *gradul de libertate* notat în mod curent cu ν, conform formulei

$$\nu = n - 1,$$

unde n este numărul de elemente al eșantionului.

De exemplu, să calculăm valoarea *t* pentru un nivel de certitudine de 95% pentru un eșantion de 10 elemente.

$\nu = 10 - 1 = 9$, iar din tabelul III coloana 0,05 găsim valoarea 2,262.

Exemplu

Se alege un eșantion aleator de 10 elemente, stabilindu-se ulterior o greutate medie de 60 g cu o deviație de 12 g.

Care este greutatea medie a populației?

a) Pentru un coeficient de certitudine de 95%?

b) Pentru un coeficient de certitudine de 99%?

Soluție

$\bar{x} = 60\,\text{g};\ s = 12;\ \nu = 10 - 1 = 9$ grade de libertate,

$$\mu = \bar{x} \pm t\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Pentru un coeficient de certitudine de 95%

$$\mu = 60\,\text{g} \pm 2{,}262\left(\frac{12}{\sqrt{10}}\right)$$
$$= 60\,\text{g} \pm 8{,}58\,\text{g}.$$

Prin urmare, se poate afirma cu o certitudine de 95% că media de greutate a populației este cuprinsă între 51,42 și 68,58 g.

Pentru un coeficient de certitudine de 99%

$$\mu = 60\,\text{g} \pm 3{,}250\left(\frac{12}{\sqrt{10}}\right)$$
$$= 60\,\text{g} \pm 12{,}33\,\text{g}.$$

Prin urmare, se poate afirma cu o certitudine de 99% că media de greutate a populației este cuprinsă între 47,67 g și 72,33 g.

B.C.U. „M. EMINESCU" IAȘI

14. Rezumat

a) Deducția statistică reprezintă procesul de enunțare a unor concluzii asupra populațiilor de date primare pe baza studiului unor eșantioane prelevate din populațiile respective.

b) Alegerea aleatorie a elementelor care compun eșantioanele presupun ca fiecare element al populației să aibă o șansă egală de a fi ales, în afara oricăror constrângeri sau limitări.

c) Estimarea se ocupă cu aprecierea calitativă și cantitativă a prametrilor unei populații din statistica eșantioanelor.

d) Distribuția mediei aritmetice a eșantionului poate fi reprezentată de asemenea printr-o curbă normală.

e) Teorema limitei centrale afirmă faptul că mediile aritmetice ale elementelor eșantioanelor (medianele și deviațiile standard fiind incluse) tind să aibă o distribuție normală aproape indiferent de forma populației originale.

f) Deviația standard a distribuției mediei aritmetice se numește eroare standard a mediei și se stabilește cu formula

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

g) Limitele de certitudine constituie limitele unui interval sau a unei zone de certitudine în cuprinsul căreia putem avea certitudinea, într-o măsură exprimată de asemenea procentual, că se află și parametrii populației al cărei eșantion a fost analizat.

h) Limitele de certitudine cel mai frecvent utilizate sunt pentru un grad de certitudine de 95% ($\pm 1{,}96\sigma$) și pentru un grad de certitudine de 99% ($\pm 2{,}58\sigma$).

i) Atunci când eșantionul analizat reprezintă mai mult de 5% din populație, trebuie aplicat factorul de corecție pentru populații finite, cu forma generală

$$\left(\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right).$$

j) Stabilirea proporțiilor populației după informațiile furnizate de eșantioane se realizează conform procedurii standard, cu condiția ca *np* și *nq* să aibă valori mai mari de 50, astfel încât să poată fi utilizată aproximația normală.

k) Când $n < 30$ se spune că eșantionul este mic și se aplică distribuția *t* a lui Student, în locul distribuției normale.

15. De reținut

a) Eroarea standard a mediei, $\sigma_{\bar{x}}$ este întotdeauna mai mică decât σ, deviația standard a valorilor.

b) Un punct de vedere alternativ pentru un nivel de certitudine de 95% să spunem, este acela că există un procent de 5% sau o șansă din 20 ca parametrii

populației să fie în afara intervalului de încredere.

c) Teorema limitei centrale este valabilă pentru alegerea eșantioanelor, atât în cazul distribuțiilor normale cât și în cazul distribuției non-normale, în toate aceste cazuri distribuția mediilor aritmetice ale eșantioanelor tinzând către o distribuție normală.

d) Distribuția *t* utilizată în cazul eșantioanelor mici are de asemenea aplicații importante în testarea ipotezelor, care constituie de altfel, subiectul următorului capitol.

Întrebări de autoevaluare *Numerele din paranteze se referă la numerotarea paragrafelor*

1. Ce înseamnă deducție statistică? (2)
2. Care este principala caracteristică a alegerii aleatorii a eșantioanelor? (2)
3. Care este scopul estimării? (5)
4. Care sunt proprietățile unui bun estimator? (6)
5. Care este principala trăsătură a teoremei limitei centrale și de ce este atât de importantă? (7)
6. Ce reprezintă eroarea standard a mediei? (7)
7. Ce reprezintă limitele de certitudine? (9)
8. Când se folosește factorul de corecție pentru populații finite? Care este formula sa generală? (10)
9. Cum sunt estimate proporțiile populațiilor? (11)
10. Ce corecții trebuie făcute în cazul în care se lucrează cu eșantioane mici? (12)
11. Care sunt caracteristicile distribuției *t*? (13)
12. Care este modul de calculare a gradelor de libertate? (13)

Exerciții cu răspunsuri

1. Dintr-un eșantion aleator de 529 de televizoare luate direct de pe linia de producție au fost descoperite 8 bucăți defecte, în medie, cu o deviație standard de 3,45.

Care sunt limitele de certitudine pentru întreaga producție, pentru un nivel de certitudine de 99% și de 95%?

2. Un departament de inspecție dorește să calibreze dimensiunile eșantioanelor cu care lucrează, propunându-și o marjă de eroare de 1% din totalul defecțiunilor reale la un nivel de certitudine de 99%. Din experiența anterioară se știe că proporția de produse rebutate este de 3 din 100.

Care este dimensiunea eșantionului cu care trebuie să lucreze?

3. S-a format în mod aleator un lot din 12 pachete, pentru care s-a calculat o greutate medie de 50 g, cu o deviație standard de 9 g.

Care este greutatea medie a populației:

a) pentru un nivel de certitudine de 95%?

b) pentru un nivel de certitudine de 99%?

Răspunsuri la exerciții

1. $\text{Eroarea standard} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{3,45}{\sqrt{529}} = 0,15.$

Pentru un nivel de certitudine de 99%, rebuturile se află în limitele dintre 8±2,58 (0,15) = 7,613 și 8,387.

Pentru un nivel de certitudine de 95%, rebuturile se află în limitele dintre 8±1,96 (0,15) = 7,706 și 8,294.

2. $p = 0,03 \qquad q = 1 - p = 0,97$

d este gradul de acuratețe solicitat

$$s = \sqrt{\frac{pq}{n}}.$$

$\therefore$ Pentru un nivel de 99%

$$d = 2,58\sqrt{\frac{pq}{n}},$$

$$\therefore d^2 = 2,58^2 \sqrt{\frac{pq}{n}},$$

$$\therefore n = \frac{2,58^2\, pq}{d^2}.$$

Făcând înlocuirile pentru cazul în care $d = 0,01$

$$\therefore n = \frac{2,58^2 (0,03)(0,97)}{0,01^2}$$

$$= 1937,$$

$$\bar{x} = 50 \quad s = 9 \quad v = 12 - 1 = 11$$

$$\mu = \bar{x} \pm t\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Pentru un nivel de certitudine de 95%.

3. $$\mu = 50 \pm 2,262\left(\frac{9}{\sqrt{12}}\right)$$

$$= 50 \pm 5,877 \text{ g.}$$

Pentru un nivel de certitudine de 99%

$$\mu = 50 \pm 3,25\left(\frac{9}{\sqrt{12}}\right)$$

$$= 50 \pm 8,444 \text{ g.}$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

6. TESTAREA IPOTEZELOR

1. Obiective

1. După studiul acestui capitol:
- veți putea defini testarea ipotezei (sau semnificației);
- veți înțelege care sunt tipul I și tipul II de erori;
- veți ști cum se calculează nivelul de semnificație;
- veți putea face distincția între testarea la o limită și testarea la ambele limite;
- veți înțelege semnificația testelor de medie, proporție și diferența dintre medii și proporții;
- veți înțelege când și în ce mod se aplică distribuția t a lui Students;
- veți înțelege distribuția χ^2;
- veți putea aplica corecția lui Yates;
- veți înțelege obiectivele controlului statistic al procesului;
- veți putea trasa grafice de control elementare.

2. Definiția testării ipotezelor

Testarea ipotezelor, denumită și testarea semnificației, este sub multe aspecte similară procesului de estimare prezentat în capitolul anterior. Și în acest caz sunt implicate eșantioanele aleatorii și proprietățile distribuției mediilor aritmetice ale eșantioanelor și proporțiile acestora.

Ipoteza reprezintă o convingere sau o opinie care poate fi testată, testarea ipotezei fiind procesul prin care această convingere este testată cu mijloacele statisticii.

De exemplu, dintr-un lot mare de componente se formează un eșantion aleator pe care se testează convingerea (cu alte cuvinte ipoteza) că diametrul mediu al populației de componente este de 50 mm. În funcție de rezultatul obținut din testarea eșantionului, ipoteza poate fi acceptată ori respinsă.

3. Rezultatele testării ipotezelor

Există numai patru rezultate posibile ale testării unei ipoteze date:

1) *Acceptăm o ipoteză adevărată* – o decizie *corectă*.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2) *Respingem o ipoteză falsă* – o decizie *corectă*.

3) *Respingem o ipoteză adevărată* – o decizie *incorectă*. Aceasta este eroarea de tipul I.

4) *Acceptăm o ipoteză falsă* – o decizie *incorectă*. Aceasta este eroarea de tipul II.

4. Erori de tipurile I și II

Evident, trebuie depuse eforturi pentru evitarea oricărui tip de erori, dar din moment ce nu este posibilă luarea unei decizii corecte cu o certitudine de 100%, în cazul testării unei ipoteze pe baza unui eșantion, există totdeauna posibilitatea apariției unei erori de tipurile I sau II.

Erorile se exclud reciproc; eroarea poate fi de tipul I sau de tipul II, dar în nici un caz de ambele tipuri, concomitent. S-a adoptat această împărțire pe categorii a erorilor deoarece sunt situații în care este mai importantă evitarea unei erori decât a celeilalte.

De exemplu, să presupunem că avem ipoteza „apa este puțin adâncă"; consecințele unei erori de tipul II pot fi faptele pentru o persoană care nu știe să înoate.

Deși în cuprinsul acestei lucrări nu vom prezenta metodele, trebuie să subliniem că se poate calcula probabilitatea producerii unei erori de tipul I sau tipul II. În general, acestea sunt notate cu α și β, după cum urmează:

$$P(\text{tipul I}) = \alpha,$$
$$P(\text{tipul II}) = \beta.$$

5. Nivelurile de semnificație

Atunci când se ia un eșantion pentru testarea unei ipoteze, este posibil ca informațiile furnizate de elementele eșantionului (de exemplu, media aritmetică a eșantionului și deviația standard) să nu susțină pe deplin ipoteza. Diferența se poate datora fie faptului că ipoteza originală era greșită, fie faptului că eșantionul ales se dovedește nereprezentativ, neajuns care grevează orice eșantion, într-o măsură mai mică sau mai mare.

În mod evident, este important să se poată afla, prin teste, care dintre ipoteze este cea mai aproape de adevăr și tocmai acesta este obiectivul principal al testării ipotezei. Testele vor arăta dacă deosebirile detectate pot fi puse pe seama unor factori aleatorii obișnuiți sau nu. Dacă deosebirile nu pot fi puse pe seama unor factori aleatori, se va spune că ea are *semnifiație statistică*.

Deoarece lucrăm cu eșantioane și cu factori aleatori, nu putem spune cu certitudine de 100% că o diferență este semnificativă. De asemenea, se aleg diferite

niveluri pentru semnificație, cel mai adesea 5% sau 1% și, prin urmare, rezultatul unui anumit test poate fi exprimat după cum urmează:

„Diferența dintre media aritmetică a eșantionului și media populației ipotetice este semnificativă la un nivel de 5%."

Nivelurile de semnificație și limitele de certitudine utilizate în capitolul anterior pentru estimare sunt complementare și se bazează pe principii similare.

Note:

a) Ca și în cazul limitelor de certitudine, se poate folosi orice nivel de semnificație, dar cele mai frecvent utilizate sunt cele de 5% și 1%.

b) Fraza folosită mai sus „Diferența dintre media eșantionului și media populației este semnificativă la un nivel de 5%" are următoarea formulare alternativă: „Există o certitudine de 95% că diferența dintre media eșantionului și media populației nu se datorește unor factori aleatori."

c) Datorită faptului că nivelul de semnificație trebuie să fie ales înaintea începerii testării și deoarece el constituie un factor hotărâtor pentru acceptarea sau respingerea unei ipoteze, termenul de „testarea semnificației" este folosit mai des decât cel de testare a ipotezei.

6. Un exemplu de testare a unei ipoteze

Exemplul 1

O mașină umple pachete cu condimente, fiecare pachet trebuind să aibe o greutate medie de 40 g. Se ia un eșantion aleator de 36 pachete și greutatea medie calculată se dovedește a fi de 42,4 g, cu o deviație standard de 6 g. Se cere un test de semnificație pentru un nivel de 5%.

Pentru a face acest lucru, alegem următoarea ipoteză:

„Greutatea medie a populației, μ este de 40 g."

Această ipoteză este cunoscută sub denumirea de *ipoteza nulă,* notată cu H_0 și înseamnă că presupun că nu ar exista nici o diferență între media presupusă și media eșantionului și că orice diferență trebuie pusă exclusiv pe seama factorilor aleatori.

Ipoteza alternativă notată H_1 este următoarea:

„media aritmetică a greutății populației nu este de 40 g."

Mai simplu, aceste ipoteze pot fi reprezentate astfel:

$$H_0 : \mu = 40 \text{ g},$$
$$H_1 : \mu \neq 40 \text{ g}.$$

Ipoteza nulă este cea testată. Dacă se dovedește că este reală, H_1 este respinsă, în timp ce dacă se dovedește că H_0 nu este adevărată, H_1 este acceptată.

Pe baza unor principii similare celor descrise în capitolul anterior, știm că pentru un nivel de certitudine de 95% (ceea ce este echivalent cu un nivel de 5% al semnificației) media eșantionului trebuie să fie cuprinsă între $\pm 1{,}96$ înmulțit cu eroarea standard, astfel încât dacă H_0 este adevărată, 95% din mediile tuturor eșantioanelor trebuie să se afle în limitele următoare:

$$\mu - 1{,}96 s_{\bar{x}} \text{ și } \mu + 1{,}96 s_{\bar{x}}.$$

Eroarea standard pentru acest exemplu este

$$s_{\bar{x}} = \frac{6}{\sqrt{36}} = 1,$$

astfel încât vom avea limitele:

$$40 \pm 1{,}96\ (1)\ \text{g};$$

38,04 până la 41,96 g.

Grafic, acest rezultat este prezentat în fig. 6.1.

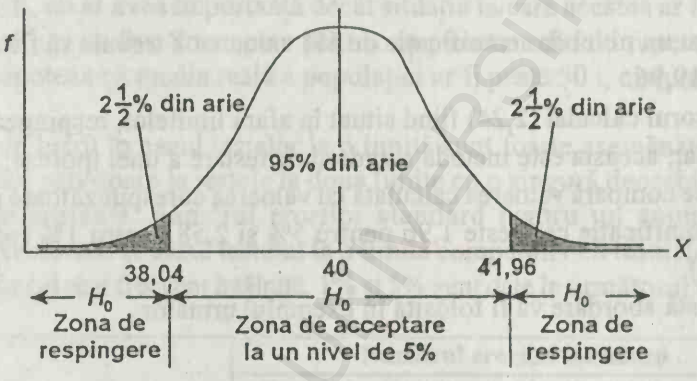


Fig. 6.1. Distribuția mediilor eșantioanelor.

Media eșantionului de 42,4 g fiind în afara zonei de acceptare, respingem ipoteza H_0 și acceptăm ipoteza H_1 (sau m ≠ 40 g), ceea ce înseamnă că diferența dintre $\bar{x}$ și μ este *semnificativă* la un *nivel de 5%*.

Deoarece, așa cum se vede din imaginea grafică, am analizat ambele extremități ale graficului distribuției, acest test se va numi testul de semnificație la ambele limite. Există și teste de semnificație în care analizăm numai o extremitate a graficului distribuției, acestea numindu-se *teste de semnificație la o singură limită*. În cuprinsul acestui capitol vom da exemple de ambele genuri.

7. O abordare mai simplă a testării ipotezelor

În paragraful precedent am arătat o metodă specială de rezolvare, în special pentru a ilustra motivele care stau la baza testării semnificației și ideea testării la ambele limite. Mai există, însă, o abordare mai simplă a aceleiași concluzii și aceasta este și abordarea pe care o recomandăm, cu condiția ca principiile care stau la baza testării ipotezelor să fie bine cunoscute.

Vom rezolva din nou exemplul 1, utilizând modul de abordare recomandat.

H_0 : $\mu = 40$ g
H_1 : $\mu \neq 40$ g (testul la două limite)
$\bar{x} = 42{,}4$ g (se dă în enunț)
$s = 6$ g (se dă în enunț)
$n = 36$ g (se dă în enunț)

$$\text{Eroarea standard} = s_{\bar{x}} = \frac{6}{\sqrt{36}} = 1.$$

$$\therefore Z = \frac{\bar{x} - \mu}{s_{\bar{x}}} = \frac{42{,}4 - 40}{1} = 2{,}24.$$

Pentru un nivel de semnificație de 5% valoarea Z trebuie să fie cuprinsă între -19,96 și +19,96.

∴ Scorul calculat (2,24) fiind situat în afara limitelor, respingem ipoteza H_0.

Așadar, aceasta este metoda standard de testare a unei ipoteze; se calculează scorul Z și se compară valoarea calculată cu valoarea corespunzătoare pentru nivelul cerut de semnificație care este 1,96 pentru 5% și 2,58 pentru 1% (pentru testul la două limite).

Această abordare va fi folosită în exemplul următor.

Exemplul 2

Se consideră același enunț ca în exemplul 1 (v. pag. 104), dar pentru un nivel de semnificație de 1%.

H_0 : $\mu = 40$ g
H_1 : $\mu \neq 40$ g (testul la două limite)
$\bar{x} = 42{,}4$ g (se dă în enunț)
$s = 6$ g (se dă în enunț)
$n = 36$ g (se dă în enunț)

$$\therefore s_{\bar{x}} = \frac{6}{\sqrt{36}} = 1.$$

$$\therefore Z = \frac{42{,}4 - 40}{1} = 2{,}24.$$

Pentru un nivel de 1%, Z trebuie să aibă valori între –2,58 și +2,58.

∴ Scorul Z calculat aflându-se în acest interval, ipoteza H_0 poate fi acceptată *la un nivel de semnificație de 1%.*

Note:

a) Este important de constatat faptul că atunci când se acceptă ipoteza nulă, aceasta nu este o dovadă minim-necesară că media populației este corectă. Testarea ipotezei nu poate decât să evidențieze faptul că o anumită valoare este, probabil, falsă.

b) Din cele două exemple sperăm că a devenit evident faptul că nivelul de semnificație de 1% constituie un barem mai important decât nivelul de 5%. Cu cât valoarea nivelului de semnificație este mai mare, cu atât este mai mare probabilitatea de producere a unei erori de tipul I.

8. Testele la o limită

Sunt testele în care ipoteza alternativă nu vizează decât una dintre extremitățile curbei de distribuție normală. De exemplu, dacă se studiază rezistența la rupere a cablurilor de lift, nu ar avea importanță decât situația în care acestea ar fi prea slabe. Dacă aceste cabluri au fost concepute pentru un punct mediu de rupere de 50 t, nu ne-ar interesa ipoteza că media reală a populației ar fi peste 50 t, ci numai dacă ar fi sub 50 t.

Modul de lucru în cazul testelor la o limită sunt foarte asemănătoare cu cele descrise anterior privitoare la testele la două limite cu o singură deosebire, care este însă, foarte importantă: numărul erorilor standard pentru un anumit nivel de semnificație este diferit în cazul testului la o limită comparativ cu testul la două limite pentru nivelurile cel mai frecvent întâlnite. 1% și 5% sunt date în următorul tabel:

	Numărul erorilor standard	
	Testele la două limite	Testele la o limită
Nivel de semnificație de 5%	1,96	1,65
Nivel de semnificație de 1%	2,58	2,33

Cauza existenței acestor diferențe este reprezentată de faptul că, atunci când ne interesează ambele limite ale unei distribuții, procentul de 5% (sau, respectiv, 1%) este împărțit între cele două limite, așa cum se arată în fig. 6.1, în timp ce în cazul testului la o singură limită cele două procente se referă numai la aceasta.

Valorile pentru oricare alt nivel de semnificație pot fi găsite în tabelul I, suprafețe ale curbei normale.

În continuare, vom da un exemplu de test la o singură limită.

Exemplul 3

Se dau aceleași valori ca în cazul exemplului 1, cu excepția faptului că se cere să se testeze dacă media populației este mai mare decât valoarea propusă de 40 g, folosind un nivel de semnificație de 5%.

$$H_0 : \mu = 40 \text{ g}$$
$$H_1 : \mu \neq 40 \text{ g}$$

Acesta este un test la o singură limită, rezolvarea vizând numai extremitatea dreaptă a graficului distribuției.

Ca și în cazul anterior, scorul Z este 2,24 iar pentru testul la o limită valoarea scorului Z trebuie să se afle înaintea valorii de 1,65.

∴ deoarece scorul Z calculat se află în afara marjei de 5%, respingem ipoteza nulă. Putem face următoarea afirmație: „Pentru un nivel de 5% se acceptă ipoteza H_1 și anume media populației este mai mare de 40 g."

Notă. Este de importanță vitală să se știe dacă se impune un test la o limită sau la două limite, astfel încât să poată fi folosit numărul corect de erori standard pentru nivelul de semnificație ales și utilizat.

9. Testarea ipotezelor aplicată pentru proporții

În linii mari, se realizează printr-o abordare similară în linii mari cu testarea ipotezelor aplicată pentru mediile aritmetice, cu deosebirea că de data aceasta eroarea standard va purta denumirea de *eroare standard a proporției,* respectiv

$$s_p = \sqrt{\frac{pq}{n}}.$$

Scorul Z se calculează cu relația:

$$Z = \frac{p - \pi}{s_p}.$$

unde:

p este proporția stabilită pentru eșantion;
π – proporția ipotetică.

Exemplul 4

Se cere să se testeze ipoteza că 50% dintre gospodării au un congelator. Un eșantion aleator de 400 de gospodării a relevat faptul că 54% dintre ele aveau un congelator. Nivelul de semnificație este de 5%.

Notă. Acesta este un test la două limite, deoarece ni se cere să testăm ipoteza ca atare și nu comparativ cu o ipoteză alternativă, conform căreia proporția respectivă ar fi ori mai mare, ori mai mică.

Cu alte cuvinte:

$H_0 : \pi = 50\%$ din totalul gospodăriilor,
$H_1 : \pi \neq 50\%$ din totalul gospodăriilor,

$$s_p = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}5 \times 0{,}5}{400}} = 0{,}025,$$

$$Z = \frac{0{,}54 - 0{,}50}{0{,}025} = 1{,}6.$$

Pentru un nivel de semnificație de 5% pentru testul la două limite, valoarea adecvată este 1,96.

∴ Deoarece scorul Z calculat mai înainte este 1,6 putem spune că diferența *nu este semnificativă* și că ipoteza nu ar trebui respinsă.

10. Testarea ipotezelor aplicată pentru diferențele dintre două medii

Atunci când se iau două eșantioane aleatorii, cel mai adesea se cere să se afle dacă există diferențe semnificative între cele două medii. Această testare a ipotezei respectă tiparul general, cu aceeași deosebire: diferă modul de calcul al erorii standard.

Distribuția diferenței mediilor aritmetice ale eșantioanelor este de tipul normal și rămâne astfel indiferent care este distribuția populației din care s-au extras eșantioanele respective. Atunci când $n > 30$, respectiv în cazul eșantioanelor mari, se folosesc tabelele pentru suprafețele normale, iar atunci când $n < 30$, se aplică distribuția t.

Erorile standard pentru diferența mediilor

$$s_{(\bar{x}_A - \bar{x}_B)} = \sqrt{\frac{s_A^2}{n_A} + \frac{s_B^2}{n_B}},$$

unde:

s_A este deviația standard a eșantionului A, având n_A elemente;

s_B – deviația standard a eșantionului B, având n_B elemente;

iar scorul Z se calculează cu relația

$$Z = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{s(\bar{x}_A - \bar{x}_B)}.$$

Exemplul 5

Utilajele A și B produc componente identice și se cere să se testeze diametrul mediu al acestora. Un eșantion aleator extras din componentele produse de utilajul A, în număr de 144 bucăți are media de 36,40 mm, cu o deviație standard de 3,6 mm, în timp ce un eșantion aleator extras din componentele produse de utilajul B, în număr de 225 de bucăți, are o medie de 36,90 mm, cu o deviație standard de 2,9 mm.

Atunci când nivelul de semnificație este de 5% diferența dintre aceste medii este semnificativă?

Soluția

H_0 : media lui A = media lui B.

H_1 : media lui $A \neq$ media lui B.

Având în vedere faptul că nu ne interesează direcția variației, avem de-a face din nou cu un test la două limite:

$$s_{(\bar{x}_A - \bar{x}_B)} = \sqrt{\frac{3{,}6^2}{144} + \frac{2{,}9^2}{225}} = 0{,}357,$$

$$Z = \frac{36{,}40 - 36{,}90}{0{,}357} = 1{,}4.$$

Scorul Z pentru testul la două limite, pentru un nivel de semnificație de 5% este 1,96.

Ca urmare, deoarece scorul Z calculat (1,4) se înscrie în limitele acestei valori, nu există nici un motiv care să ne indice că ar exista vreo diferență semnificativă între cele două valori medii, drept pentru care ipoteza H_0 va fi acceptată.

11. Testarea ipotezei pentru cazul diferenței dintre proporții

Într-o manieră similară se poate cere testarea diferențelor dintre proporțiile unui anumit atribut descoperit în două eșantioane aleatorii.

Se va folosi următoarea notație:

	Eșantionul 1	Eșantionul 2
Dimensiunile eșantionului	n_1	n_2
Proporția de succese ale eșantionului	p_1	p_2
Proporția de succese ale populației	π_1	π_2

Ipoteza nulă ar putea fi: $\pi_1 = \pi_2 = \pi$, fapt care înseamnă practic că eșantioanele au fost prelevate din aceeași populație de date. Aceasta fiind situația, cea mai bună estimare a erorii standard a diferenței pentru p_1 și p_2 se obține prin combinarea eșantioanelor și calcularea proporției combinației de eșantioane, după cum urmează:

$$p = \frac{p_1 n_1 + p_2 n_2}{n_1 + n_2},$$

eroarea standard fiind

$$s_{(p_1 - p_2)} = \sqrt{\frac{pq}{n_1} + \frac{pq}{n_2}}$$

și

$$Z = \frac{(p_1 - p_2) - (\pi_1 - \pi_2)}{s_{(\pi_1 - \pi_2)}}.$$

Având în vedere ipoteza nulă, $\pi_1 = \pi_2$, partea a doua a numărătorului va dispărea.

Exemplul 6 – Un test pentru o singură limită

O agenție de sondare a pieței își alege un eșantion de 1000 de persoane și stabilește că 200 dintre ele cunosc marca X. După desfășurarea unei companii publicitare, se alege un alt eșantion de 1091 persoane, stabilindu-se că, dintre acestea, 240 cunoșteau marca X.

Se cere să se afle dacă s-a produs o creștere reală a numărului persoanelor care cunosc marca X, lucrându-se cu un nivel de semnificație de 5%.

Soluția

$$H_0 : \pi_2 = \pi_1$$
$$H_1 : \pi_2 > \pi_1 \text{ (testul pentru o singură limită)}$$

$$p_1 = \frac{200}{1000} = 0,2 \qquad p_2 = \frac{240}{1091} = 0,22$$

Proporția combinației celor două eșantioane:

$$p = \frac{200+240}{1000+1091} = 0,21$$

$$\text{iar } q = 1 - p = 1 - 0,21 = 0,79$$

$$\therefore s_{(p_1-p_2)} = \sqrt{\frac{0,21\times0,79}{1000} + \frac{0,21\times0,79}{1091}} = 0,0178.$$

$$\therefore Z = \frac{0,20-0,22}{0,0178} = 1,12.$$

Valoarea critică pentru testul la o singură limită, la nivelul 5% este 0,64; valoarea calculată se află în interiorul acestei limite, iar noi putem trage concluzia că nu există suficiente dovezi pentru a respinge ipoteza nulă.

Exemplul 7 – Un test cu două limite

În Londra și Birmingham au fost efectuate sondaje privind audiența canalului 4 de televiziune. În Birmingham au fost intervievate 1000 de persoane, dintre care 680 au afirmat că urmăreau emisiunile canalului 4. În Londra au fost intervievate 600 de persoane, dintre care 444 au afirmat că urmăreau emisiunile canalului 4.

Există diferențe semnificative între ratele de audiență ale locuitorilor din Birmingham și din Londra pentru un nivel de semnificație de 5%. Dar pentru unul de 1%?

Soluția

În Birmingham

$$p = \frac{680}{1000} = 0,68 \text{ și } q = 0,32.$$

În Londra

$$p = \frac{444}{600} = 0,74 \text{ și } q = 0,26.$$

Suma proporțiilor corespunzătoare celor două eșantioane:

$$= \frac{680+444}{1000+600} = 0,7025,$$

$$\therefore q = 1 - p = 1 - 0,7025 = 0,2975.$$

$$\text{Eroarea standard} = \sqrt{\frac{0{,}7025 \times 0{,}2975}{1000} + \frac{0{,}7025 \times 0{,}2975}{600}} = 0{,}0236,$$

$$Z = \frac{0{,}74 - 0{,}68}{0{,}0236} = 2{,}54 \text{ erori standard.}$$

Pentru un nivel de semnificație de 5% și un test pentru două limite, $Z = \pm 1{,}96$, valoarea calculată aflându-se în afara acestor limite.

∴ Există, așadar, o diferență semnificativă pentru nivelul de 5%.

Pentru nivelul de 1%, $Z = \pm 2{,}58$, valoarea calculată se află între aceste limite.

∴ Nu există o diferență semnificativă în proporțiile spectatorilor din cele două orașe, pentru un nivel de semnificație de 1%.

12. Alte distribuții decât cele normale

Până în acest moment, discuția referitoare la deducția statistică și testarea ipotezelor s-a bazat numai pe eșantioane mari pentru media sau proporția eșantioanelor, rezultând o distribuție aproximativ normală.

Cu toate acestea, multe situații reale în care se aleg eșantioane nu corespund condițiilor descrise. De exemplu, este posibil să folosim numai eșantioane mici, să avem un atribut care, să spunem, poate fi clasificat în mai mult de două categorii, să trebuiască evaluate concomitent eșantioane prelevate din două sau mai multe populații etc. Toate aceste situații alături de multe altele, să le spunem speciale, impun necesitatea unor alte distribuții decât cele normale.

În consecință, testarea ipotezelor a fost extinsă pentru a putea cuprinde încă două tipuri de distribuții: distribuția t și distribuția χ^2.

13. Testarea ipotezelor utilizând distribuția "t"

Există numeroase ocazii în care nu se pot preleva decât eșantioane mici; așa cum am mai afirmat eșantion mic înseamnă $n < 30$. Mediile pentru eșantioanele mici sunt în jurul valorilor mediei populației, în mod similar unei distribuții normale, dar nu identic. Distribuția probabilității mediei eșantionului mic este cunoscută ca *distribuția t* sau *distribuția t-Student*.

În cazul aplicării distribuției *t*, valorile din tabelul suprafețelor normale, care au fost folosite în acest capitol (de exemplu 1,96 pentru un nivel de certitudine de 95%) sunt înlocuite de valorile *t*, cuprinse în tabelul III. Această valoare variază odată cu variația lui *v*, gradul de liberate.

Pentru un singur eșantion, acesta este $n - 1$, iar în cazul combinării a două eșantioane, gradul de comparație devine $n_1 + n_2 - 2$.

În afara acestor particularități, metoda generală de testare a ipotezelor, folosind distribuția *t*, este aceeași ca și în cazul distribuției normale.

Exemplul 8

O firmă a făcut o comandă de saci cu substanțe chimice având greutatea nominală de 50 kg. Un eșantion aleator, cuprinzând 8 saci, a dat la iveală o greutate medie de 49,2 kg cu o deviație standard de 1,6 kg. Firma dorește să știe dacă greutatea medie a eșantionului este semnificativ inferioară celei nominale, pentru un nivel de semnificație de 5%.

Soluția

Acesta este un exemplu de test pentru o singură limită, deoarece suntem interesați să aflăm numai dacă greutatea medie este mai mică decât cea nominală.

H_0 : media = 50 kg,

H_1 : media < 50 kg.

Gradele de libertate = $n - 1 = 8 - 1 = 7$.

$$\text{Eroarea standard a mediei} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{1,6}{\sqrt{8}} = 0,566.$$

$$\text{Prin urmare } t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_{\bar{x}}} = \left| \frac{49,2 - 50}{0,566} \right| = 1,413.$$

Pentru a găsi o probabilitate de 5% pentru o singură limită, căutăm în tabelul III, pe coloana 0,10 în dreptul cifrei 7 (reprezentând numărul de grade de libertate). Valoarea căutată este 1,895.

Deoarece scorul *Z* calculat (1,413) are o valoare mai mică decât 1,895 rezultă că putem accepta ipoteza nulă, respingând ipoteza alternativă, pentru un nivel de semnificație de 5%.

Notă. Coloana 0,10 reprezintă coloana pentru probabilitățile de 10% și am ales valoarea din cuprinsul său, deoarece ele sunt calculate pentru cazul limitelor perechi, ceea ce înseamnă câte 5% sau 0,05 pentru fiecare limită, așa cum se cerea în enunț.

Testele de distribuție *t* a diferenței dintre mediile aritmetice

Așa cum am mai arătat, până în acest moment am lucrat cu eșantioane mari. În cazul în care avem eșantioane mici, vom folosi distribuția *t* pentru testarea diferenței dintre mediile populației. În asemenea condiții, trebuie făcute două presupuneri suplimentare.

a) Cele două populații din care au fost prelevate eșantioanele au distribuții normale sau aproximativ normale.

b) Cele două deviații standard sunt egale sau, în orice caz, nu sunt diferite în mod semnificativ. Cea mai bună estimare a deviației standard a populației se obține combinând cele două deviații standard ale eșantioanelor, așa cum vom arăta în continuare.

Știind că se aleg două eșantioane și că n_1, x_1, s_1 și n_2, x_2, s_2 sunt dimensiunile eșantioanelor, mediile și respectiv deviațiile standard, estimarea deviației standard comune sau combinate a celor două eșantioane (notată s_p) se calculează cu relația:

$$s_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}.$$

Prin urmare, s_p este cea mai bună estimare a deviației standard pentru fiecare populație.

Eroarea standard pentru media fiecărei populații se calculează cu relațiile:

$$s_{\bar{x}_1} = \frac{s_p}{\sqrt{n_1}} \text{ și } s_{\bar{x}_2} = \frac{s_p}{\sqrt{n_2}}.$$

iar eroarea de distribuție a diferențelor mediilor eșantioanelor este

$$s_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sqrt{s_{\bar{x}_1}^2 + s_{\bar{x}_2}^2}.$$

Valoarea aceasta poate fi folosită pentru a afla valoarea lui *t* în maniera normală:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)}} \text{ cu } n_1+n_2-2 \text{ grade de libertate}.$$

Exemplul 9

Sunt analizate veniturile lunare realizate de două grupuri de comis voiajori, pentru a se stabili dacă există diferențe în privința mediei veniturilor realizate de aceștia. Se aleg eșantioane aleatorii formate din 12 și respectiv 9 persoane, presupunându-se că veniturile în cadrul unui grup sunt aproximativ normal distribuite între membrii lor și că deviațiile standard sunt asemănătoare. Se are în vedere un nivel de semnificație de 5%.

Rezultatele eșantioanelor au fost:

Soluția

$n_1 = 12$ $\quad$ $n_2 = 9$

$\bar{x}_1 = 1060£$ $\quad$ $\bar{x}_2 = 970£$

$s_1 = 63£$ $\quad$ $s_2 = 76£$

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0.$

$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0.$

În mod evident este un test pentru două limite; se va calcula mai întâi deviația standard:

$$s_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(12-1)63^2 + (9-1)76^2}{12+9-2}}$$

$$= 68{,}77$$

$$\therefore s_{\bar{x}_1} = \frac{s_p}{\sqrt{n_1}} = \frac{68{,}77}{\sqrt{12}} = 19{,}85$$

$$s_{\bar{x}_2} = \frac{s_p}{\sqrt{n_2}} = \frac{68{,}77}{\sqrt{9}} = 22{,}92$$

$$\therefore s_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sqrt{s_{\bar{x}_1}^2 + s_{\bar{x}_2}^2} = 30{,}32$$

în final calculându-se scorul *t*:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)}} = \frac{1060-970}{30{,}32} = 2{,}97.$$

Din tabelul III, valoarea pentru 5% cu $(n_1 + n_2 - 2) = (12 + 9 - 2) = 19$ grade de libertate este 2,093.

Valoarea calculată fiind mai mare decât aceasta, ipoteza nulă este respinsă pentru un nivel de semnificație de 5%, rezultând că *există o diferență semnificativă* între mediile veniturilor lunare realizate de cele 2 grupuri.

15. Testele non-parametru

Testele de semnificație prezentate până în acest moment depind într-o măsură mai mare sau mai mică de presupunerea sau existența unei distribuții normale. De asemenea, testele prezentate anterior depind de o serie de *parametri* de distribuție, cum sunt media aritmetică, proporțiile etc. Din această cauză, au primit denumirea generică de *teste de parametri.*

În diverse situații, datele sunt non-normale sau conțin numai valori extreme ori nu se cunosc suficiente amănunte pentru a se putea face presupuneri în legătură cu tipul de distribuție. În toate aceste situații, se va apela la *testele non-parametru* sau *libere de distribuție.* În plus, testele non-parametru mai pot fi utilizate și pentru analizarea datelor așezate/dispuse într-o ordine oarecare, ca de exemplu în cazul unui test de piață, când7 cumpărătorilor li se cere să grupeze o serie de produse în ordinea preferinței.

Avantajele testelor non-parametru:

a) Nu este necesar să se facă presupuneri referitoare la tipul de distribuție.

b) Pot fi folosite în cazul populației de date primare ordonate într-un mod oarecare.

c) Aparatul matematic este mai simplu decât în cazul testelor de parametri.

Dezavantajele testelor non-parametru:

a) Sunt mai puțin discriminatorii decât testele de parametru, prin aceasta fiind mult mai expuse la erori și mai slabe.

b) Deși suportul matematic este mai simplu, este și mai laborios, putând necesita un timp mai îndelungat.

Un exemplu important de test care nu pornește de la nici o presupunere referitoare la tipul de distribuție, din această cauză fiind adeseori clasificat ca non-parametru este testul χ^2.

16. Distribuția χ^2

Testul χ^2 este o extensie importantă a testării ipotezelor și este utilizat atunci când se dorește compararea unei distribuții reale și identificate cu o distribuție ipotetică sau estimată. Adeseori, acest test mai este numit aleator.

Formula matematică de calcul a lui χ^2 este

$$\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E},$$

unde:

O este frecvența observată a oricărei valori;

E – frecvența estimată sau presupusă a oricărei valori.

Valoarea lui χ^2 obținută conform formulei de mai sus se compară cu valorile din tabelul IV pentru χ^2, în funcție de un anumit nivel de semnificație și a numărului de grade de liberate, cu alte cuvinte procedura standard de testare a ipotezelor.

În tabelul IV, distribuția lui χ^2 dă pentru diferite grade de libertate (v), valorile corespunzătoare celor mai des întâlnite niveluri de semnificație 5% și 1%.

Vom explica modul de utilizare a lui χ^2 folosind următorul exemplu simplu.

Un eșantion aleatoriu format din 400 de gospodării este grupat în funcție de două caracteristici: dacă posedă televizor color și după tipul de proprietate (respectiv proprietar-ocupant, chiriașul proprietarului sau chiriașul primăriei). Rezultatele acestui sondaj sunt prezentate în atbelul 6.1.

Tabelul 6.1

	Frecvențe reale			
	Proprietar ocupant	Chiriaș primărie	Chiriaș proprietar	Total
Cu TV color	150	60	20	230
Fără TV color	45	68	57	170
	195	128	77	400

Se cere testarea pentru un nivel de semnificație de 5% a următoarelor ipoteze:

H_0: Cele două clasificări sunt independente (respectiv nu există nici o relație între clasele de situație și posesia unui aparat TV color).

H_1: Cele două clasificări nu sunt independente.

Soluție

Primul pas în formarea unei soluții constă în calcularea *frecvențelor estimate* pentru fiecare categorie, care vor fi comparate ulterior cu frecvențele reale din tabele.

Pentru găsirea frecvențelor estimate

Aceste frecvențe pot fi găsite apelând la ceea ce s-ar putea numi „ipoteză nulă", respectiv presupunerea că nu există nici o diferență între proporțiile de posesori de aparate TV color din grupele respective. Frecvența estimată pentru fiecare căsuță din tabel se poate calcula prin raportul dintre locatarii posesori de TV color și locatarii fără TV color, respectiv 230:170.

Așadar, cei 195 de locatari-proprietari sunt împărțiți conform proporției 230:170 în 112:83 și așa mai departe pentru chiriași, rezultând tabelul 6.2.

Tabelul 6.2

	Frecvențe estimate			
	Locatar proprietar	Chiriaș primărie	Chiriaș proprietar	Total
Cu TV color	112	74	44	230
Fără TV color	83	54	33	170
	195	128	77	400

Putem trece acum la calculul distribuției χ^2.

Frecvențe observate (O)	Frecvențe estimate (E)	$(O-E)$	$(O-E)^2$	$\frac{(O-E)^2}{E}$
150	112	+38	1444	12,89
45	83	-38	1444	17,40
60	74	-14	196	2,65
68	54	14	196	3,63
20	44	-24	576	13,09
57	33	+24	576	17,45
			χ^2	= 67,11

Este necesar acum să găsim valoarea corespunzătoare a lui χ^2 din tabelul IV. Aceasta se realizează prin stabilirea lui v (gradul de libertate). Valoarea lui v, în acest

caz se calculează prin înmulțirea numărului de rânduri minus unu, cu numărul de coloane minus unu, respectiv

$$\nu = (\text{rânduri} - 1)\,(\text{coloane} - 1),$$

în acest caz:

$$\nu = (2 - 1)\,(3 - 1)$$
$$= 2 \text{ grade de libertate.}$$

Valoarea lui χ^2 pentru două grade de libertate în tabelul IV este 5,991.

Deoarece valoarea calculată (67,11) este mai mare decât valoarea din tabel (5,991) rezultă că vom respinge ipoteza nulă și vom admite că există o corelație între situația locativă și posesia unui TV color.

Note:

a) Tabelele 6.1 și 6.2 reprezentate în exemplul anterior cuprinzând frecvențele reale și estimate sunt cunoscute sub denumirea de tabele de contingență sau tabele de clasificare pe două căi.

b) În calculul valorii gradului de libertate prin formula (rânduri – 1) (coloane – 1) rubrica „total" de căsuțe de pe rânduri și respectiv coloane nu se ia în calcul.

c) Dacă atunci când calculăm valorile preconizate pentru fiecare căsuță obținem valori mai mici de 5, acuratețea testului χ^2 este anulată. În aceste situații, căsuța cu valoarea mai mică de cinci este însumată cu valoarea dintr-o căsuță alăturată, astfel încât valoarea fiecărei căsuțe să fie cel puțin egală cu 5.

d) Cu cât este mai mare valoarea lui χ^2, cu atât mai mari sunt diferențele dintre situația reală și cea estimată. Dacă rezultatele reale sunt egale cu cele estimate, χ^2 este de asemenea zero.

17. Proprietățile aditive ale lui c^2

χ^2 are proprietatea de a fi aditivă cu alte valori ale lui χ^2. Dacă unui număr de eșantioane îi corespund valorile $\chi_1^2, \chi_2^2, \chi_3^2$ etc, cu ν_1, ν_2, ν_3 etc. grade de libertate, aceste valori se pot însuma dând o valoare $\chi^2 = \chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2 + \ldots$ cu $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \ldots$ grade de libertate.

18. Testele aleatorii

În afara utilizării lui χ^2 pentru compararea frecvențelor reale și estimate din tabelele de contingență – pe care am arătat-o deja – testul χ^2 poate fi utilizat pentru a se stabili cât de mult corespund distribuțiile empirice (respectiv cele obținute din eșantioanele de date) cu distribuțiile teoretice (cum ar fi distribuția normală, Poisson

și binomică). Modul de lucru este similar cu cel descris anterior, în care frecvențele reale erau comparate cu cele estimate. În cazul acesta însă, frecvențele estimate sunt calculate în conformitate cu caracteristicile tipului de distribuție avut în vedere, pe baza tabelelor adecvate (normal, Poisson etc.), iar χ^2 este calculat în modul descris anterior.

Modul de lucru este ilustrat de următoarele exemple.

Nr. bucăți defecte	Nr. de cutii	Total defecte
0	40	0
1	37	37
2	17	34
3	5	15
4	1	4
5	0	0
	100	90

Exemplul 10

Becurile electrice pentru lanterne sunt ambalate în cutii de câte 5 și se aleg aleator 100 de cutii pentru testarea numărului de bucăți defecte.

Probabilitatea ca fiecare bec să fie un rebut este de $\frac{90}{100} \times 5 = 0{,}18$. *Se cere să se testeze pentru un nivel de semnificație de 5% dacă numărul de becuri defecte corespunde unei distribuții binomice.*

Soluția

Frecvențele observate sunt deja date, astfel încât este necesar numai să calculăm frecvențele preconizate dintr-un binom de distribuție la puterea a 5-a, adică $(p + q)^5$, unde $p = 0{,}18$ și $q = 1 - 0{,}18 = 0{,}82$.

Probabilitatea pentru diferitele valori ale lui p și q pot fi luate din tabelele de probabilități binomice, în cazul în care aveți așa ceva la dispoziție sau pot fi calculate prin dezvoltarea binomului, așa cum am arătat în capitolul 4 și anume:

$$p^5 + 5(p^4q) + 4(p^3q^2) + 3(p^2q^3) + 2(pq^4) + q^5.$$

De aici pot fi calculate probabilitățile de a avea 5, 4, 3, 2, 1, 0 becuri defecte, iar când $p = 0{,}18$ (probabilitatea ca un bec să fie defect) și $q = 0{,}82$ (probabilitatea ca nici un bec să nu fie defect), probabilitatea totală este cuprinsă între 0,0002 (adică $0{,}18^5$) de a avea cinci becuri defecte și 0,03711 (adică $0{,}82^5$) de a nu avea nici un bec defect. Atunci când cunoaștem valorile probabilităților respective le înmulțim cu 100 de cutii pentru a afla frecvența estimată care este folosită în calculul obișnuit al lui χ^2.

În tabelul următor dăm un sumar al acestor calcule.

Defecte	Nr. de cutii controlate	Probabilități binomice	Frecvențe estimate	$(O-E)^2$	$\frac{(O-E)^2}{E}$
0	40	0,3711	37,11	8,35	0,22
1	37	0,4069	40,69	13,62	0,33
2	17	0,1786	17,86	0,74	0,04
3	5	0,0392	3,92		
4	1	0,0040	0,4	2,76	0,64
5	0	0,0002	0,02		
				χ^2	= 1,23

Notă. Datorită valorii foarte mici ale frecvenței preconizate pentru 3, 4 și 5 becuri defecte, aceste valori au fost combinate pentru a da o singură valoare, esențial fiind faptul că indiferent dacă sunt modificate sau nu, ele nu influențează calculul în mod semnificativ.

Valoarea calculată a lui χ^2 este comparată cu valoarea lui χ^2 pentru gradul corezpunzător de libertate. În acest caz gradul de libertate este 2, valoare la care se ajunge în urma unui raționament pe care îl vom prezenta în continuare.

După combinarea ultimelor 3 clase, rezultă un total de 4 clase. Am considerat un grad de libertate pentru a pune de acord totalurile (respectiv 100 de cutii) și un altul pentru a pune de acord proporția medie a becurilor defecte (respectiv 0,18). Prin urmare, gradul de libertate va fi 6 – 2 = 4.

Valoarea lui χ^2 pentru două grade de libertate este 5,991 și cum valoarea calculată, respectiv 1,23 este cu mult sub această valoare, putem trage concluzia că valorile observate convin perfect pentru o distribuție binomică $(0,18 + 0,85)^5$.

Exemplul II

O zonă a unui oraș este împărțită într-un număr de 600 de careuri, urmărindu-se frecvența spargerilor în fiecare careu. Datele înregistrate au fost centralizate astfel:

Nr. de spargeri	Nr. de careuri	Spargeri totale
0	279	0
1	200	200
2	90	180
3	25	75
4	5	30
5	1	5
	600	480

Numărul mediu de spargeri este $= \frac{480}{600} = 0,8$.

Se cere testarea valabilității distribuției observate prin prisma unei distribuții Poisson, cu o medie de 0,8 la un nivel de semnificație de 0,55%.

Soluția

Enunțul problemei urmează același tipar ca și exemplul anterior, cu deosebirea că se folosesc probabilitățile Poisson (tabelul VI).

Tabelul se dezvoltă după cum urmează:

Nr. de spargeri	Nr. de careuri observate	Probabilitatea Poisson	Frecvențe estimate	$(O-E)^2$	$\frac{(O-E)^2}{E}$
0	279	0,4493	269,58	88,73	0,33
1	200	0,3593	215,7	246,49	1,14
2	90	0,1438	86,28	13,83	0,16
3	25	0,0383	22,98	4,08	0,18
4	5	0,0077	4,62	0,44	0,08
5	1	0,0012	0,72		
				χ^2	= 1,89

Există cinci clase de tipul $O - E$, gradul de libertate fiind $5 - 2 = 3$ iar valoarea lui χ^2 pentru trei grade de libertate este 7,815 (tabelul VI). Valoarea calculată fiind inferioară acestei valori, rezultă că valorile observate convin perfect unei distribuții Poisson.

Notă. Se poate folosi un model de lucru asemănător pentru testul aleator pentru o distribuție oarecare, ca și în cazul distribuției normale, cu excepția faptului că în acest caz se vor folosi probabilitățile și frecvențele adecvate pentru o distribuție normală. De asemenea, vom folosi 3 grade de libertate pentru adaptarea distribuției normale la o distribuție oarecare observată; deoarece distribuțiile trebuie să aibă aceeași medie, total și derivație standard. Aceasta înseamnă că se calculează valoarea lui χ^2 pentru $n - 3$ grade de libertate, unde n este numărul claselor de frecvențe estimate.

19. Corecția Yates

Când se folosește testul χ^2 în cazul unui tabel de contingență 2×2 (respectiv atunci când există un singur grad de libertate) pot apărea erori importante. Yates a arătat că rezultatul poate avea un grad de aproximație mai redus scăzând 0,5 din valoarea absolută a relației $(O - E)$ pentru fiecare element. Această operație este cunoscută sub denumirea de corecția Yates și trebuie aplicată de oricâte ori avem un test χ^2 de genul 2×2.

Exemplul 12 – utilizând corecția Yates.

În cadrul unei firme a avut loc o evaluare a numărului de fumători, rezultatele fiind următoarele:

	Bărbați	Femei
Fumători	48	27
Nefumători	58	57

Se cere să se testeze, pentru un nivel de semnificație de 5%, dacă evaluarea cuprinde vreo deosebire între numărul de fumători bărbați și femei.

Soluție

H_0, ipoteza nulă, este următoarea: nu există diferențe din acest punct de vedere, între bărbați și femei.

Există un singur grad de libertate, deoarece $(2-1)\times(2-1)=1$, iar χ^2 pentru un grad de libertate egal cu 1 și un nivel de semnificație de 5% este 3,84, astfel încât opțiunile sunt:

- Se acceptă H_0 și de respinge H_1 dacă $\chi^2 < 3,84$.
- Se respinge H_0 și de acceptă H_1 dacă $\chi^2 > 3,84$.

	Total	Bărbați		Femei	
		Observați	Estimați	Observate	Estimate
Fumători	75	48	41,8	27	33,2
Nefumători	115	58	64,2	57	50,8
	190	106	106	84	84

Observat	Estimat	$(O-E)$	$(\|O-E\|-0,5)$	$(\|O-E\|-0,5)^2$	$\frac{(\|O-E\|-0,5)^2}{E}$
48	41,8	+6,2	5,7	32,49	0,77
58	64,2	-6,2	5,7	32,49	0,51
27	33,2	-6,2	5,7	32,49	0,98
57	50,8	+6,2	5,7	32,49	0,64
					2,90

Tabelul de contingență va fi:

Aplicăm în continuare corecția Yates și nu mai calculăm $(O-E)$, ci $(|O-E|-0,5)$.

Prin urmare, valoarea lui χ este 2,9 iar valoarea critică find 3,84, acceptăm ipoteza nulă și concluzionăm, pentru un nivel de semnificație de 5%, că nu există deosebiri între barbați și femei în ceea ce privește fumătorii.

20. Controlul statistic al proceselor

Controlul statistic al procesului, denumit și controlul calității statistice, a fost pus la punct pentru prima dată în SUA în anii '20 ai secolului nostru, devenind una dintre cele mai importante aplicații ale statisticii în domeniile industriale. Pe scurt, se

aleg eșantioane de produse, care sunt cântărite, măsurate etc, de la caz la caz și apoi se aplică teste statistice pentru a se stabili dacă procesul se desfășoară în condiții satisfăcătoare sau nu. Și aceasta este o metodă de testare a ipotezei.

Toate metodele și procesele de producție sunt supuse variabilității. De exemplu, o mașină care umple containere de ulei de 5 litri va fi reglată pentru o medie de 5 litri/container, dar în mod invariabil, unele containere vor conține cu puțin peste 5 litri iar altele cu puțin sub 5 litri. Această variabilitate se poate datora unui număr de două cauze:

• **variabilitatea datorită cauzelor inerente**

Sunt cauze de neocolit, inevitabile, de variabilitate, inerente, datorate naturii procesului, mașinilor utilizate, materialelor etc. Aceste cauze determină o distribuție a valorilor (dimensiuni, greutăți, volume etc) care este aproximativ normală și previzibilă. Dacă variabilitatea eșantioanelor se datorește numai unor cauze inerente, se spune că *procesul se află sub control.*

• **variabilitatea datorită cauzelor speciale**

Acestea sunt variații cauzate de modificări specifice în cadrul procesului sau mediului de producție, cum ar fi: utilizarea unui material necorespunzător și a unor mașini greșit reglate, ca urmare a defectării unei componente etc. Aceste cauze produc instabilitatea distribuțiilor, care nu mai sunt previzibile, iar în acest caz *procesul scapă de sub control.*

Scopul general al controlului procesului sau calității sale este acela de se știi dacă procesul se află sub control, a scăpat de sub control sau este pe cale de a scăpa de sub control, dacă se continuă tendința de la un moment dat. Desigur, metodele statistice nu pot identifica o cauză specifică a variațiilor, dar pot să funcționeze ca sistem de avertizare preventivă, care indică conducerii faptul că se petrece ceva ciudat pe liniile de producție.

Se va constata că procedeul prezentat este foarte asemănător testării ipotezelor, cu următoarele amendamente:

Ipoteza nulă H_0 are semnificația că procesul este sub control și se desfășoară în cadrul limitelor prestabilite.

Ipoteza alternativă H_1 are semnificația că procesul a scăpat de sub control.

În practică, controlul statistic al proceselor se realizează prin intermediul diagramelor de control.

21. Diagramele de control

Sunt diagrame pe care se notează direct valorile culese din eșantioane. Aceste valori pot reprezenta, de exemplu, diametrul mediu al eșantionului, ordinea elementelor care formează eșantionul, proporția de elemente defecte și așa mai departe. Diagramele conțin, trasate în prealabil, limitele între care se exercită controlul (limite calculate anterior pe baza principiilor statistice) iar valorile eșantioanelor se

compară cu limitele de control. În mod normal există două niveluri ale limitelor de control – o limită de avertisment și o limită de acțiune. Dacă o reprezentare se face în afara limitelor de control, trebuie să se intervină pentru depistarea cauzei care a generat variația.

Diagramele asigură, așadar, mijloacele vizuale care permit realizarea distincției dintre variabilitatea datorată cauzelor inerente și variabilitatea datorată unor cauze speciale (procesul fiind scăpat de sub control). Diagramele de control pot fi utilizate și înțelese de persoanele care au cunoștințe reduse sau care nu au nici un fel de cunoștințe în domeniul statisticii. Există diferite tipuri de diagrame de control, pentru medii, moduri de ordonare, proporții și așa mai departe. Principiile generale de construcție și utilizare sunt arătate în cele ce urmează, cu ajutorul unei diagrame de control a mediei.

22. Diagrama de control a mediei

Exemplul 13

O mașină produce bolțuri cu diametrul de 10 mm și se știe că lucrează cu o deviație standard de 0,15 mm. La fiecare 20 de minute se iau eșantioane de câte 6 bolțuri, fiecare bolț fiind măsurat. Rezultatele măsurătorilor în cazul a 5 eșantioane consecutive sunt reproduse în continuare:

Eșantion nr.	1	2	3	4	5
Diametrele (mm)	100,2	99,8	100,2	100,4	100,1
	100,1	99,9	100,1	99,8	100,0
	99,7	100,3	99,8	100,2	99,8
	100,0	100,1	100,1	99,8	100,2
	100,2	99,8	100,2	100,2	100,1
	100,1	99,8	99,7	100,3	100,1
Media pe eșantion	100,05	100,02	99,95	100,12	100,07

a) Calculați limitele superioare și inferioare de avertizare și acțiune pornind de la o limită de certitudine de 95%.

b) Marcați liniile de control și rezultatele eșantioanelor pe diagrama de control a mediei.

c) Interpretați diagrama.

Soluție:

a) *Calculul liniilor de control.* Pornind de la teoria eșantioanelor, se știe că o medie de ±1,95 pentru eroarea standard, cuprinde în medie 95% din populație (cu alte cuvinte, am putea spune că există o șansă de numai 5% de a avea o valoare medie pentru eșantionul respectiv în afara acestor valori). Pentru un nivel de 99% din populație, media ar fi ±2,58 pentru eroarea standard.

Prin urmare, în acest exemplu:

1) *Limitele de avertizare* (nivelul de 95%) = media ± 1,96 erori standard

$$= 100 \pm 1{,}96 \frac{0{,}15}{\sqrt{6}}$$

$$= 100 \pm 0{,}12$$

(Media eșantionului se află în afara acestor limite, în 5% din cazuri, astfel încât limitele acestea pot fi considerate ca limite de avertisment asupra faptului că ceva nu funcționează cum trebuie).

2) *Limitele de acțiune* (nivelul de 99%) = media ± 2,58 erori standard

$$= 100 \pm 2{,}58 \frac{0{,}15}{\sqrt{6}}$$

$$= 100 \pm 0{,}158$$

(Media eșantionului se poate afla în afara acestor limite numai în 1% din cazuri, astfel încât limitele acestea pot fi considerate ca un avertisment clar că aproape cu siguranță ceva nu funcționează cum trebuie, trebuind să se intervină).

b) A se vedea fig. 6.2.

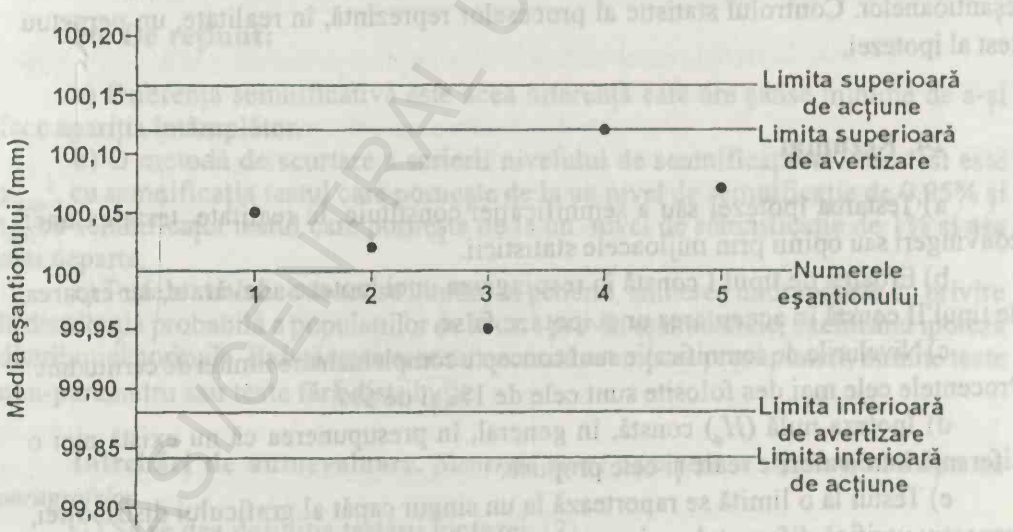


Fig. 6.2

c) Media pentru eșantionul 4 se află chiar pe linia de avertizare, dar media următorului eșantion se află în interiorul limitelor de control, astfel încât se poate presupune că nu există nici o problemă. În mod frecvent, în asemenea situații, se prelevă un nou eșantion, de îndată ce se găsește un eșantion care se află pe linia de control sau în imediata sa vecinătate.

Notă. În fig. 6.2 se lucrează cu o probabilitate de 95%, care se concretizează în valori de 1,96 și respectiv 2,58. Desigur, se pot alege și alte limite, numărul erorilor standard ajustându-se în mod corespunzător.

23. Alte tipuri de diagrame de control

Este posibil ca un proces să dea o medie satisfăcătoare, dar variațiile în jurul valorii medii pot fi îngrijorătoare. În aceste condiții, ordinea valorilor elementelor fiecărui eșantion (de la cel mai mare la cel mai mic) poate fi monitorizată folosind o diagramă de control a ordinii. Cu ajutorul acestor diagrame, de regulă se pot trasa numai nivelurile *superioare* de avertizare și de intervenție deoarece, de obicei, numai valorile ridicate produc probleme.

Mai pot fi imaginate diagrame alternative de control pentru diferite atribute ale elementelor eșantioanelor, cum ar fi diagramele reprezentând proporția elementelor care, într-un mod sau altul, sunt defecte. Nivelul central se poziționează la nivelul valorii medii preconizate a elementelor defecte, iar după fiecare evaluare se trasează un punct reprezentând numărul real al elementelor defecte.

Toate diagramele pornesc de la aceleași principii generale descrise mai înainte și care se bazează pe proprietățile distribuției normale și ale teoriei formării și prelevării eșantioanelor. Controlul statistic al proceselor reprezintă, în realitate, un perpetuu test al ipotezei.

24. Rezumat

a) Testarea ipotezei sau a semnificației constituie, în realitate, testarea unei convingeri sau opinii prin mijloacele statisticii.

b) Eroarea de tipul I constă în respingerea unei ipoteze adevărate, iar eroarea de tipul II constă în acceptarea unei ipoteze false.

c) Nivelurile de semnificație sunt concepte complementare limitei de certitudine. Procentele cele mai des folosite sunt cele de 1% și de 5%.

d) Ipoteza nulă (H_0) constă, în general, în presupunerea că nu există nici o diferență între valorile reale și cele propuse.

e) Testul la o limită se raportează la un singur capăt al graficului distribuției, respectiv verifică diferențele existente într-o singură direcție.

f) Testarea ipotezei este folosită cel mai adesea pentru testarea mediilor și proporțiilor eșantioanelor.

g) Diferențele dintre mediile și proporțiile unui eșantion, cu mediile și proporțiile corespunzătoare ale altuia sunt folosite de asemeni și în testele de semnificație.

Eroarea standard a distribuției mediilor este

$$s_{(\bar{x}_A - \bar{x}_B)} = \sqrt{\frac{s_A^2}{n_A} + \frac{s_B^2}{n_B}}.$$

Eroarea standard a diferențelor dintre proporții este

$$s_{(p_1 - p_2)} = \sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}.$$

h) Distribuția „*t*" este utilizată pentru testarea semnificației atunci când eșantionul cuprinde mai puțin de 30 de elemente. Numărul gradelor de libertate, *n*, este $n - 1$ sau, pentru combinația a două eșantioane, $n_1 + n_2 - 2$. Dacă deviația standard a populației este cunoscută, se poate folosi distribuția normală. Distribuția „t" este necesară atunci când se cere estimarea lui σ din *S*.

i) Distribuția χ^2 este folosită pentru compararea unei distribuții reale cu o distribuție preconizată. Formula este

$$\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}.$$

j) Valorile lui χ^2 sunt mărimi aditive.

26. De reținut:

a) Diferența semnificativă este acea diferență care are șanse minime de a-și face apariția întâmplător.

b) O metodă de scurtare a scrierii nivelului de semnificație al unui test este $\chi_{0,05}^2$, cu semnificația testul care pornește de la un nivel de semnificație de 0,05% și $t_{0,01}$ cu semnificația testul care pornește de la un nivel de semnificație de 1% și așa mai departe.

c) Testele statistice descrise impun, în general, emiterea unor ipoteze cu privire la distribuția probabilă a populațiilor de la care provin eșantioanele, excluzând ipoteza distribuției normale. Există teste care nu necesită asemenea presupuneri, numite teste non-parametru sau teste fără distribuție.

Întrebări de autoevaluare. *Numerele dintre paranteze se referă la numerotarea paragrafelor.*

1) Să se dea definiția testării ipotezei. (2)
2) Definiți erorile de tipul I și erorile de tipul II. (4)
3) Definiți nivelul de semnificație. (5)
4) Definiți diferența semnificativă din punct de vedere statistic. (5)
5) Ce reprezintă ipoteza nulă? Dar ipoteza alternativă? (6)
6) Ce este testul la două limite? (6)
7) Care sunt valorile adecvate pentru eroarea standard, care se folosesc în cadrul unui test la o singură limită pentru un nivel de 5%? Dar pentru unul de 1%? (6)

8) Care este eroarea standard a unei proporții? (6)
9) Cum se calculează eroarea standard a unei distribuții de medii aritmetice? (10)
10) Când este folosită distribuția „t" ? (12)
11) Care este cea mai bună estimare a deviației standard a unei populații la prelevarea a două eșantioane? (14)
12) Ce este formula χ^2?
13) Cum se calculează „frecvențele preconizate" pentru a fi utilizate în formula χ^2 ? (16)
14) Ce este testul aleator ?
15) Ce este corelația Yates?
16) Ce este controlul statistic al proceselor? (20)
17) Cum se calculează liniile de control de pe diagramele de control? (21)
18) Ce este diagrama de control a șirurilor? (23)

Exerciții cu răspunsuri

1. Au fost comparate normele realizate de doi muncitori, în același număr de zile, obținându-se următoarele rezultate.

	Norma medie zilnică	Deviația standard	Numărul de zile ale observației
Muncitorul A	30	6	50
Muncitorul B	32	5	60

Există vreo diferență semnificativă în ceea ce privește normele realizate pentru un nivel de semnificație de 95%?

2. O companie de curierat rapid garantează că 90% din livrări sunt făcute la timp. În ultimele săptămâni s-au făcut 80 de livrări, dintre care 6 au depășit termenul, iar conducerea a făcut afirmația că pentru un nivel de semnificație de 95% s-a înregistrat o îmbunătățire a proporției livrărilor la termen.

a) Are această afirmație un suport real?
b) Dacă nu, pentru ce nivel de semnificație ar căpăta un suport real?

3. Au fost testate trei dozatoare electronice, notându-se erorile de cântărire.

Mașina	Eroarea, g
1	4,6
2	8,2
3	2,1
4	6,3
5	5,0
6	3,6
7	1,4
8	4,1
9	7,0
10	4,5

Directorul de achiziții face afirmația că au fost achiziționate până în acel moment numai mașini care aveau eroarea medie de 3,8 g, dar că mașini testate s-ar afla sub acest standard.

Testați afirmația făcută pentru un nivel de semnificație de 5%.

Răspunsuri la exerciții:

$$\text{Eroarea standard (muncitorul A)} = \frac{6}{\sqrt{50}} = 0{,}849.$$

$$\text{Eroarea standard (muncitorul B)} = \frac{5}{\sqrt{60}} = 0{,}645.$$

1. $\text{Eroarea standard a diferenței mediilor} = \sqrt{0{,}849^2 + 0{,}645^2} = 1{,}066;$

$$Z = \frac{30 - 32}{1{,}066} = 1{,}876.$$

Scorul Z pentru testul la două limite, pentru un nivel de semnificație de 5% este 1,96, așadar nu este vorba despre o diferență semnificativă.

2. a) $\text{Eroarea standard} = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}1 \times 0{,}9}{0{,}80}} = 0{,}033,$

unde p este fosta proporție.

$$\text{Proporția actuală } p = \frac{6}{80} = 0{,}075.$$

$$\therefore \frac{0{,}1 - 0{,}075}{0{,}033} = 0{,}75 \text{ eroarea standard.}$$

Valoarea aceasta este mai mică decât erorile standard pentru un nivel de semnificație de 5% (±1,96), astfel încât se poate concluziona că nu s-a produs nici o îmbunătățire semnificativă a livrărilor.

b) Valoarea (0,75 x eroarea standard) măsurată în stânga și în dreapta valorii medii acoperă o suprafață de 0,2734 + 0,2734 = 0,5464. Așadar, pentru un nivel de semnificație de 54,64% putem să spunem 55% din populație corespunde afirmației. Prin urmare, afirmația directorului poate fi acceptată pentru orice nivel de certitudine mai redus de 55%, care reprezintă un nivel foarte redus.

3. Valoarea medie calculată a eșantionului, 4,68 g.

Deviația standard a eșantionului = 1,968.

∴ Cea mai bună evaluare a deviației standard a populației

$$= 1{,}986\sqrt{\frac{n}{n-1}} = 1{,}986\sqrt{\frac{10}{9}} = 2{,}093.$$

$$\therefore \text{Eroarea standard a mediei} = \frac{2{,}093}{\sqrt{10}} = 0{,}66.$$

Avem 10 – 1 = 9 grade de libertate și este vorba despre un test la o singură limită. Din tabelul III, pentru un nivel de semnificație de 5%, valoarea testului la o limită este 1,833.

∴ Media eșantionului ar trebui să fie cuprinsă între $1{,}833 \times 0{,}66$ g = 1,21 g.

Diferența reală este 4,68 – 3,8 g = 0,88 g. Cifrele nu susțin afirmația directorului de achiziții.

BCU IAȘI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

7. CORELAȚIE ȘI REGRESIE

1. Obiective

După parcurgerea acestui capitol:

- veți putea descrie relațiile dintre variabile;
- veți înțelege tipurile de corelații existente între variabile;
- veți ști cum se calculează și interpretează coeficientul de corelație instantaneu al produsului (r);
- veți înțelege că relația $y = a + bx$ reprezintă ecuația generală a dreptei;
- veți putea calcula constantele a și b, folosind cadranele Least;
- veți ști cum se calculează coeficientul de determinare;
- veți înțelege cum se calculează coeficientul Spearman de corelație pentru serii.

2. Relații între variabile

În afaceri apar în mod frecvent situații în care modificările unui factor par a fi legate de modificările unuia sau mai multor alți factori. De exemplu, un director de marketing observă o creștere a nivelului vânzărilor atunci când cresc cheltuielile pentru reclamă. Directorul de transport observă că, pe măsură ce mijloacele auto parcurg tot mai mulți kilometri, necesitățile de service sunt tot mai frecvente.

Aceste situații pot da naștere la întrebări în mintea directorului sau a analistului. Acestea pot fi rezumate după cum urmează:

a) Variațiile factorilor au loc în aceeași direcție sau în direcții opuse?

b) Este posibil ca modificările suferite de o variabilă să determine sau să fie determinate de modificări ale altora? (aceasta este o relație importantă, cunoscută sub denumirea de *relație cauzală).*

c) Este posibil ca modificări aparent corelate să fie pur întâmplătoare?

d) Este posibil ca modificarea unui singur factor sau variabilă să fie rezultatul unei combinații de modificări suferite de mai mulți alți factori sau variabile?

e) Este posibil ca modificările a doi factori să fie corelate, dar nu direct, ci prin intermediul modificărilor unui al treilea factor, care până în momentul analizei nu au fost sesizate?

f) Care este rolul cunoașterii acestor relații?

Cel mai adesea, managerul sau analistul sunt interesați de realizarea unui anumit tip de predicție. De exemplu, directorul pentru controlul calității ar putea solicita să se afle care este efectul creșterii cheltuielilor pentru controlul de calitate asupra numărului de unități de produs defecte descoperite. Directorul pentru vânzări poate să solicite de exemplu o previziune asupra nivelului vânzărilor în cazul creșterii cheltuielilor de reclamă cu 20%. În mod evident, în toate aceste cazuri, în mințile directorilor există convingerea că între factorii menționați există anumite legături.

3. Metodologia

Să presupunem că directorul a simțit că două variabile sau fenomene au o evoluție care sugerează existența unei corelații între ele. Cum poate el să acționeze pentru a aprofunda analiza acestei probleme? O posibilă metodologie este următoarea:

a) Observă și notează ceea ce se întâmplă în mod sistematic.

b) Își elaborează o teorie cu privire la evenimentele observate.

c) Trasează un grafic sau o diagramă cuprinzând observațiile sale.

d) Cuantifică ceea ce se întâmplă.

e) Folosește rezultatele.

Această metodologie este dezvoltată în continuare în cadrul acestui capitol și diferitele stadii ale acesteia sunt ilustrate cu ajutorul problemei formulate în exemplul 1.

Exemplul 1

Directorii unei întreprinderi constituită din zece fabrici aflate în funcțiune, de aceleași dimensiuni, care produc componente mici, au observat următorul model legat de cheltuielile pentru controlul de calitate și numărul de rebuturi care au fost livrate clienților.

Observația numărul	Cheltuieli de control de calitate la 1000 de unități, pence	Unități defecte la 1000 de unități livrate
1	25	50
2	30	35
3	15	60
4	75	15
5	40	46
6	65	20
7	45	28
8	24	45
9	35	42
10	70	22

Ei își pun problema cât de puternică este relația dintre cheltuielile pentru controlul de calitate și numărul de rebuturi livrate clienților și în ce măsură se poate anticipa numărul de rebuturi livrate, cunoscându-se cheltuielile pentru controlul de calitate.

4. Trasarea unei diagrame pentru ilustrarea exemplului 1

Este evident că directorii din exemplu au constatat și notat ceea ce se întâmplă, într-o manieră sistematică. De asemenea, au dedus logic că este foarte posibil să existe o legătură cauzală între cheltuielile pentru controlul de calitate și numărul de rebuturi livrate clienților; cu cât sunt mai mari cheltuielile, cu atât este mai mic numărul de rebuturi livrate. Pornind de la această presupunere – care este o formă de ipoteză – datele pot fi reprezentate grafic, respectând următoarea convenție: axa orizontală x corespunde variabilelor independente sau cauzale, reprezentate, în acest caz, de cheltuieli, în timp ce axa verticală y corespunde variabilelor dependente, care în acest caz sunt reprezentate de numărul de rebuturi livrate. Acest gen de diagramă este cunoscut sub denumirea de *diagramă de dispersie.*

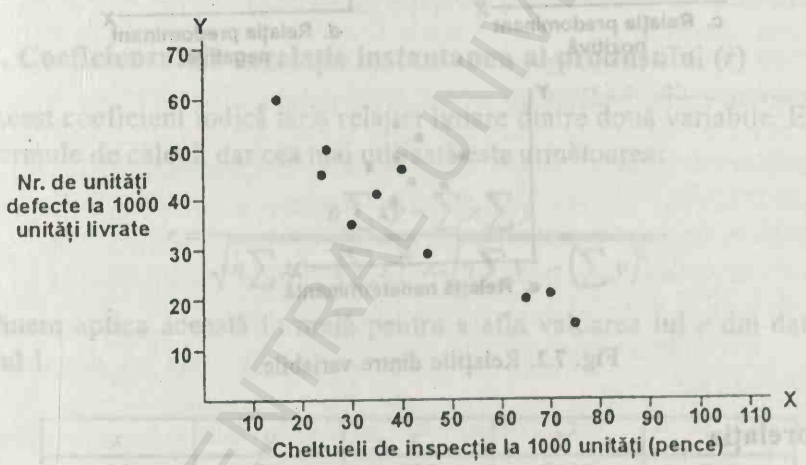


Fig. 7.1. Diagrama de dispersie (bazată pe exemplul 1).

În fig. 7.1 se poate observa o tendință descrescătoare clară a numărului de rebuturi livrate pe măsura creșterii cheltuielilor pentru controlul de calitate. Această reprezentare grafică poartă denumirea de *pantă negativă* sau *relație negativă.*

5. Diferite relații între variabile

Fig. 7.1 pornește de la datele cuprinse în exemplul 1. Există însă posibilitatea ca reprezentarea grafică pe diagramă să aibă și alte aspecte, variind de la panta perfect negativă sau perfect pozitivă, până la reprezentarea relației nedeterminate. Relația perfectă este acea relație în care punctele reprezentând relațiile instantanee dintre variabile sunt situate pe o dreaptă, cum sunt diagramele din fig. 7.2, *a* și *b*.

Se observă că punctele trasate în fig. 7.1 sunt similare relației din fig. 7.2 *d*, astfel încât putem concluziona că este vorba despre o relație predominant pozitivă între datele din exemplul 1, dar nu perfect pozitivă.

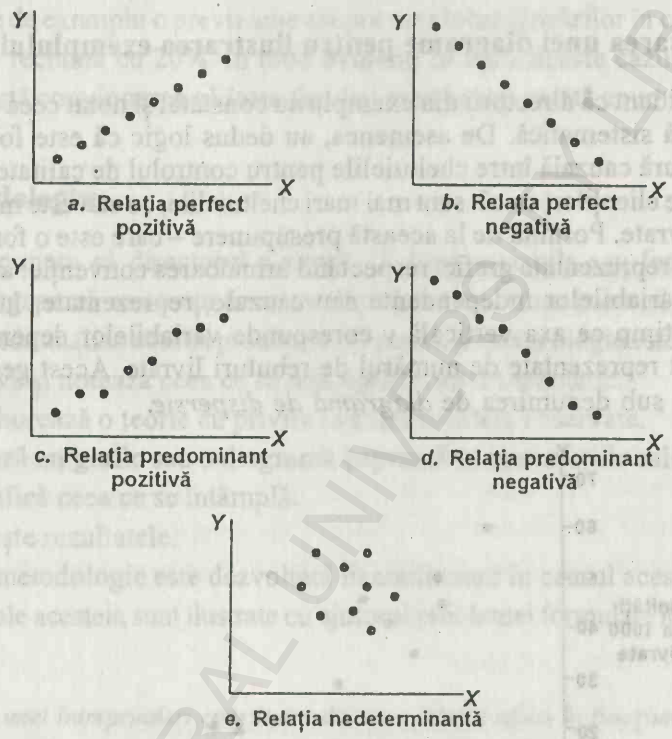


Fig. 7.2. Relațiile dintre variabile.

6. Corelația

Atunci când valoarea unei variabile este legată de valoarea alteia, se spune că sunt *corelate*. Ca urmare, corelația reprezintă o inter-relaționare sau asociere. De exemplu, este probabil să existe o anumită corelație între înălțimea și greutatea unei persoane.

Variabilele pot fi:

a) perfect corelate (variațiile lor producându-se la unison);

b) parțial corelate (există un anumit grad de corelare, diferit de cazul perfect);

c) necorelate (nu există nici o relație între variațiile lor).

Variațiile unei variabile pot produce variații *în același sens* ale altei variabile, aceasta fiind corelația *pozitivă*; un exemplu poate fi greutatea și înălțimea. Mai este posibil ca, dimpotrivă, variația unei variabile să producă variații *în sens opus* ale celeilalte variabile, aceasta fiind corelația *negativă*. De exemplu, dacă se mărește prețul unui produs, se vor cumpăra mai puține unități din produsul respectiv.

Gradul de corelație dintre două variabile poate fi măsurat și există 2 mărimi ale corelației, notate *r* și *R*.

a) *Coeficientul de corelație instantaneu al produsului*, notat cu *r*.

Acest coeficient oferă o măsură a tăriei asociației dintre două variabile, una fiind variabila dependentă, iar cealaltă, variabila independentă. Valoarea lui *r* poate varia de la +1 (pentru corelația perfect pozitivă, când variațiile celor două variabile au același sens) până la –1 (pentru corelația perfect negativă, când *y* scade liniar odată cu creșterea lui *x*).

b) *Coeficientul de corelație de serie*, notat cu *R* (care va fi dezvoltat în paragraful 23).

Acest coeficient oferă o măsură a asocierii dintre cele două seturi de date aranjate sau înseriate. Valoarea lui *R* poate varia de asemeni de la +1 (corelația perfect pozitivă a seriei), până la –1 (corelația perfect negativă a seriei).

Rezultă că valoarea zero sau foarte apropiată de zero a oricăruia dintre cei doi coeficienți semnalează inexistența unei corelații.

7. Coeficientul de corelație instantaneu al produsului (*r*)

Acest coeficient indică tăria relației liniare dintre două variabile. Există mai multe formule de calcul, dar cea mai utilizată este următoarea:

$$r = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} \times \sqrt{n\sum y^2 - \left(\sum y\right)^2}}.$$

Putem aplica această formulă pentru a afla valoarea lui *r* din datele de la exemplul 1.

x	y	x^2	y^2	xy
15	60	225	3600	900
24	45	576	2025	1080
25	50	625	2500	1250
30	35	900	1225	1050
35	42	1225	1764	1470
40	46	1600	2116	1840
45	28	2025	784	1260
65	20	4225	400	1300
70	22	4900	484	1540
75	15	5625	225	1125
424	363	21,926	15,123	12,815
Σx	Σy	Σx^2	Σy^2	Σxy

Aplicând formula de mai înainte:

$$r = \frac{10\times12.815 - 424\times363}{\sqrt{(10\times21.926 - 424^2)}\times\sqrt{(10\times15.123 - 363^2)}}$$

$$= \frac{128.150 - 153.912}{\sqrt{(219.260 - 179.776)}\times\sqrt{(151.230 - 131.769)}}$$

$$= \frac{-25.762}{\sqrt{(39.484)}\times\sqrt{(19.461)}} = -0,93.$$

Aşadar, coeficientul de corelare este –0,93, ceea ce indică o asociere predominant negativă între cheltuielile pentru controlul de calitate şi numărul de rebuturi livrate. Se va vedea că din această formulă se obţine semnul corect al coeficientului (respectiv – sau +).

Notă. O corelaţie foarte puternică între două variabile va avea o valoare a lui *r* mai mare de –0,9 respectiv +0,9. Dacă valoarea lui *r* este mai mică de 0,5 să presupunem, între variabile există o corelaţie foarte slabă.

8. Interpretarea valorii lui *r*

La analiza valorii calculate a lui *r* este necesar să se procedeze cu mare atenţie. O valoare mare (peste +0,9 sau -0,9) denotă o asociaţie foarte puternică între cele două variabile, numai dacă există o *relaţie cauzală* între ele, cu alte cuvinte, dacă o modificare a unei variabile produce o modificare a celeilalte. Este posibil să fie găsite două variabile care să dea o valoare calculată foarte mare pentru *r*, dar între care să nu existe nici o relaţie cauzală. Această situaţie este cunoscută sub denumirea de *corelaţie falsă* sau *fără sens*.

Un exemplu poate fi recolta de porumb din Statele Unite şi numărul deceselor prin înec din Marea Britanie. *Poate* exista o corelaţie aparentă foarte strânsă între aceste două variabile, dar în mod evident nu poate exista şi o relaţie cauzală între ele.

Un coeficient de corelaţie cu valoare redusă, aproape de zero, nu înseamnă întotdeauna că nu există nici o relaţie între cele două variabile. Tot ceea ce arată această valoare este că nu există nici o relaţie *liniară* între variabilele analizate – putând exista o relaţie foarte strânsă, dar *non-liniară*.

O altă problemă în analiza valorii lui *r* porneşte de la faptul că acest coeficient de corelaţie instantanee a produsului măsoară relaţia dintre *o singură* variabilă dependentă şi *o singură* variabilă independentă, în timp ce o anumită variabilă poate fi dependentă de *mai multe* variabile independente, caz în care este necesar să se calculeze *coeficientul de corelare multiplă* şi nu coeficientul de corelare pentru o pereche de variabile.

Notă. În fig. 7.2,

Diagrama *a*	$r = +1$
Diagrama *b*	$r = -1$
Diagrama *c*	r este apropiat de +1
Diagrama *d*	r este apropiat de –1
Diagrama *e*	r este apropiat de *zero*.

9. Semnificația lui r

Cel mai adesea, setul de observații pe perechi x și y se bazează pe un eșantion. Dacă se alege un alt eșantion, valoarea lui r este diferită, deși gradul de corelație dintre elementele populației originare rămâne același. În același mod în care cunoașterea valorii lui $\bar{x}$ permite realizarea unei estimări a valorii lui μ, cunoașterea valorii lui r îi permite analistului să estimeze valoarea lui ρ, coeficientul de corelație al populației.

În general, în întrebările de la concursuri și examene, dimensiunile eșantionului sunt limitate la câteva numere, care să poată fi prelucrate în timpul unui examen. Este îndoielnic faptul că dimensiunile reduse ale eșantioanelor date la examene ar fi suficiente pentru elaborarea unei judecăți credibile referitoare la posibilele corelații dintre valorile lui x și y. Dacă r are o valoare ridicată, acest lucru chiar înseamnă că *există* cu adevărat o relație strânsă întrevalorile lui x și y, sau numai eșantionul respectiv lasă impresia aceasta?

În mod reciproc, dacă r are o valoare scăzută, înseamnă că obligatoriu între valorile lui x și y nu există nici o corelație? Într-adevăr, este posibil să existe o corelație foarte strânsă, dar datele problemei nu o pun în evidență Mai mult chiar, corelația poate să existe, dar poate să nu fie liniară sau poate să nu fie directă.

Este posibil să se testeze dacă valoarea este diferită de zero, pentru ca analistul să fie îndreptățit să considere că valorile x și y sunt corelate. Pe scurt, testul este următorul:

$$H_0 : r = 0,$$
$$H_1 : r \neq 0.$$

Este vorba despre un test t pentru care valoarea statistică este dată de relația

$$|t| = \left| \frac{r - \rho}{\sqrt{1 - r^2}} \times \sqrt{n - 2} \right|.$$

Utilizând valorile din exemplul 1, adică $r = -0,93$ și $n = 10$, vom obține:

$$|t| = \left| \frac{-0,93 - 0}{\sqrt{1 - 0,93^2}} \times \sqrt{10 - 2} \right|$$
$$= 2,53 \times 2,83$$
$$= 7,16.$$

Valoarea din tabele pentru n–2, cu 8 grade de libertate, la un nivel de semnificație de 5% este 2,306. Din moment ce 7,16 este mai mare decât 2,306, rezultă că avem dovada numerică pe baza căreia putem elimina ipoteza nulă, concluzionând că valoarea lui ρ este diferită de zero.

10. Utilizarea informațiilor pentru realizarea previziunilor

Considerând că directorul este satisfăcut de valoarea lui r (-0,93 conform datelor din exemplul 1), este posibil să dorească să facă o previziune a nivelurilor probabile de rebuturi la diferite niveluri de cheltuieli pentru controlul de calitate. De exemplu, câte rebuturi pot să rezulte în cazul în care se cheltuie 50p pentru fiecare mie de unități de produs controlată?

Analiza fig. 7.1 și a datelor obținute din sondaje arată că se manifestă o tendință de scădere pe diagrama de dispersie. Se va vedea că previziunile făcute pe baza, să spunem, a numai două valori ale lui X nu sunt exacte, pentru că nu pot fi reprezentative pentru relația generală dintre X și Y. Ceea ce se cere este posibilitatea de prevedere a unei valori preconizate sau medii pentru y (respectiv numărul rebuturilor) pentru o anumită valoare a lui X (respectiv cheltuielile), utilizând în acest scop relația completă și cunoscută între X și Y. Procesul prin care se poate face acest calcul este cunoscut sub denumirea de *analiză de regresie* și îl vom prezenta în continuare, folosind proprietățile graficului dreptei.

11. Graficul dreptei

Relațiile liniare sau în linie dreaptă sunt cel mai des întâlnite în afaceri și în viața personală. De exemplu, multe companii publice își taxează abonații pe baza unei sume fixe (abonament) la care se adaugă anumite sume pentru unitatea de produs utilizată, cum ar fi unitățile de gaz natural, electricitate și de legături telefonice consumate. Să presupunem că abonamentul pentru o linie telefonică este de 15£ pentru fiecare post telefonic, la care se adaugă 5p pentru fiecare unitate de timp de utilizare a liniei respective. Dacă abonatul utilizează 50 de unități de convorbiri, se poate face următoarea previziune pentru totalul facturii postului telefonic:

$$\begin{aligned} \textit{Factura pentru serviciile de telefonie} &= 15{,}00£ + 50 \times 0{,}05 \\ &= 15{,}00£ + 2{,}50 \\ &= 17{,}50£. \end{aligned}$$

Se poate realiza un tabel de unități de convorbire și costuri după cum urmează:

Unități	Abonamentul £	Costul convorbirii £	Total £
50	15,00	2,50	17,50
100	15,00	5,00	20,00
150	15,00	7,50	22,50
200	15,00	10,00	25,00

Datele acestui tabel pot fi prezentate pe un grafic care, așa cum vă puteți da seama, este asemănător cu o diagramă de dispersie.

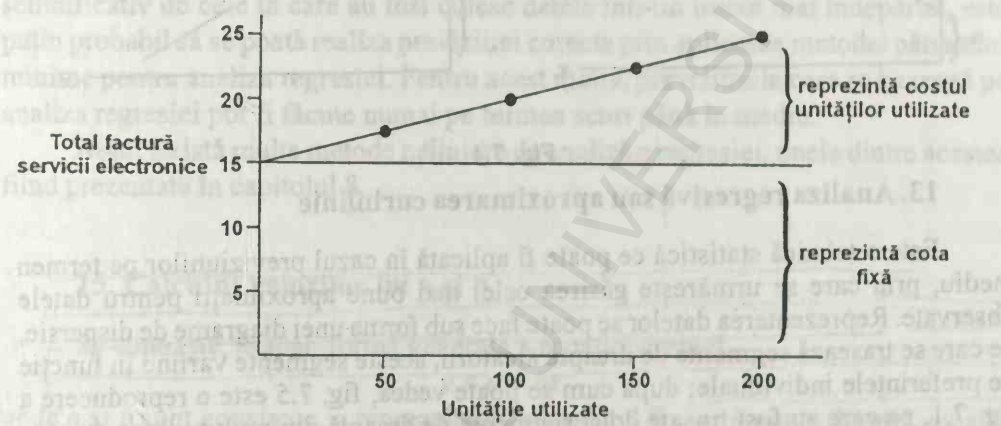


Fig. 7.3

Este posibil, astfel, ca un abonat să afle din fig. 7.3 costul total al facturii telefonice. Dacă, să spunem, au fost utilizate 130 de unități, totalul facturat este de 21,50£. Ceea ce este cu adevărat important în acest caz este faptul că se pot prevedea valori exacte ale lui *Y* pentru anumite valori ale lui *X*.

12. Ecuația dreptei

Graficul general al facturii telefonice poate fi generalizat și mai mult. Vom folosi următoarele notații:

$$15£ : a$$
$$0{,}05£ : b$$

Totalul unei facturi telefonice poate fi exprimat, așadar, după cum urmează:

$$y = a + bx,$$

unde x este numărul de unități de convorbire, „a" este factorul constant și „b" este rata de creștere a prețului unității de convorbire. *Această relație matematică reprezintă forma generală a ecuației dreptei,* în care a reprezintă elementul fix, iar b – panta dreptei, echivalentă cu elementul variabil.

În fig. 7.4 sunt prezentate două reprezentări liniare dintre cele mai frecvente. Într-un caz avem valori pozitive pentru *b* și de aici o pantă pozitivă (cum este în cazul facturii telefonice), iar în cealaltă valoarea lui *b* este negativă, de unde rezultă și o pantă negativă (ca în exemplul 1).

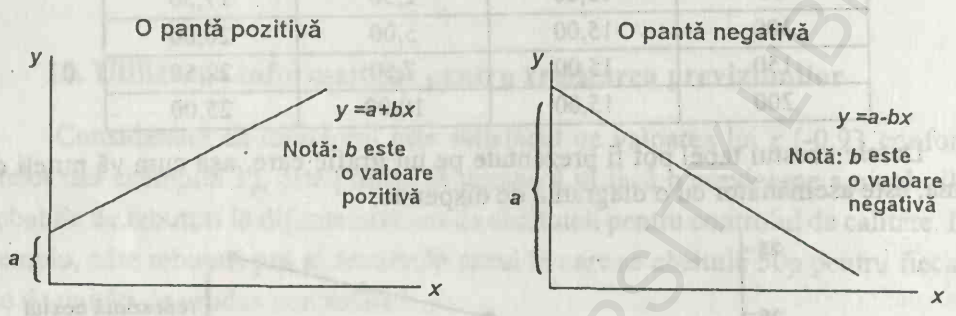


Fig. 7.4

13. Analiza regresivă sau aproximarea curbilinie

Este o tehnică statistică ce poate fi aplicată în cazul previziunilor pe termen mediu, prin care se urmărește găsirea celei mai bune aproximații pentru datele observate. Reprezentarea datelor se poate face sub forma unei diagrame de dispersie, pe care se trasează segmente de dreaptă aleatorii, aceste segmente variind în funcție de preferințele individuale; după cum se poate vedea, fig. 7.5 este o reproducere a fig. 7.1, pe care au fost trasate două segmente de dreaptă din multitudinea de segmente posibile. Deși metoda dreptei aleatorii este foarte rapidă, nu se poate emite nici o pretenție în privința exactității sale și este mai normal ca dreapta respectivă să fie calculată prin mijloace matematice, folosind metoda pătratelor minime.

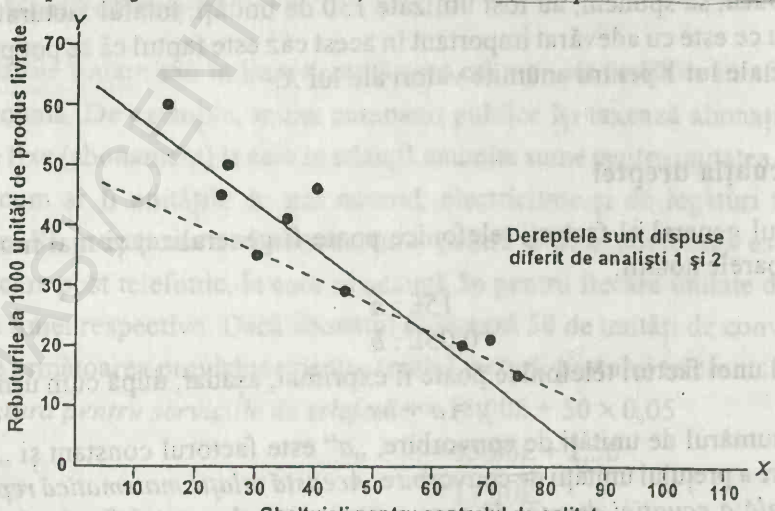


Fig. 7.5. Dreptele aleatorii pentru aproximarea ideală.

14. Pătratele minime

Pentru stabilirea dreptei reprezentând aproximația ideală prin mijloace matematice este necesar să se calculeze coordonatele unei drepte față de care totalul pătratelor deviațiilor datelor observate în mod direct față de dreapta respectivă, să fie reduse la minimum. Această metodă este cunoscută sub denumirea de metoda *pătratelor minime* sau metoda *pătratelor minime pentru regresia liniară*.

Analiza regresiei bazată pe pătratele minime acordă o importanță egală tuturor elementelor din seriile temporale, atât celor mai vechi, cât și celor mai recente. Prin urmare, dacă datele din trecutul recent au fost culese în condiții care diferă în mod semnificativ de cele în care au fost culese datele într-un trecut mai îndepărtat, este puțin probabil să se poată realiza previziuni corecte prin aplicarea metodei pătratelor minime pentru analiza regresiei. Pentru acest motiv, previziunile care se bazează pe analiza regresiei pot fi făcute numai pe termen scurt până la mediu.

Notă. Există multe metode neliniare de analiză a regresiei, unele dintre acestea fiind prezentate în capitolul 8.

15. Calculul valorilor lui a și b

Se cunoaște, așadar, forma generală a ecuației dreptei

$$y = a + bx,$$

unde a și b sunt constante, a reprezentând elementul fix iar b panta dreptei, cu alte cuvinte proporția creșterii verticale a lui y raportată la creșterea orizontală a lui x.

Pentru aflarea valorilor lui a și b este necesară rezolvarea unui sistem de două ecuații cunoscute sub denumirea de *ecuații normale*, care sunt:

$$an + b\sum x = \sum y \qquad \text{Ecuația 1}$$

$$a\sum x + b\sum x^2 = \sum xy \qquad \text{Ecuația 2}$$

unde n este numărul de perechi de numere.

Notă. Panta dreptei, b, este denumită în unele lucrări și coeficient de regresie.

Modul de aplicare a acestor ecuații va fi demonstrat utilizând datele numerice din exemplul 1, paragraful 3.

Ecuațiile devin:

$$10a + 424b = 363,$$

$$424a + 21\,926b = 12\,815.$$

Rezolvând ecuația se obțin următoarele valori: $a = 63{,}97$ și $b = -0{,}65$ (cu două zecimale).

Ca urmare, dreapta de regresie pentru exemplul 1 va fi

$$y = 63{,}97 - 0{,}65x.$$

Notă. Ecuațiile normale dau în mod automat semnul matematic corect (– sau +) pentru coeficientul de regresie b; în acest caz, acesta este minus.

Valorile calculate pot fi utilizate pentru trasarea corectă, din punct de vedere matematic, a dreptei reprezentând aproximarea ideală pe o diagramă de dispersie.

În mod obișnuit, trasarea dreptei se face prin unirea a trei puncte trasate pe baza valorii lui x: punctul superior, punctul inferior și punctul mediu.

În cazul datelor din exemplul 1, valorile lui x vor fi:

15, 42,4 și 75.

Fiecare dintre aceste valori este înlocuită în ecuația dreptei de regresie și valorile rezultate sunt marcate pe diagramă (fig. 7.6).

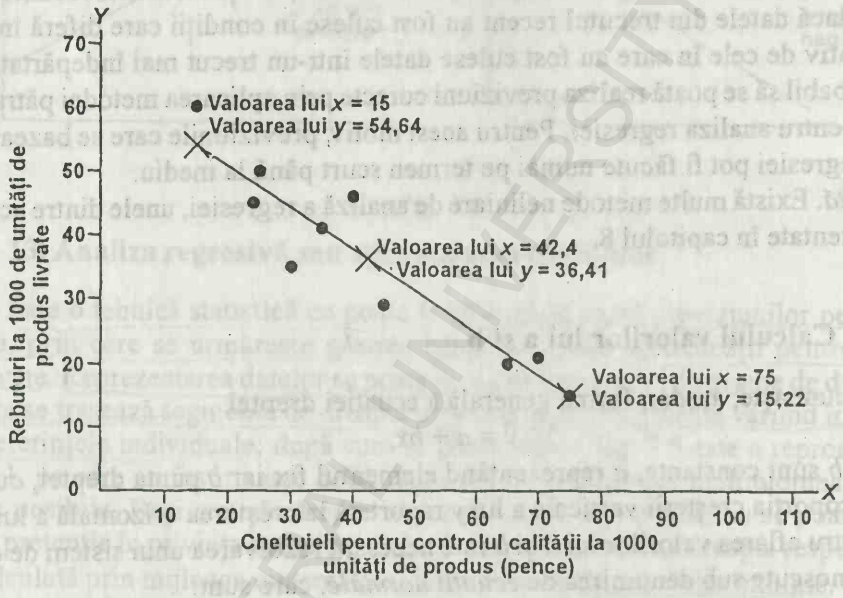


Fig. 7.6. Dreapta calculată pentru aproximarea ideală.

Notă. Valorile lui a și b au fost calculate în exemplul numeric de mai înainte prin înlocuirea lor în ecuațiile normale. O metodă alternativă ar fi transformarea ecuațiilor normale astfel încât valorile lui a și b să poată fi calculate direct. Aceste formule sunt următoarele:

$$a = \frac{\sum y - b\sum x}{n},$$

$$b = \frac{n\sum xy - \sum x \sum x}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}.$$

Adeseori este mai convenabil să utilizăm aceste formule alternative, în special în cazul utilizării unui calculator de buzunar. Să recalculăm valorile lui a și b utilizând formulele transformate și datele din exemplul 1:

$$b = \frac{10 \times 12.815 - 424 \times 363}{10 \times 21.926 - (424)^2}$$
$$= -0,65,$$
$$a = \frac{363 - (-0,65 \times 424)}{10}$$
$$= 63,86.$$

(Apare o mică diferență față de valoarea de 63,97 calculată anterior pentru a, datorită rotunjirii a două valori).

16. Utilizarea rezultatelor analizei regresive

După calcularea valorilor lui a și b se poate trece la realizarea previziunilor relative la valorile lui x care nu au apărut încă. Previziunile pot fi citite pe graficul pe care a fost trasată dreapta aproximării ideale (v. fig. 7.6) sau prin înlocuirea valorilor cunoscute în ecuația dreptei.

Revenind la exemplul 1, să ne amintim ca directorul dorea să se afle numărul de rebuturi descoperite dacă cheltuielile pentru controlul de calitate ar fi de 50p pentru o mie de unități de produs.

Din fig. 7.6 se vede că numărul de rebuturi descoperite ar fi de 31 la o mie de unități de produs verificate. Se poate aplica de asemeni și formula următoare:

$$y = 63,97 - 0,65x.$$

Așadar, când x este 50

$$y = 63,97 - 0,65(50) = 31,47.$$

Prin urmare, directorul va concluziona că vor fi descoperite în medie 31,47 rebuturi la o mie de unități de produs la un cost de 50p pentru controlul de calitate.

Trebuie să se acorde o mare atenție atunci când este vorba despre orice formă de predicție, pentru că altfel este posibil să se obțină rezultate absurde. Deși orice valoare a lui x poate fi folosită pentru realizarea mecanică a unei predicții, aceasta nu înseamnă că vom obține o previziune practică. Utilizând datele din exemplul 1, o previziune pornită de la valori ale lui x situate în afara intervalului 15, 75 (cea mai mare și cea mai mică valoare observată) conține presupunerea că relațiile calculate continuă să rămână valabile și în afara acestui interval, lucru care poate să fie adevărat, dar la fel de bine poate să nu fie adevărat. Ducând acest exemplu la extrem, vom obține pentru o cheltuială de 98p la o mie de unități de produs o predicție de „zero" rebuturi, ceea ce este foarte puțin probabil să se întâmple.

Este important de înțeles faptul că orice previziune, de exemplu cea de 31,47 calculată mai înainte, nu reprezintă decât o valoare izolată sau punctuală care, așa cum sunt folosite mediile eșantioanelor pentru estimarea mediilor populațiilor, poate fi aplicată numai pe un interval de certitudine.

Notă. Predicțiile realizate *în afara* intervalului de valori observate (15 și 75, cum este cazul în exemplul 1) sunt cunoscute sub denumirea de *extrapolări* iar predicțiile realizate *în interiorul* intervalului de valori observate se numesc *intrapolări.*

17. Acuratețea liniei de regresie

Oricât de mare ar fi dispersia datelor, utilizând metoda pătratelor minime, se poate calcula o dreaptă aproximativă ideală. În ciuda faptului că această dreaptă poate fi calculată întotdeauna, nu înseamnă că dreapta aproximației ideale este în mod obligatoriu de mare folos în scopul realizării unor predicții, în afara cazului în care este o reprezentare de mare acuratețe a tendințelor intime ale datelor de la care s-a pornit. Pentru a afla despre o dreaptă aproximativă ideală cât de utilă este cu adevărat, se introduce o mărime numită *coeficient de determinare.*

18. Coeficientul de determinare

Această mărime are simbolul r^2 (fiind pătratul coeficientului de corelație, r) și arată ce proporție din variațiile valorilor reale poate fi estimată în funcție de variațiile valorilor lui x.

$$\text{Astfel, } r^2 \text{ este raportul dintre } \frac{\text{Variația explicitată}}{\text{Variația totală}} = \frac{\sum (YE - \overline{Y})^2}{\sum (y - \overline{Y})^2},$$

unde:

YE este estimarea lui y dată de ecuația de regresie pentru fiecare valoare a lui x;

$\overline{Y}$ – media valorilor reale ale lui y;

y – valori individuale reale ale lui y.

Vom calcula în continuare coeficientul r^2 pentru valorile din exemplul 1, pentru care dreapta de regresie era:

$$y = 63{,}97 - 0{,}65x,$$

$$\overline{y} = \frac{363}{10}$$

$$= 36{,}3.$$

X	Y	YE	YE - $\overline{Y}$	$(YE - \overline{Y})^2$	Y - $\overline{Y}$	$(Y - \overline{Y})^2$
15	60	54,18	17,88	319,61	23,7	561,69
24	45	48,31	12,01	144,13	8,7	75,69
25	50	47,65	11,35	128,89	13,7	187,69
30	35	44,39	8,09	65,46	-1,3	1,69
35	42	41,13	4,83	23,31	5,7	32,49
40	46	37,87	1,57	2,45	9,7	94,09
45	28	34,60	-1,70	2,88	-8,3	68,89
65	20	21,55	-14,75	217,44	-16,3	265,69
70	22	18,29	-18,01	324,29	14,3	204,49
75	15	15,03	-21,27	452,43	21,3	453,69
	363			1680,89		1946,10

$$r^2 = \frac{1680,80}{1946,10}$$

$$= 0,8637.$$

$$\therefore 100r^2 = 86,37\%.$$

Interpretarea acestui rezultat este următoarea: 86,37% din variația numărului rebuturilor livrate clienților poate fi controlată prin modificarea valorii reale a lui x – sumele cheltuite pentru controlul de calitate. Alți factori implicați în afara lui x sunt răspunzători pentru 13,63% din variația lui y.

O formulă alternativă pentru r^2 este

$$r^2 = \frac{\left(n\sum xy - \sum x \sum y\right)^2}{\left(n\sum x^2 - (\sum x)^2\right) \times \left(n\sum y^2 - (\sum y)^2\right)}.$$

Note:

a) Dacă valorile pentru a și b sunt obținute pe baza unui eșantion, atunci reprezintă numai estimări ale valorilor reale ale coeficienților de regresie ai populației, notați de obicei cu α (alfa) și β (beta). Aceasta este o continuare a principiului prezentat în capitolelel anterioare referitoare la statistică și conform căruia media esantionului (deviația standard sau proporția) este utilizată ca estimare a valorii reale a populației.

b) Pentru a păstra o proporție restrânsă a exemplului, am folosit numai 10 perechi de valori. În practică este posibil să întâlniți cazuri cu mult mai multe valori implicate.

c) Analiza regresivă anterioară reprezintă dreapta de regresie a lui y în funcție de x. Axa verticală este axa y, axa variabilelor dependente și axa orizontală este axa x, axa variabilelor independente.

d) Analiza regresivă „y în funcție de x" este cea mai frecvent folosită, dar trebuie subliniat că există și drepte de regresie de tipul „x în funcție de y", caz în care x este variabila dependentă și y este variabila independentă.

e) Dacă r^2 are o valoare redusă, analistul trebuie să caute o relație neliniară între x și y, sau alți factori cauzali.

19. Eroarea standard în cazul regresiei

Ca și în cazul mediilor și al proporțiilor, de care ne-am ocupat în capitolele anterioare, trebuie să ținem seama și în acest caz de erorile asociate valorilor lui a și b. Se pot face anumite estimări referitoare la aceste valori, ca și în cazurile anterioare, atât sub forma unor teste de semnificație, cât și sub forma limitelor de încredere, care reprezintă o modalitate mult mai utilă în cazul analizei de regresie. În ambele cazuri trebuie calculată eroarea standard a regresiei. Există o serie de formule care pot fi utilizate în acest caz, dar am considerat că următoarea formulă este mai utilă, practică și simplă:

$$\text{Eroarea standard a regresiei} = S_e = \sqrt{\frac{\sum y^2 - a\sum y - b\sum xy}{n-2}}.$$

Această formulă nu oferă o valoare exactă a erorii standard deoarece cuprinde și valorile lui a și b care reprezintă, la rândul lor, tot aproximații.

Eroarea standard a regresiei este cunoscută și sub denumirea de *deviație standard reziduală*.

În continuare vom da un exemplu de calcul pornind de la valorile cuprinse în exemplul 1.

$$= \sqrt{\frac{15.123 - 63{,}97 \times 363 - (-0{,}65) \times 12.815}{10-2}}$$

$$= 5{,}38 \text{ componente defecte.}$$

Această valoare poate fi utilizată în continuare pentru determinarea limitelor de certitudine pentru dreapta de regresie calculată, asemănător cu modul de lucru prezentat în capitolul 6.

20. Erorile standard ale lui a și b

Dacă valorile lui a și b sunt calculate dintr-un eșantion, atunci pot fi privite ca fiind estimări ale valorilor medii ale populației, respectiv a și b. Într-un mod asemănător cu distribuția mediilor eșantioanelor, distribuția valorilor lui a și distribuția valorilor lui b se poate determina prin analizarea mai multor eșantioane.

Valoarea medie a lui a se notează cu a și reprezintă valoarea medie pe populație pentru a.

Valoarea medie a lui b se notează cu b și reprezintă valoarea medie pe populație pentru b.

Amândouă aceste distribuții au deviații standard cunoscute sub numele de erori standard, după cum urmează:

$$S_a = S_e \sqrt{\frac{\sum X^2}{n\sum X^2 - (\sum X)^2}},$$

$$S_b = \frac{S_e}{\sqrt{\sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{n}}},$$

unde S_e reprezintă eroarea standard a regresiei.

Intervalele de certitudine pentru a și b pot fi estimate după cum urmează:

Pentru a

$$\alpha = a \pm t \times S_a,$$

Pentru b

$$\beta = b \pm t \times S_b.$$

Valoarea lui t se bazează pe n-2 grade de libertate și pe nivelul de certitudine ales. În plus, se poate construi un test de semnificație pentru α și β.

Pentru a:

H_0 : α = cu o anumită valoarea aleasă,

H_1 : $\alpha \neq$ de o anumită valoarea aleasă.

Coeficientul statistic

$$t = \frac{a - \alpha}{S_a}.$$

Pentru b:

$$H_0 : \beta = 0,$$
$$H_1 : \beta \neq 0.$$

Coeficientul statistic

$$t = \frac{b - \beta}{S_b}.$$

În ambele cazuri, valoarea calculată a lui t este comparată cu valoarea din tabel pentru n–2 grade de libertate și pentru nivelul de semnificație ales.

În cazul lui β, se pornește în general de la presupunerea $\beta = 0$ pentru că atunci când β nu este diferit de zero, ecuația dreptei $Y = a + bx$ se reduce la $Y = a$ și deoarece dreapta pentru aproximația ideală trece prin punctele X și Y, rezultă că aceasta va fi tocmai valoarea lui Y. Prin urmare, pentru orice valoare a lui X, previziunea pentru Y va fi $\overline{Y}$. Testul de semnificație pentru β este, probabil, cel mai important din punct de vedere practic, dintre cele două teste de semnificație prezentate.

21. Aplicarea formulelor

Formulele de mai înainte pot fi aplicate utilizând valorile din exemplul 1.

$n = 10$ $\quad a = 63,97$

$\Sigma X^2 = 21926$ $\quad b = -0,65$

$\Sigma X = 424$ $\quad t = 2,306$

$S_e = 5,76$

Eroarea standard pentru *a*:

$$S_a = 5,76\sqrt{\frac{21\,926}{39\,484}} = 4,29.$$

Intervalul de certitudine de 95% pentru *a* este:

$$\alpha = 63,97 \pm 2,306 \times 4,29 = 63,97 \pm 9,89,$$

ceea ce înseamnă o limită superioară de 73,86 și o limită inferioară de 54,08.

Coeficientul statistic *t* pentru *a*:

$$H_0 : \alpha = 0$$
$$H_1 : \alpha \neq 0$$

$$t = \frac{a - \alpha}{S_a} = \frac{63,97 - 0}{4,29} = 14,91.$$

Din moment ce 14,91 este mult mai mare decât 2,306 (reprezentând valoarea lui *t* din tabele), ipoteza H_0 poate fi respinsă.

Eroarea standard a lui *b* va fi

$$S_a = \frac{5,76}{\sqrt{21,926 - \frac{424^2}{10}}} = 0,092.$$

Intervalul de certitudine de 95% pentru *b* este:

$$\beta = -0,65 \pm 2,306 \times 0,092 = -0,65 \pm 0,212,$$

ceea ce înseamnă o limită superioară de –0,438 și o limită inferioară de –0,862.

Coeficientul statistic *t* pentru *b*:

$$H_0 : \beta = 0$$
$$H_1 : \beta \neq 0$$

BC IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$t = \frac{b - \beta}{S_b}$$
$$= \frac{0,65 - 0}{0,092} = 7,07.$$

Din moment ce 7,07 este mai mare decât 2,306, ipoteza H_0 poate fi respinsă. Pe baza acestor dovezi, ecuația dreptei de regresie:
$y = 63,97 - 0,65x$ poate fi utilizată ca bază de predicție pentru exemplul 1.

22. Caracteristicile regresiei liniare

a) Constituie un mijloc util de realizare a previziunilor atunci când între datele problemei există o relație liniară. Liniaritatea (sau aproape liniaritatea) este preferată șirurilor operaționale atunci când trebuie rezolvate probleme legate de costuri, contribuții si vânzări.

b) Pentru orice dreaptă de regresie se poate calcula rapid o mărime reprezentând acuratețea aproximației.

c) Pentru a putea avea încredere în relațiile de regresie calculate, este preferabil să existe un număr cât mai mare de observații.

d) În cazul unor analize mai aprofundate, limitele de certitudine pot fi utilizate și la realizarea unor previziuni pornind de la formula regresiei.

e) Orice formă de extrapolare, inclusiv cea bazată pe analiza regresiei trebuie realizată cu maximum de precauție. Odată depășit cadrul valorilor culese din realitate, raporturile și condițiile se pot schimba drastic.

f) Regresia nu constituie un sistem adaptativ de previziune, ceea ce înseamnă că nu este adecvat pentru a fi încorporat într-un sistem de control al stocurilor, să spunem, caz în care este necesar un sistem care să genereze în mod automat previziuni adaptate condițiilor de moment. Aceste tipuri de sisteme sunt prezentate în capitolul 9.

g) În multe situații, nu este suficient de precis să se presupună că y depinde de o singură variabilă independentă, așa cum am discutat mai înainte, pentru regresia liniară simplă. Frecvent, o anumită valoare depinde depinde de doi sau mai mulți factori, caz în care trebuie apelat la analiza regresiei multiple.

De exemplu, analiza unei firme poate conduce la o ecuație de regresie multiplă cu mai multe variabile:

$$\text{Venituri} = 10\,500£ + 6,8x + 9,2y + 2,7z,$$

unde: x este numărul orelor de muncă efectuate;
y – numărul de ore de funcționare a utilajelor;
z – tonajul produs.

De acest concept ne vom ocupa în capitolul 8.

23. Coeficientul de corelare pentru serii (R)

Acest coeficient mai este cunoscut și sub denumirea de *coeficientul Spearman de corelare pentru serii*. Scopul său este acela de a stabili dacă există vreo formă de asociere dintre două variabile atunci când variabilele aparțin unei serii oarecare.

Formula este următoarea:

$$R = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)},$$

unde: d este diferența dintre perechile de valori înseriate;

n – numărul de perechi înseriate.

Vom ilustra această formulă cu următorul exemplu.

Exemplul 2

Un grup de 8 studenți la contabilitate sunt testați la tehnicile cantitative și contabilitate managerială. Ordinea lor, ca urmare a celor două teste, este următoarea (tabelul 7.4):

Tabelul 7.4

Student	Ordinea la tehnici cantitative	Ordinea la contabilitate managerială	d	d^2
A	2	3	-1	1
B	7	6	+1	1
C	6	4	+2	4
D	1	2	-1	1
E	4	5	-1	1
F	3	1	+2	4
G	5	8	-3	9
H	8	7	+1	1
			Σd^2	=22

Valorile de pe coloana d se obțin prin diferența dintre ordinea TC – ordinea CM.

$$\therefore R = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6\times 22}{8(8^2-1)} = +0{,}74.$$

Coeficientul de corelare al seriilor fiind +0,74, putem spune că există o armonizare rezonabilă între performanțele studenților la cele două tipuri de teste.

Note:

a) R poate varia, ca și r, de la +1 la -1, având aceleași semnificații.

b) Ca și în cazul lui r, trebuie să se acorde o atenție deosebită atunci când se apreciază dacă R are o valoare mare sau mică.

c) Valorile din exemplul 2 reprezintă poziția ocupată de fiecare student la fiecare dintre cele două teste și nu notele obținute.

24. Serii concentrate

Atunci când mai mulți studenți obțin aceleași note, trebuie adusă o modificare formulei coeficientului de corelare pentru serii.

Această modificare este următoarea:

$$\frac{t^3 - t}{12},$$

unde t este numărul de concentrări, iar formula modificată a coeficientului de corelare pentru serii este

$$R = 1 - \frac{6\left(\sum d^2 + \frac{t^3 - t}{12}\right)}{n(n^2 - 1)}.$$

De exemplu, să presupunem că studenții E și F au obținut aceleași rezultate la TC și au ocupat împreună poziția a treia. Tabelul modificat va fi:

Student	Ordinea la tehnici cantitative	Ordinea la contabilitate managerială	d	d^2
A	2	3	-1	1
B	7	6	+1	1
C	6	4	+2	4
D	1	2	-1	2
E	3½	5	-1½	2¼
F	3½	1	+2½	6¼
G	5	8	-3	9
H	8	7	+1	1
			Σd^2	26½

$$\therefore R = 1 - \frac{6\left(\sum d^2 + \frac{t^3 - t}{12}\right)}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6\left(26\frac{1}{2} + \frac{2^3 - 2}{12}\right)}{8(8^2 - 1)} = +0{,}68.$$

Așadar, valoarea lui R s-a modificat de la +0,74 la +0,68.

Notă. Prin convenție, pozițiile ocupate de câte doi concurenți sunt reprezentate ca în tabelul de mai înainte, adică locurile 3 și 4, ocupate la egalitate de doi concurenți, vor fi notate cu 3 1/2 notație care simbolizează faptul că locul 3 este împărțit la 2.

25. Rezumat

a) Mărimile de corelare a interdependenței dintre două seturi de numere.

b) Principalele două mărimi pentru corelație sunt coeficientul de corelație instantaneu al produsului (r) și coeficientul Spearman de corelație pentru serii (R).

c) Formula lui r este

$$r = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{n\sum x^2 - (\sum x)^2} \times \sqrt{n\sum y^2 - (\sum y)^2}}.$$

d) Între variabile trebuie să existe o legătură cauzală, sau în cazul contrar se spune că există corelații false sau fără sens.

e) Trebuie acordată o atenție deosebită atât în interpretarea valorilor mari cât și a celor reduse ale coeficienților de corelare. O valoare redusă indică o relație liniară redusă, dar și o posibilă relație curbilinie mai strânsă.

f) Formula coeficientului de corelare pentru serii este următoarea:

$$R = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2 - 1)}.$$

g) O formă obișnuită de predicție este reprezentată de calculul regresiei liniare, realizat pe baza pătratelor minime, după care dreapta respectivă poate fi utilizată pentru extrapolări și intrapolări.

h) Metoda pătratelor minime asigură găsirea valorilor pentru coeficienții a și b din ecuația dreptei

$$y = a + bx.$$

i) Pentru a ști care este acuratețea dreptei de regresie se calculează coeficientul de determinare.

j) Limitele de certitudine bazate pe erorile standard ale estimărilor și previziunilor pot fi calculate pentru fiecare predicție în parte sau pentru dreapta de regresie în întregul său.

26. De reținut

a) Coeficientul r măsoară numai tăria legăturii liniare dintre două seturi de date. Ceea ce nu înseamnă că există o relație de tipul cauză-efect.

b) Coeficientul de determinare r^2 arată în ce măsură variațiile lui y sunt asociate cu variațiile lui x. Rezultă că există implicit o cauzalitate între x și y.

c) r, a și b sunt coeficienți statistici utilizați pentru evaluarea eșantioanelor, corespunzători următorilor parametri ai populațiilor: ρ, α și β.

Întrebări de autocontrol. *Numerele dintre paranteze se referă la numerotarea paragrafelor.*

1. Ce este diagrama de dispersie? (4)
2. Ce se înțelege prin corelație? (6)

3. Ce este coeficientul de corelație instantaneu al produsului (r)? (7)
4. Ce este o corelație fără sens? (8)
5. Care este ecuația generală a dreptei? (12)
6. Să se facă distincția între panta negativă și panta pozitivă. (12)
7. Să se definească metoda pătratelor minime pentru regresia liniară. (14)
8. Care sunt ecuațiile normale pentru calcularea constantelor a și b din ecuația $y = a + bx$? (15)
9. De ce se calculează coeficientul de determinare? (17, 18)
10) Care sunt testele de semnificație pentru a și b? (20)
11) Definiți constanta R. (23)

Exerciții cu răspunsuri:

1. Au fost notate următoarele valori privitor la vânzări și cheltuielile de publicitate.

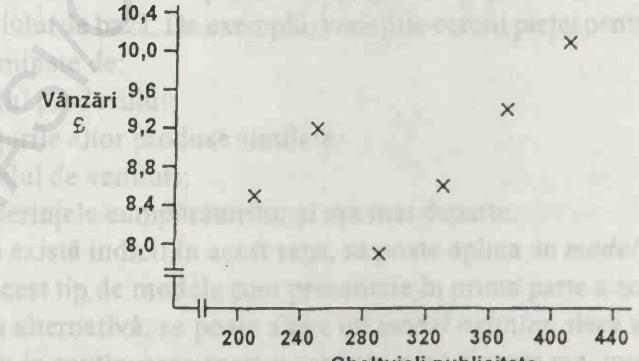
Vânzări mil. £	Cheltuieli publicitate mii £
8,5	210
9,2	250
7,9	290
8,6	330
9,4	370
10,1	410

Să se reprezinte informațiile de mai înainte pe o diagramă de dispersie și, bazându-vă numai pe aprecierea personală, decideți dacă există o corelație între vânzări și cheltuielile de publicitate.

2. Calculați coeficientul r pentru datele de la punctul 1 și interpretați rezultatul.
3. Calculați coeficientul r^2 pentru datele de la punctul 1 și interpretați rezultatul.

Răspunsuri la exerciții

1.



Există o corelație pozitivă între cheltuielile de publicitate și vânzări, dar aceasta este departe de a fi perfectă.

2. $$r = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{n\sum x^2 - (\sum x)^2} \times \sqrt{n\sum y^2 - (\sum y)^2}}$$

x	y	x^2	y^2	xy
8,5	210	72,25	44 100	1785
9,2	250	84,64	62 500	2300
7,9	290	62,41	84 100	2291
8,6	330	73,96	108 900	2838
9,4	370	88,36	136 900	3478
10,1	410	102,01	168 100	4141
53,7	1860	483,63	604 600	16 833

$$r = \frac{6 \times 16.833 - 53{,}7 \times 1.860}{\sqrt{6 \times 483{,}63 - 53{,}7^2} \times \sqrt{6 \times 604.600 - 1.860^2}}$$

$$= 0{,}64.$$

Există o corelație pozitivă suficient de puternică între cheltuielile de publicitate și vânzări.

3. $$r^2 = 0{,}64^2 = 0{,}41.$$

$\therefore$ Alți factori, în afară de publicitate sunt răspunzători pentru $1 - 0{,}41 = 59\%$ din variațiile înregistrate de nivelul vânzărilor.

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

8. REGRESIA MULTIPLĂ ŞI NELINIARĂ

1. Obiective

După parcurgerea acestui capitol:

- veți ști ce se înțelege prin regresie liniară multiplă.
- veți putea calcula regresii separate, multiple și coeficientul multiplu de determinare.
- veți înțelege caracteristicile generale ale modelelor neliniare.
- veți putea descrie funcțiile exponențiale și logaritmice.
- veți înțelege principiile curbelor de învățare.
- veți ști cum se face distincția între curbele de învățare marginale și cumulative.
- veți putea calcula coeficientul de învățare.

2. Alternativele funcției liniare simple

Există situații în care valoarea lui r^2 pentru un model liniar simplu, $y = a + bx$, este considerată nesatisfăcătoare. Aceasta înseamnă că modelul liniar simplu nu mai este considerat un mijloc suficient de bun de realizare a previziunilor. În asemenea situații, există două alternative.

a) Poate fi investigată posibilitatea ca variațiile lui y, variabila dependentă, să fie determinate de mai mulți factori independenți și nu doar de unul singur, ca în cazul modelului de bază. De exemplu, variațiile cererii pieței pentru un anumit produs pot fi determinate de:

- prețul produsului;
- prețurile altor produse similare;
- nivelul de venituri;
- preferințele cumpărătorilor și așa mai departe.

Dacă există indicii în acest sens, se poate aplica un *model de regresie liniară multiplă*. Acest tip de modele sunt prezentate în prima parte a acestui capitol.

b) Ca alternativă, se poate alege un *model neliniar*, dacă se consideră că este mai potrivit; în continuarea acestui capitol vom prezenta mai multe funcții neliniare importante.

3. Regresia multiplă – model de dezvoltare

Un model care cuprinde mai multe variabile independente este cunoscut sub denumirea de *model de regresie multiplă*. Din cauza calculelor laborioase, este puțin probabil ca la diversele examene și concursuri să vă întâlniți cu întrebări și probleme detaliate în această materie. În orice caz, este necesară familiarizarea cu procesele care sunt implicate și cu structura modelului. Dezvoltarea acestui model este prezentată în continuare.

Modelul fundamental cu două variabile (una dependentă și cealaltă independentă) este:

$$y = a + bx,$$

care poate fi rezolvată aplicând formula ecuațiilor normale, după cum urmează:

$$\Sigma y = an + b\Sigma x,$$
$$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2.$$

De aici pot fi dezvoltate modele cu mai mult de 2 variabile și ilustrăm acest lucru mai jos, printr-un model cu trei variabile (una dependentă și două independente; y, x_1, x_2).

$$y = a + b_1x_1 + b_2x_2,$$

care poate fi rezolvată cu ajutorul ecuațiilor normale pentru modelul cu trei variabile, după cum urmează:

$$\Sigma y = an + b_1\Sigma x_1 + b_2\Sigma x_2$$
$$\Sigma x_1y = a\Sigma x_1 + b_1\Sigma x_1^2 + b_2\Sigma x_1x_2$$
$$\Sigma x_2y = a\Sigma x_2 + b_1\Sigma x_1x_2 + b_2\Sigma x_2^2$$

Dreapta de aproximație ideală devine în acest caz *planul* de aproximație ideală. b_1 este panta planului față de axa x_1; b_2 este panta planului față de axa x_2, iar planul intersectează axa y în punctul a.

Scopul extinderii modelului simplu cu numai două variabile constă în sporirea exactității datelor. Precizia aproximațiilor este dată de coeficientul de determinare multiplă R^2, a cărui formulă generală este

$$R^2 = \frac{\text{Variația explicată}}{\text{Variația totală}}$$
$$= \frac{\sum(YE - \bar{Y})^2}{\sum(Y - \bar{Y})^2},$$

unde YE reprezintă de această dată estimarea lui Y pentru fiecare valoare a lui x_1 și x_2.

$$R^2 = \frac{a\sum y + b_1\sum x_1y + b_2\sum x_2y - \frac{(\sum y)^2}{n}}{\sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n}}.$$

Nu este obligatoriu ca valoarea coeficientului de determinare să se îmbunătățească odată cu adăugarea de noi variabile.

Modelele de mai înainte sunt ilustrate cu ajutorul următoarelor exemple.

4. Exemplu de regresie multiplă

Exemplul 1

Asociația contabililor studiază relațiile dintre performanțele în studiul metodelor cantitative, numărul de ore acordate săptămânal studiului acestei materii și nivelul de inteligență al candidaților N.I. Asociația se află în posesia datelor a zece studenți și anume:

Student	Ore	N.I.	Punctaj la examinare
	x_1	x_2	y
1	9	99	56
2	6	100	45
3	12	119	80
4	14	95	73
5	11	110	71
6	6	117	55
7	19	98	95
8	16	101	86
9	3	100	34
10	9	115	66

Se cere să se calculeze regresiile separate, regresia multiplă și coeficienții de determinare.

Soluția

Partea A – calculul regresiilor separate (tabelul 8.1)

Tabelul 8.1

	y	y^2	x_1	x_1^2	x_2	x_2^2	x_1y	x_2y	x_1x_2
1	56	3136	9	81	99	9 801	504	5544	891
2	45	2025	6	36	100	10 000	270	4500	600
3	80	6400	12	144	119	14 161	960	9520	1 428
4	73	5329	14	196	95	9 025	1022	6935	1 330
5	71	5041	11	121	110	12 100	781	7810	1 210
6	55	3025	6	36	117	13 689	330	6435	702
7	95	9025	19	361	98	9 604	1805	9310	1 862
8	86	7396	16	256	101	10 201	1376	8686	1 616
9	34	1156	3	9	100	10 000	102	3400	300
10	66	4356	9	81	115	13 225	594	7590	1 035
	661	46 889	105	1321	1054	111 806	7744	69 730	10 974

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pentru regresia y în funcție de x_1 (respectiv punctajul la examinare în funcție de numărul de ore de studiu):

$$bx_1 = \frac{n\sum x_1 y - \sum x_1 \sum y}{n\sum x_1^2 - (\sum x_1)^2}$$

$$= \frac{10 \times 7744 - 105 \times 661}{10 \times 1321 - 105^2}$$

$$bx_1 = 3{,}68$$

$$ax_1 = \frac{\sum y}{n} - \frac{bx_1 \sum x_1}{n}$$

$$= \frac{661}{10} - \frac{3{,}68 \times 105}{10}$$

$$ax_1 = 27{,}46.$$

Ecuația regresiei pentru relația dintre numărul de ore de studiu și punctajul la examinare este

$$y_{x_1} = a_{x_1} + b_{x_1} x_1$$

$$= 27{,}46 + 3{,}68.$$

Coeficientul de corelare pentru această relație este

$$r_{x_1} = \frac{n\sum x_1 y - \sum x_1 \sum y}{\sqrt{n\sum x_1^2 - (\sum x_1)^2} \times \sqrt{n\sum y^2 - (\sum y)^2}}.$$

Notă. Această formulă este echivalentul direct al celei date în capitolul 7, într-o formă cu care se lucrează mai ușor, din moment ce toate datele sunt cunoscute, mai puțin:

$$n\sum y^2 - (\sum y)^2 = 10 \times 46\,889 - 661^2$$

$$= 468\,890 - 436\,921 = 31\,969.$$

$$r_{x_1} = \frac{8.035}{\sqrt{2185} \times \sqrt{31\,969}}$$

$$= 0{,}9613.$$

$\therefore r_{x1}^2 = 0{,}924$, acesta fiind coeficientul de determinare pentru $y : x_1$.

Într-un mod similar se poate rezolva regresia y în funcție de x_2 (punctajul la examene în funcție de nivelul de inteligență), rezultând:

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$y_{x_2} = a_{x_2} + b_{x_2} x_2$$
$$= 57{,}16 + 0{,}085 x_2,$$
$$r_{x_2}{}^2 = 0{,}001608.$$

Diagramele de dispersie pentru cele două variabile independente, împreună cu dreptele de aproximare ideală sunt reprezentate în figurile 8.1 și 8.2.

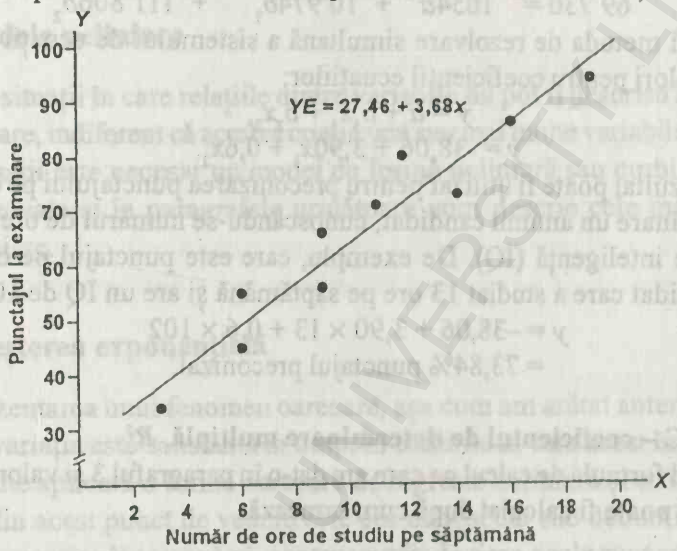


Fig. 8.1. Diagrama de dispersie pentru relația dintre punctajul obținut la examinare și numărul de ore de studiu pe săptămână ($y{:}x_1$).

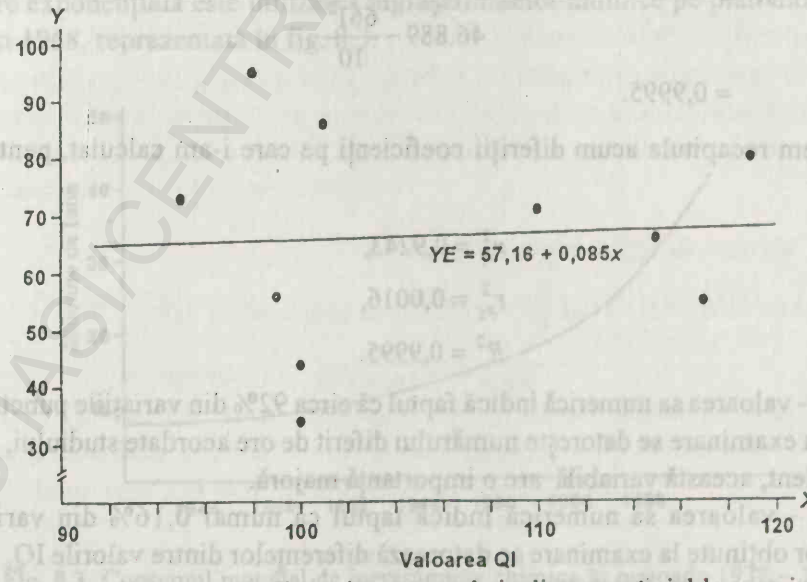


Fig. 8.2. Diagrama de dispersie pentru relația dintre punctajul la examinare și valoarea coeficientului de inteligență NI ($y{:}x_2$).

Soluția

Partea B – Regresia multiplă ($y : x_1$ și x_2)

Calculele pentru regresia multiplă sunt realizate pe baza ecuațiilor normale cu trei variabile din paragraful 3 și a rezultatelor din tabelul 8.1, după cum urmează:

$$\begin{aligned} 661 &= 10a + 105b_1 + 1.054b_2 \\ 7744 &= 105a + 1\,321b_1 + 10\,974b_2 \\ 69\,730 &= 1054a + 10\,974b_1 + 111\,806b_2 \end{aligned}$$

Aplicând metoda de rezolvare simultană a sistemului de ecuații vom obține următoarele valori pentru coeficienții ecuațiilor:

$$y = a + b_1x_1 + b_2x_2,$$
$$y = -38{,}06 + 3{,}90x_1 + 0{,}6x_2.$$

Acest rezultat poate fi utilizat pentru preconizarea punctajului pe care îl poate obține la examinare un anumit candidat, cunoscându-se numărul de ore de studiu și coeficientul de inteligență (IQ). De exemplu, care este punctajul pe care îl poate obține un candidat care a studiat 13 ore pe săptămână și are un IQ de 102?

$$y = -38{,}06 + 3{,}90 \times 13 + 0{,}6 \times 102$$
$$= 73{,}84\% \text{ punctajul preconizat.}$$

Soluția

Partea C – coeficientul de determinare multiplă, R^2

Aplicând formula de calcul pe care am dat-o în paragraful 3 și valorile calculate mai înainte, R^2 poate fi calculat după cum urmează:

$$R^2 = \frac{(-38{,}06 \times 661) + (3{,}90 \times 7.744) + (0{,}6 \times 69.730) - \frac{661^2}{10}}{46.889 - \frac{661^2}{10}}$$

$$= 0{,}9995.$$

Putem recapitula acum diferiții coeficienți pe care i-am calculat, pentru a-i interpreta:

$$r_{x_1}^2 = 0{,}9243,$$
$$r_{x_2}^2 = 0{,}0016,$$
$$R^2 = 0{,}9995.$$

$r_{x_1}^2$ – valoarea sa numerică indică faptul că circa 92% din variațiile punctajelor obținute la examinare se datorește numărului diferit de ore acordate studiului, astfel încât, evident, această variabilă are o importanță majoră.

$r_{x_2}^2$ – valoarea sa numerică indică faptul că numai 0,16% din variațiile punctajelor obținute la examinare se datorează diferențelor dintre valorile IQ, astfel încât, evident, această variabilă are o importanță redusă.

R^2 – valoarea sa numerică arată efectul combinat al celor două variabile independente, arătând că 99,95% din variația punctajelor obținute la examinare se datorează diferențelor valorilor IQ și numărului de ore de studiu. Într-adevăr, acest rezultat ne permite să considerăm ca ipoteză logică faptul că rezultatele examenelor sunt influențate de inteligența candidaților și de nivelul lor de pregătire.

5. Modele neliniare

Există situații în care relațiile dintre variabile nu pot fi descrise în mod adecvat de funcții liniare, indiferent că acestea conțin una sau mai multe variabile independente. În aceste situații este necesar un model de formă neliniară sau curbilinie, deoarece sunt mai adecvate și în paragrafele următoare vom descrie cele mai des întâlnite modele neliniare.

6. Creșterea exponențială

Reprezentarea unui fenomen oarecare, așa cum am arătat anterior, este liniară atunci când variația este constantă în timp. În cazurile în care acest lucru nu mai este valabil, trebuie aplicată o formă oarecare de regresie neliniară și o funcție neliniară importantă din acest punct de vedere este cea cunoscută sub denumirea de creștere exponențială, ceea ce înseamnă că, pentru unități de timp egale sunt așteptate creșteri în proporții sau procentaje constante ale ratelor de creștere. Un exemplu tipic de creștere exponențială este utilizarea îngrășămintelor chimice pe plan mondial între 1938 și 1968, reprezentată în fig. 8.3.

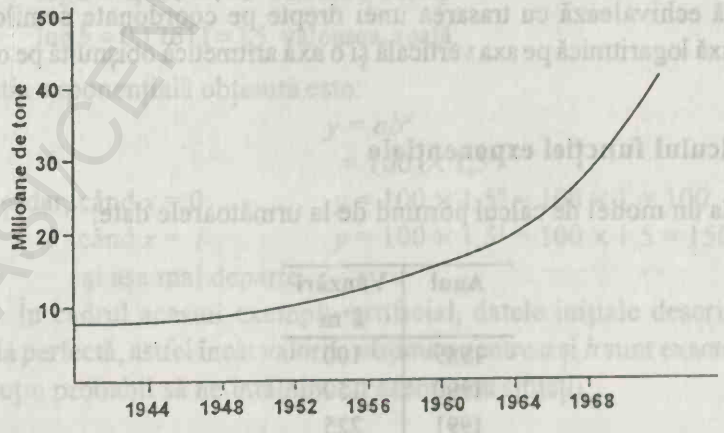


Fig. 8.3. Consumul mondial de îngrășăminte chimice în perioada 1938 – 1968.

Puteți face comparația între forma acestui grafic, respectiv o curbă de creștere exponențială tipică și graficul din fig. 8.1, respectiv creștere tipic liniară.

7. Funcția exponențială

Funcția exponențială are forma

$$y = ab^x,$$

unde: y este variabila care trebuie calculată;

a și b – constante;

x – numărul perioadei (în fig. 8.3 fiind reprezentat chiar pe axa x).

Rezultă de aici că y are valoarea a la momentul zero, valoare care apoi se înmulțește cu factorul b^x pentru fiecare perioadă. Dacă b are valori supraunitare, vom avea creștere exponențială; dacă valoarea aceasta este subunitară, vom avea scădere exponențială. Se va spune că variabila y este o funcție exponențială de x.

8. Forma liniară a funcției exponențiale

Funcția exponențială poate fi redusă la o formă liniară apelându-se la logaritmul funcției, după cum urmează:

$$\log y = \log a + x \log b,$$

sau

$$\log y = A + Bx,$$

unde, $A = \log a$ și $B = \log b$.

Similaritățile dintre această expresie și regresia liniară discutată anterior sunt evidente. O caracteristică importantă a formei logaritmice a funcției exponențiale este aceea că echivalează cu trasarea unei drepte pe coordonate semilogaritmice (respectiv o axă logaritmică pe axa verticală și o axă aritmetică obișnuită pe orizontală).

9. Calculul funcției exponențiale

Vom da un model de calcul pornind de la următoarele date:

Anul	Vânzări £'m
1989	100
1990	150
1991	225
1992	337,5
1993	506,25

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pasul 1. Se transformă anii în serii simple, scăzând 1989 din fiecare și extrăgând valorile logaritmilor pentru vânzări din tabele (y). Obținem astfel următorul tabel, asemănător cu cele folosite anterior în cazul calculului regresiilor liniare.

x	$\log y$	$x \log y$	x^2
0	2,0000	0	0
1	2,1761	2,1761	1
2	2,3522	4,7044	4
3	2,5282	7,5846	9
4	2,7045	10,8180	16
$\Sigma x = 10$	$\Sigma y = 11{,}7610$	$\Sigma xy = 25{,}2831$	$\Sigma x^2 = 30$

Aceste valori se înlocuiesc apoi în formulele pentru a și b din capitolul 7.

$$A = \frac{\sum y}{n} - \frac{b\sum x}{n}$$

$$B = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$\text{de unde } \log b = \frac{5\times 25{,}2831 - 10\times 11{,}7610}{5\times 30 - 100} = \frac{8{,}8055}{50} = 0{,}17611.$$

(Antilogaritmul lui 0,17611 este 1,5, dar având în vedere că expresia pentru a conține *log b* se va folosi direct valoarea logaritmului, respectiv 0,17611).

$$\log a = \frac{11{,}7610}{5} - \frac{0{,}17611\times 10}{5} = 2{,}3522 - 0{,}3522 = 2{,}000,$$

$\log a = 2{,}000 = 100$ valoarea reală,

$\log b = 0{,}17611 = 1{,}5$ valoarea reală.

Funcția exponențială obținută este:

$$y = ab^x$$
$$= 100 \times 1{,}5^x.$$

Așadar, când $x = 0$ $\quad y = 100 \times 1{,}5^0 = 100 \times 1 = 100$

când $x = 1$ $\quad y = 100 \times 1{,}5^1 = 100 \times 1{,}5 = 150$

și așa mai departe.

Notă. În cadrul acestui exemplu artificial, datele inițiale descriau o funcție exponențială perfectă, astfel încât valorile obținute pentru a și b sunt exacte. În realitate însă, este puțin probabil să ne întâlnim cu asemenea situații.

10. Funcții logaritmice

O funcție alternativă neliniară este cea cunoscută sub numele de funcție logaritmică, având forma generală

$$y = ax^b,$$

unde y este variabila care trebuie determinată, a și b sunt constantele, iar x reprezintă perioadele de timp.

Ca și în cazul funcțiilor exponențiale, această funcție poate fi exprimată într-o formă liniară, pe baza logaritmilor, după cum urmează:

$$\log y = \log a + b \log x.$$

Se va spune că y este o funcție logaritmică de x.

Această funcție este echivalentă cu trasarea dreptei de aproximație ideală pe un grafic logaritmic (aceasta însemnând că atât axa verticală cât și cea orizontală sunt logaritmice).

11. Calculul funcției logaritmice

Modul de calcul va fi ilustrat pe baza următoarelor date:

Perioadă	Vânzări mil. £
1	50
2	200
3	450
4	800
5	1.250

Ca și în cazul funcției exponențiale, se va folosi forma logaritmică liniară și anume:

$$\log y = \log a + b \log x.$$

Veți observa că, de această dată apare atât un logaritm pentru perioadă ($\log x$), cât și un logaritm pentru vânzări ($\log y$), spre deosebire de calculul exponențial, în care era cuprins numai $\log y$.

$\log x$	$\log y$	$(\log x)^2$	$\log x \log y$
0	1,6990	0	0
0,3010	2,3010	0,0906	0,6926
0,4771	2,6532	0,2276	1,2658
0,6021	2,9031	0,3625	1,7479
0,6990	3,0969	0,4886	2,1647
$\Sigma x = 2,0792$	$\Sigma y = 12,6532$	$\Sigma x^2 = 1,1693$	$\Sigma xy = 5,8710$

BCU CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

$$b = \frac{5\times5{,}8710 - 2{,}0792\times12{,}6532}{5\times1{,}1693 - 2{,}0792^2} = \frac{3{,}0465}{1{,}5234} = 2{,}00.$$

$$\log a = \frac{12{,}6532}{5} - \frac{2\times2{,}0792}{5} = 1{,}6989 \text{ al cărui antilog este } 50.$$

∴ Valorile funcției logaritmice sunt:

$$y = ax^b$$
$$= 50x^2.$$

Prin urmare, când $x = 1$
$y = 50 \times 1^2 = 50 \times 1 = 50$
când $x = 2$
$y = 50 \times 2^2 = 50 \times 4 = 200$
când $x = 3$
$y = 50 \times 3^2 = 50 \times 9 = 450$

Notă. Încă o dată, pentru ilustrarea cât mai simplă a unui model de calcul, a fost ales un set perfect de valori, condiții cu care este foarte puțin posibil să vă întâlniți în condiții reale.

12. Curbe de învățare

Estimarea se referă la așteptările noastre în privința viitorului. Extrapolarea fără judecată a unor condiții anterioare pentru viitor are puține șanse să ducă la obținerea unor previziuni viabile. Dacă avem în vedere o anumită modificare a acestor condiții în viitor, trebuie să ținem seama de acest fapt atunci când ajungem la formularea previziunii în forma sa finală.

Un exemplu adecvat pentru această situație este legat de ceea ce se numește *curbe de învățare*, reprezentând aplicații practice ale funcțiilor neliniare. Curba de învățare descrie modul în care oamenii învață în cursul îndeplinirii unei îndatoriri, reușind astfel să îndeplinească această îndatorire mai rapid la a doua încercare. Învățarea este mai rapidă în primele faze și rata de învățare se reduce treptat, până la realizarea unui anumit număr de produse sau de îndatoriri, când durata devine constantă. Principala aplicație pratică se referă la timpii de lucru și la costuri.

Previziunile referitoare la costuri și în special cele referitoare la timpii de lucru și costuri țin seama tocmai de efectele procesului de învățare. În cursul fazelor inițiale de realizare a unui produs nou sau de desfășurare a unui proces nou, se câștigă experiență și îndemânare, concomitent cu o creștere a productivității și cu reducerea timpului de lucru per bucată.

Există două modele de curbe de învățare și anume *modelul cumulativ mediu* și *modelul marginal*. Ambele modele folosesc aceeași formulă generală, fiind deosebite numai de anumite diferențe în definirea elementelor formulei. Curba de învățare este o funcție neliniară, cu formula generală:

$$y = ax^b,$$

unde: a este numărul de ore necesare realizării primului obiect;
x – numărul cumulativ de obiecte;
b – coeficientul de învățare.

Alegerea modelului se va face în funcție de definiția pentru y, după cum urmează:

Pentru *modelul cumulativ mediu* y este timpul cumulativ mediu per obiect, pentru x obiecte.

Pentru *modelul marginal* y este timpul marginal pentru obiectul cu numărul x.

Cele două abordări vor fi descrise în detaliu în continuare.

13. Curbele de învățare cumulative medii

Studiile efectuate au arătat faptul că există tendința ca timpul afectat realizării unui obiect să scadă cu aceeași rată constantă cu care crește producția. De exemplu, o curbă de învățare de 90% arată că pe măsură ce totalul cumulat al producției se dublează, timpul mediu cumulat necesar pentru realizarea unui singur obiect scade cu 10%. O curbă de învățare de 80% arată că, dublarea producției ar însemna reducerea cu 20% a timpului cumulat afectat realizării unui obiect și așa mai departe.

Aceste observații sunt ilustrate în tabelul 8.2, care a fost realizat pornindu-se de la un produs cu o curbă de învățare de 80% și pentru care timpul de realizare a unității de producție a fost de 50 de ore.

Tabelul 8.2

Ilustrarea unei curbe de învățare cumulative medii de 80%

Observați că timpul mediu cumulat de 25,6 ore, pentru o producție cumulată

Producția cumulată unități	Timpul necesar cumulat h	Timpul mediu cumulat per unitate h
1	50	50
2	80	40 (50 × 80%)
4	128	32 (50 × 80% × 80%)
8	204,8	25,6 (50 × 80% × 80% × 80%)

de 8 unități *nu* este unul și același lucru cu timpul necesar pentru realizarea celei de-a opta unități, adică

$$\frac{204,8}{8} = 25,6 .$$

Dacă se cere să se găsească timpul necesar pentru realizarea celei de-a opta unități de produs, trebuie stabilit timpul cumulat pentru primele opt unități de producție cumulată și apoi să se deducă din acesta timpul necesar pentru realizarea celei de-a opta unități. Această situație va fi ilustrată în continuare, după explicarea curbei de învățare.

14. Curbele de învățare cumulative medii – formula generală

Pentru modelul cumulativ mediu, fomula utilizată este

$$y = ax^b,$$

unde: y este timpul de lucru mediu cumulat pentru o unitate;

a – numărul orelor de lucru afectate primei unități;

x – numărul cumulat de unități;

b – coeficientul de învățare.

Coeficientul de învățare se calculează cu relația:

$$b = \frac{\log(1 - \text{scăderea proporțională})}{\log 2},$$

astfel că pentru o scădere de 20% (respectiv o curbă de învațare de 80%)

$$b = \frac{\log(1-0{,}2)}{\log 2} = \frac{\bar{1}{,}90309}{0{,}30103} = -0{,}322.$$

Notă. Așa cum se știe de la matematică, log8 se scrie, prin convenție, $\bar{1}{,}90309$, dar în realitate este $-1+0{,}90309$, ceea ce prin împărțire la 0,30103 dă rezultatul $-0{,}322$.

Formula aceasta poate fi utilizată pentru rezolvarea întrebărilor bazate pe produs, în tabelul 8.2.

a) Care este timpul mediu cumulat pe unitate la o producție cumulată de 8 unități, 16 unități.

b) Cât timp a durat fabricarea unității numărul 8?

Soluții

a) Când producția cumulată este de 8 unități:

$$y = 50 \times 8^{-0{,}322}.$$

$\therefore$ Timpul mediu cumulat = 25,6 ore (se confirmă valoarea din tabelul 8.2).

Când avem o producție cumulată de 16 bucăți:

$$y = 50 \times 16^{-0{,}322}.$$

$\therefore$ Timpul mediu cumulat = 20,48 ore.

(Valoarea obținută se poate verifica înmulțind 25,6 ore cu 80%).

b) Timpul necesar pentru fabricarea unității cu numărul 8.

Așa cum am explicat anterior, rezultatul se poate afla scăzând timpul necesar producerii primelor 7 unități din timpul cumulat pentru primele 8.

Timpul mediu cumulat pentru producerea a 8 unități de produs este deja cunoscut din tabelul 8.2, respectiv 204,8 ore, dar trebuie să calculăm acum timpul cumulat pentru producerea primelor 7 unități de produs, respectiv:

Timpul mediu cumulat pentru producerea a 7 unități $= 50 \times 7^{-0,322}$
$= 26,72$ ore.

Astfel, timpul cumulat pentru 7 unități $= 26,72 \times 7 = 187,04$ ore.

$\therefore$ Timpul necesar pentru producerea celei de-a opta unități $= 204,8 - 187,04$ ore
$= 17,76$ ore.

15. Modelul curbei de învățare marginale

Acest model se bazează pe presupunerea că timpul necesar pentru realizarea unei unități de produs marginale, ceea ce înseamnă ultima unitate de produs din serie, se reduce cu un procent dat atunci când producția cumulativă se dublează.

Această situație este ilustrată în tabelul 8.3, care pornește de la aceleași presupuneri ca și tabelul 8.2, respectiv o curbă de învățare de 80%, cu o durată de 50 de ore pentru realizarea primei unități de produs.

Tabelul 8.3

Ilustrarea unei curbe de învățare marginale de 80%

Producția cumulată unități	Timpul necesar cumulat ore	Timpul necesar pentru unitatea marginală ore	
1	50	50	
2	90	40	$(50 \times 80\%)$
4	?	32	$(50 \times 80\% \times 80\%)$
8	?	25,6	$(50 \times 80\% \times 80\% \times 80\%)$

Deși cifrele de pe coloana din dreapta sunt aceleași ca în tabelul 8.2, semnificația lor este oarecum diferită. În tabelul 8.3, 50, 40, 32 și 25,6 reprezintă numărul de ore necesare pentru realizarea unităților de produs cu numerele 1, 2, 3 și 8 – și nu timpul mediu necesar pentru realizarea primei unități, a celei de-a doua, a treia și respectiv a opta unități. De asemeni, se va constata că nu este posibil în mod direct să se afle timpul de producție cumulat până la unitatea de produs numărul 4 și respectiv 8. Aceasta se datorește faptului că nu sunt cunoscuți timpii marginali pentru unitățile de produs cu numerele 3, 5, 6 și 7. Dar putem afla aceste date, prin aplicarea unei formule și acest lucru va fi demonstrat în continuare.

16. Curbele marginale de învățare – formula generală

Așa cum am arătat deja, și în acest caz poate fi aplicată formula generală a curbei de învățare, cu specificația că y este definit în mod diferit și anume

$$y = ax^b,$$

unde y este timpul necesar pentru realizarea unității marginale, toate celelalte elemente ale formulei rămânând așa cum au fost definite anterior, coeficientul de învățare fiind calculat în aceeași manieră.

Încă o dată, formula aceasta poate fi aplicată pentru rezolvarea întrebărilor legate de tabelele 8.2 și 8.3.

a) Cât timp a fost necesar pentru producerea unității cu numărul 8?

b) Care a fost timpul cumulat de producție pentru o producție cumulată de 8 unități?

Soluții

a) Timpul necesar pentru realizarea unității cu numărul 8

$$y = 50 \times 8^{-0,322}$$

$$= 25,6 \text{ ore (confirmând valoarea din tabelul 8.3).}$$

b) Timpul de producție cumulat în cazul în care producția cumulată este de 8 unități.

Timpul cumulat de producție nu poate fi calculat direct. De aceea, este necesar să aflăm timpii necesari producerii fiecărei unități – de la 1 la 8, după care vom face totalul. Timpii necesari pentru producerea unităților 1,2,4 și 8 sunt cunoscuți, de fapt, din tabelul 8.3, dar este necesar să calculăm timpii pentru unitățile 3, 5, 6 și 7, după care, de asemenea, le vom însuma.

Timpul necesar pentru producerea unității $3 = 50 \times 3^{-0,322} = 35,1$ ore.

Timpul necesar pentru producerea unității $5 = 50 \times 5^{-0,322} = 29,78$ ore.

Timpul necesar pentru producerea unității $6 = 50 \times 6^{-0,322} = 28,08$ ore.

Timpul necesar pentru producerea unității $7 = 50 \times 7^{-0,322} = 26,72$ ore.

Astfel, timpul cumulat pentru o producție cumulată de 8 unități este

$$50 + 40 + 35,1 + 32 + 29,78 + 28,08 + 26,72 + 25,6 = 267,28 \text{ ore.}$$

Este evident că metoda de rezolvare este complicată și greoaie, iar în cazul unei producții de serie mare se impune utilizarea calculatorului electronic pentru efectuarea calculelor, dacă acest lucru ar fi, totuși, necesar.

17. Comparația modelului mediu cumulat cu modelul marginal

Deși se aplică aceeași formulă generală în ambele cazuri, rezultatele diferă în mod substanțial, în funcție de definiția lui y în formula $y = ax^b$. În general, atunci când sunt folosite modelele marginale, reducerea timpilor de producție pentru fiecare unitate de produs din serie este *mai mică* decât în cazul modelului mediu cumulat

pentru orice curbă de învățare. Se poate dovedi acest fapt prin analiza timpului total necesar pentru realizarea a 8 unități de produs:

Timpul total necesar pentru 8 unități aplicând modelul mediu cumulativ	Timpul total necesar pentru 8 unități aplicând modelul marginal
204,8 ore	267,28

Așadar, în proporție de 80%, curbele de învățare (sau oricare alte valori) nu sunt echivalente pentru cele două modele.

De aceea, trebuie acordată o mare atenție pentru alegerea modelului de lucru corect. Rețineți, diferențele sunt date exclusiv de definițiile diferite ale lui *y* în formula generală.

18. Exemplu practic de curbă de învățare

Un departament de planificare a producției elaborează programele de producție pentru perioada a 9-a. Se dorește, în special, calcularea timpului care trebuie alocat fabricării unei serii de 100 de bucăți de mașini-unelte cu acționare computerizată, denumite ROBO XI. Pentru fabricarea primului ROBO XI au fost necesare 80 de ore și se știe din experiența anterioară că intervine și un efect de învățare. Din înregistrări anterioare s-au obținut următoarele informații:

ROBO XI		
Producția cumulată unități	Timpul cumulat ore	Timpul/unitate ore
600	18153,6	30,256
1200	32,676	27,23

S-a calculat că producția cumulată la începutul perioadei a 9-a urmează să fie de 3000 unități.

Se cere:

a) Ce tip de curbă de învățare este sugerat de informațiile anterioare?

b) Ce valoare a curbei de învățare rezultă din informațiile anterioare?

c) Să se calculeze coeficientul de învățare.

d) Să se calculeze alocația de timp pentru seria de 100 de unități în perioada a 9-a.

Soluția

a) Tipul de model de curbă de învățare.

Din informațiile puse la dispoziție este evident că timpul de fabricație per unitate este o medie cumulativă, deoarece timpul cumulat reprezintă rezultatul înmulțirii numărului de unități cu timpul de fabricație necesar per unitate, respectiv

$$600 \times 30{,}256 = 18153{,}6.$$

∴ Se folosește un model mediu cumulat.

b) Valoarea curbei de învățare

$$\frac{27,23}{30,256} = 0,9 .$$

$\therefore$ Valoarea curbei de învățare este de 90%.

c) Coeficientul de învățare pentru o curbă de învățare de 90%

$$b = \frac{\log(1 - \text{scăderea proporțională})}{\log 2}$$

$$= \frac{\log(1 - 0,1)}{\log 2}$$

$$= \frac{1,95424}{0,30103} = -0,152.$$

d) Alocația de timp pentru seria de 100 de unități în perioada a 9-a, la o producție cumulată de 3000 de unități.

Alocația de timp este diferența dintre timpul cumulat pentru 3000 de unități și timpul cumulat pentru 3100 de unități.

Pentru 3000 de unități

Timpul cumulat mediu per unitate = $80 \times 3000^{-0,152} = 23,69$ ore,

$\therefore$ Timpul cumulat = $3000 \times 23,69 = 71\,070$ ore.

Pentru 3100 de unități

Timpul cumulat mediu per unitate = $80 \times 3.100^{-0,152} = 23,57$ ore,

$\therefore$ Timpul cumulat = $3100 \times 23,57 = 73\,067$ ore.

Alocația de timp pentru seria de 100 de unități va fi = 73.067 – 71.070 = 1.997 ore.

Se va nota că, în exemplul anterior și în prezentarea anterioară a curbelor de învățare s-a presupus că reducerea regulată a timpului de fabricație va fi în concordanță cu modelele teoretice. În practică, desigur, este foarte puțin probabil să se întâmple așa. Deși fenomenul de învățare este real și are loc o reducere a timpului de fabricație la fiecare unitate de produs, este foarte puțin probabil ca regularitatea și soliditatea modelelor teoretice să fie regăsite în practică. În ciuda acestui fapt însă, întrebările referitoare la curbele de învățare sunt foarte populare în rândul examinatorilor.

19. Rezumat

a) Dacă modelul liniar cu două variabile este considerat inadecvat, pot fi aplicate modele de regresie liniară multiplă sau modele de regresie neliniară.

b) Dreapta de aproximație ideală pentru modelul cu două variabile devine planul de aproximație ideală în cazul modelului cu trei variabile.

c) Regresia multiplă lucrează cu R^2, coeficientul de determinare multiplă, pentru măsurarea îmbunătățirii aproximării modelului în cazul introducerii uneia sau a mai multor variabile cauzale adiționale.

d) Modelele de creștere exponențială se aplică în cazurile în care se presupune o creștere a variabilei y cu o proporție constantă, la o variație dată a valorii lui x.

e) Există situații în care relația neliniară poate fi transformată într-o relație liniară, prin utilizarea logaritmilor. Relația respectivă va fi așadar reprezentată printr-o funcție logaritmică, cu forma $y = ax^b$.

f) Curba de învățare constituie o aplicație importantă a funcției neliniare și are forma generală

$$y = ax^b.$$

g) Există două forme de curbe de învățare: marginală și medie cumulativă.

h) În cazul modelului curbei de învățare cumulative medii, y din formula generală reprezintă timpul mediu cumulat per unitate raportat la întreaga producție.

i) În cazul modelului curbei de învățare marginală y reprezintă timpul necesar fabricării ultimei unități de produs din serie.

20. De reținut

a) Procesul de plotare a valorilor calculate pentru o funcție neliniară pe o diagramă de dispersie se numește *adaptarea curbei.*

b) Deși este puțin probabil ca, în limitele reduse de timp ale unui examen să se ceară o analiză completă a regresiei multiple, înțelegerea metodei este necesară.

Întrebări de auto-control. *Numerele dintre paranteze se referă la numerotarea paragrafelor.*

1. Ce este regresia multiplă? (3)
2. Definiți R^2 și enunțați rolul său? (3)
3. Care sunt diferențele dintre creșterea exponențială și creșterea liniară? (6)
4. Ce este scăderea exponențială? (7)
5. Care este forma liniară a funcției exponențiale? (8)
6. Ce este funcția logaritmică? (10)
7. Ce este curba de învățare? (14)
8. Cum se calculează coeficientul de învățare? (14)
9. Care sunt deosebirile cheie dintre modelele marginal și mediu cumulativ? (14, 15)

Exerciții cu răspunsuri

1. Analiza cheltuielilor pentru întreținerea automobilelor conducerii unei firme arată că cheltuielile sunt proporționale cu numărul de kilometri parcurși (x_1) și cu tipul călătoriei (x_2). Forma generală este:

$$y = a + b_1x_i + b_2x_2.$$

Din calcule s-au obținut următoarele valori (unde y reprezintă cheltuielile lunare):

$$y = £86 + 0{,}37x_1 + 0{,}08x_2$$
$$r^2x_1 = 0{,}78$$
$$r^2x_2 = 0{,}16$$
$$R^2 = 0{,}88$$

Să se interpreteze valorile.

2. Pentru o anumită operațiune este valabilă o curbă de învățare marginală de 10%. Presupunând că timpul pentru fabricarea primei unități este de 30 de minute, se cere să se calculeze timpul necesar pentru fabricarea celei de-a 20-a unități.

3. Să se rezolve probleme de la punctul 2, dar pentru o curbă de învățare medie cumulativă de 30%.

Răspunsuri la exerciții

1. $r_{x_1}^2 = 0{,}78$.

Acesta este coeficientul de determinare pentru numărul de kilometri efectuați la costul respectiv, ceea ce înseamnă că 78% din cost se datorește kilometrilor parcurși.

$r_{x_2}^2 = 0{,}16$, respectiv 16% din cost este justificat de scopul călătoriei.

$R^2 = 0{,}88$ reprezintă coeficientul general de determinare și indică faptul că ecuațiile multiple de regresie justifică 88% din variațiile totale ale costurilor.

Coeficienții din ecuație sunt:

$a = 86£$ = costuri fixe,
$b_1 = 0{,}37$ = suma per kilometru,
$b_2 = 0{,}08$ = influența tipului călătoriei.

2. Pentru o curbă marginală de învățare de 10%, timpul necesar fabricării unității cu numărul 20 poate fi calculat direct.

Curba de învățare = ax^b

unde:

$$b = \frac{\log(1-0{,}1)}{\log 2} = -0{,}152$$

∴ Timpul necesar pentru fabricarea unității cu numărul $20 = 30{,}20^{-0{,}152}$
$= 19{,}03$ minute.

3. Deoarece se aplică un model mediu cumulativ, este necesar să se afle mai întâi timpul necesar pentru 20 de unități, din care să se scadă timpul necesar pentru fabricarea primelor 19 unități, după cum urmează:

Pentru o curbă de învățare de 30% $b = \frac{\log(1-0{,}3)}{\log 2} = -0{,}5146$.

∴ Timpul mediu cumulat pentru fiecare unitate, la un total de
20 de unități $= 30{,}20^{-0{,}5146}$
$= 6{,}42$ minute.

$\therefore$ Timpul total pentru 20 de unități = $6,42 \times 20 = 128,4$.

Timpul mediu cumulat pentru fabricarea unui număr de 19 unități

$= 30,19^{-0,5146} = 6,59$.

$\therefore$ Timpul total pentru fabricarea a 19 unități = $6,59 \times 20 = 131,8$.

$\therefore$ Timpul de fabricație pentru unitatea cu numărul 20

$= 131,8 - 128,4$

$= 3,4$ minute.

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

9. PREVIZIONAREA – ANALIZA SERIILOR CRONOLOGICE

1. Obiective

După parcurgerea acestui capitol:

- veți înțelege scopurile previzionării.
- veți cunoaște principiile tehnicilor cheie de previzionare calitativă, cum ar fi metoda Delphi, studiul de piață și analogia istorică.
- veți putea calcula o medie mobilă.
- veți înțelege principiile compensării exponențiale.
- veți înțelege care este deosebirea dintre modelele de serii cronologice/dinamice aditive și multiplicative.
- veți putea analiza și descompune seriile cronologice/dinamice.
- veți înțelege în ce fel poate fi folosită analiza regresivă pentru previzionare.

2. Previzionarea – definiție

Pentru scopurile noastre, previzionarea poate fi definită ca fiind încercarea de a prezice viitorul prin utilizarea mijloacelor calitative și cantitative. Într-un mod informal, previzionarea este o parte integrantă a tuturor activităților umane, dar din punctul de vedere al domeniului afacerilor, se acordă o atenție crescândă sistemelor de previzionare formale, care sunt permanent supuse îmbunătățirilor. Unele sisteme de previzionare implică tehnici statistice foarte evoluate, care depășesc scopurile acestei lucrări, astfel încât nici nu sunt incluse aici.

Toate metodologiile de previzionare pot fi împărțite în trei direcții principale, respectiv previziunile care pornesc de la:

Ce au făcut oamenii	Ce spun oamenii	Ce fac oamenii
Exemple:	Exemple:	Exemple:
Analiza seriilor C/D	Monitorizări	Marketingul de testare
Analiza regresivă	Chestionare	Teste de reacție

Datele din activitatea anterioară sunt cele mai ieftine.pe care un analist le are la dispoziție, dar pe de o parte pot fi depășite și pe de altă parte este posibil ca o evoluție anterioară să nu fie în mod necesar reprezentativă pentru o evoluție ulterioară.

Informațiile obținute din monitorizări sunt mai scumpe și necesită o abordare critică – se poate întâmpla ca intențiile sesizate în cadrul monitorizărilor și din chestionare să nu fie transpuse în realitate.

În sfârșit, informațiile rezultate din observațiile asupra comportamentului oamenilor sunt cele mai demne de încredere dar și cele mai scump de obținut, uneori fiind imposibil de cules informațiile necesare.

3. Previzionarea – aplicații

În principiu, orice formă de luare a deciziilor și de planificare a activității în afaceri implică o previzionare. Aplicațiile tipice cuprind:

Planificarea producției	Care impune previzionare
Controlul stocurilor	Care presupune planificarea promovării produselor
Fluctuațiile investiționale	Planificarea la nivelul companiei
Proiecte de costuri	Elaborarea bugetului

4. Tehnicile calitative și cantitative

Se poate face o clasificare convenabilă a tehnicilor de previzionare după caracterul lor predominant calitativ sau cantitativ. Aceste clasificări nu sunt în nici un caz rigide și sunt folosite numai pentru a servi ca mijloc de identificare.

5. Tehnicile cantitative

Sunt tehnici cu diferite niveluri de complexitate statistică, bazate pe analiza datelor anterioare referitoare la subiectul investigației, cum ar fi: cifrele referitoare la vânzări, situația stocurilor, costurile implicate etc.

Indiferent cât de sofisticată ar fi tehnica utilizată, se poate porni de la presupunerea că modelele anterioare se pot dovedi utile și în viitor. În mod evident, pentru multe rubrici operaționale (consumul de materiale, vânzarea producției existente, costuri) informațiile anterioare pot folosi drept ghid pentru viitor, dar există și împrejurări în care nu există informații anterioare, cum ar fi în cazul lansării unui produs absolut nou, caz în care sunt necesare tehnici calitative mult mai evoluate. În cele ce urmează vom prezenta pe scurt tehnicile cantitative, după care vom trece la o aprofundare a subiectului.

6. Tehnicile calitative

Sunt tehnicile utilizate în cazurile în care datele sunt insuficiente, cum ar fi în cazul lansării unui produs nou și se bazează pe judecata și experiența umană pentru a transforma informațiile calitative în estimări cantitative. Deși tehnicile calitative

sunt utilizate atât pentru previziuni pe termen scurt cât și lung, importanța lor crescând pe măsură ce crește orizontul de timp al previziunii. Chiar și în cazurile în care există informații anterioare, previzunile pe termen lung implică judecată, intuiție, fler, experiență etc., respectiv factori calitativi, care să le dea un caracter cât mai viabil. Pe măsură ce orizontul de timp al previziunii crește, modelele anterioare devin din ce în ce mai puțin utile. Tehnicile calitative tratate pe scurt în această lucrare sunt: *metoda Delphi*, *studiul de piață* și *analogia istorică*.

7. Metoda Delphi

Aceasta este o tehnică utilizată în special pentru realizarea previziunilor pe termen lung, destinată să întrunească consensul experților în privința unei anumite previziuni, fără a se pune problema supunerii previziunii la presiuni pentru a fi conformă cu viziunea majorității. Procedura constă în următoarele: un grup de experți răspund independent la o serie de chestionare, care sunt astfel realizate încât răspunsurile la un chestionar sunt utilizate pentru elaborarea celui care urmează. În acest mod, informațiile pe care le deține unul dintre experți sunt împărtășite tuturor celorlalți, judecățile lor devenind treptat tot mai rafinate pe măsură ce se acumulează tot mai multă informație și experiență.

8. Studiul de piață

Studiul de piață utilizează sondaje de opinie, analize ale informațiilor despre piață, chestionare și alte metode de investigație pentru a măsura reacția pieței la un anumit produs, design, preț etc. Studiul de piață este adeseori foarte exact pentru orizonturi de timp apropiate, dar previziunile pe termene lungi bazate numai pe studiul de piață trebuie privite cu suspiciune, deoarece atitudinile și intențiile oamenilor se schimbă.

9. Analogia istorică

Atunci când nu sunt disponibile informații anterioare asupra unui anumit subiect, cum ar fi în cazul lansării unui nou produs, se pot analiza informațiile referitoare la alte produse similare, pentru a se stabili ciclul de viață și nivelurile de vânzare preconizate pentru noul produs. În mod evident, trebuie acordată o atenție deosebită utilizării analogiilor dintre obiecte diferite, pentru perioade diferite de timp, dar aceste tehnici pot fi utile pentru formarea unei imagini de ansamblu pe termen lung până la mediu.

Notă asupra metodelor calitative

a) Atunci când nu sunt disponibile informații în legătură cu subiectul previziunii

este implicată inevitabil o doză mai mare de judecată în realizarea previziunilor.

b) Unele dintre tehnicile calitative menționate mai înainte utilizează tehnici statistice avansate, cum ar fi unele dintre metodele de prelevare a eșantioanelor utilizate în cercetarea pieței. Cu toate acestea, orice metodă de acest gen se poate dovedi a avea o valoare redusă în domeniul previziunilor, datorită lipsei de informații cantitative referitoare la obiectul previziunii.

10. Previziunile cantitative

O premisă obligatorie pentru utilizarea tehnicii pe care o vom descrie în continuare este existența informațiilor referitoare la evoluțiile anterioare ale produsului. Cu cât este mai mare perioada de timp pentru care există informații, cu atât este mai probabil ca modelele cuprinse în aceste informații să fie reprezentative pentru viitor. Acesta reprezintă principala supoziție care stă la baza utilizării tehnicilor statistice de previzionare. Cu toate acestea, indiferent cât de îndelungată ar fi perioada de timp pentru care există informații, orice extrapolări sau previziuni care pornesc de la aceste informații, oricare ar fi tehnica de prelucrare a datelor aplicată, trebuie tratate cu precauție. Condițiile pot să se schimbe și se schimbă destul de rapid. Judecata, experiența și o cunoaștere aprofundată a pieței joacă un rol important atunci când se pune problema realizării unei previziuni demne de încredere.

11. Analiza seriilor cronologice

Așa cum indică și titulatura, analiza seriilor cronologice utilizează o formă de analiză matematică sau statistică a datelor anterioare, aranjate în serii cronologice, cum ar fi: nivelul lunar al vânzărilor pentru ultimii zece ani. Analiza seriilor cronologice are avantajul unei relative simplități, dar sunt o serie de factori care trebuie avuți în vedere.

a) Datele anterioare sunt realmente reprezentative? De exemplu: cuprind o perioadă de recesiune/boom economic, de schimbare majoră a preferințelor cumpărătorilor etc.?

b) Pe ansamblu, metodele de previziune bazate pe seriile cronologice sunt mai adecvate pentru previziunile pe termen scurt. În privința presiunilor externe pe termen lung, modificărilor de politică internă, datele istorice sunt mai puțin adecvate.

c) Metodele de analiză a seriilor cronologice sunt cele mai adecvate pentru situațiile relativ stabile. În cazurile în care sunt de așteptat fluctuații și/sau schimbări majore ale condițiilor, aceste metode de previzionare dau rezultate slabe.

12. Analiza seriilor cronologice – media mobilă

Dacă previziunea pentru vânzările din luna care urmează, să spunem decembrie, ar fi echivalentă cu vânzările reale pe luna noiembrie, atunci previziunile obținute

pot fluctua în sens pozitiv și negativ odată cu orice fluctuație aleatorie. Dacă previziunea pentru vânzările lunii care urmează constituie o medie a vânzărilor pe mai multe luni precedente, atunci este posibil ca eventualele fluctuații să se anuleze între ele, respectiv să se compenseze reciproc. Acesta este principiul – simplu de altfel – care stă la baza metodei mediei mobile, fiind, de altfel, una dintre tehnicile de compensare. Metoda aceasta rezultă din tabelul 9.1.

Exemplul 1

Tabelul 9.1

Nivelul anterior al vânzărilor		Previziunea realizată prin		
Luna	Vânzările reale (număr de unități)	medie mobilă pentru 3 luni	medie mobilă pentru 6 luni	medie mobilă pentru 12 luni
Ianuarie	450			
Februarie	440			
Martie	460			
Aprilie	410	450		
Mai	380	437		
Iunie	400	417		
Iulie	370	397	423	
August	360	383	410	
Septembrie	410	377	397	
Octombrie	450	380	388	
Noiembrie	470	407	395	
Decembrie	490	443	410	
Ianuarie	460	470	425	424

Previziunea pentru fiecare lună reprezintă media vânzărilor reale pentru ultimele *n* luni. De exemplu, previziunile mediilor mobile pe 3 luni au fost calculate după cum urmează:

$$\text{Previziunea pentru aprilie} = \frac{\text{vânzări ianuarie} + \text{vânzări februarie} + \text{vânzări martie}}{3}$$

$$= \frac{450 + 440 + 460}{3} = 450.$$

$$\text{Previziunea pentru mai} = \frac{\text{vânzări februarie} + \text{vânzări martie} + \text{vânzări aprilie}}{3}$$

$$= \frac{440 + 460 + 410}{3} = 437.$$

O logică similară se aplică pentru mediile mobile pe 6 luni și pe 12 luni.

Nota 1. Media mobilă poate fi utilizată ca previziune , așa cum am arătat mai

înainte, dar la reprezentarea grafică a mediilor mobile pe diagrame, trebuie să se țină seama de faptul că, fiind medii, plotările trebuie plasate la mijlocul perioadelor la care se referă.

Nota 2. Mediile mobile pe 12 luni sau totalurile mobile anuale constituie o diagramă utilizată pe scară largă, numită diagrama *Z*, deoarece are forma literei Z. Partea superioară a literei Z este formată din totalul mobil anual, partea inferioară este formată de cifrele lunare individuale, iar partea înclinată este reprezentată de cifrele lunare cumulate.

13. Caracteristicile mediilor mobile

a) Medii mobile diferite dau previziuni diferite.

b) Cu cât este mai mare numărul perioadelor din media mobilă, cu atât mai mare este efectul de compensare.

c) Dacă tendința datelor anterioare este considerată a fi relativ stabilă pe intervale alese aleator, atunci trebuie să fie ales un număr mai mare de perioade luate în calcul.

d) În mod similar, dacă se consideră că există anumite schimbări în privința datelor anterioare, se caută să se asigure o mai mare sensibilitate a datelor și ca urmare se calculează medii mobile pentru intervale mai scurte.

14. Limitele mediilor mobile

a) Se acordă o importanță egală tuturor valorilor cuprinse în calculul mediilor mobile, deși în mod rațional este de presupus că datele mai recente sunt mai relevante pentru condițiile actuale.

b) Media mobilă pe o perioadă n necesită stocarea a $n - 1$ valori, la care se adaugă și observațiile cele mai recente. Aceasta poate să nu pară o limitare prea importantă atunci când se calculează mediile mobile numai pentru câteva produse, dar devine un impediment major pentru companiile mari, care au stocuri de 25 000 de repere, pentru fiecare dintre ele solicitându-se calcularea mediei mobile care implică, să spunem, stocarea informațiilor pe 6 luni.

c) Calculul mediilor mobile nu ține seama de datele din afara perioadelor cuprinse în medii, astfel încât nu se realizează o utilizare la maximum a datelor disponibile.

d) Utilizarea ca previziune a unei medii mobile neajustate poate să aibă efecte înșelătoare, aceasta putând ascunde o variație sezonieră care scapă calculului.

15. Compensarea exponențială

Este o tehnică de previziune frecvent întâlnită, care acoperă în mare limitările mediilor mobile. Această metodă ponderează în mod automat datele, introducând un

indice de actualizare care scade exponențial odată cu vechimea datelor, respectiv valorile cele mai recente primesc un indice de actualizare mai mare decât datele mai vechi. Tehnica compensării exponențiale reprezintă de fapt un sistem de medii mobile ponderate, principiul care stă la baza sa fiind următorul:

Noua previziune = Vechea previziune + o proporție de eroare a previziunii

O formulă mai simplă este următoarea:

Noua previziune = Vechea previziune + α (Observația cea mai recentă – Vechea previziune),

unde α este constanta de compensare.

16. Constanta de compensare

Valoarea lui α poate fi cuprinsă în intervalul de la 0 la 1. Cu cât este mai mare valoarea lui α (respectiv cu cât este mai apropiată de 1) cu atât mai sensibilă este previziunea la condițiile curente, în timp ce la valori scăzute ale lui α, previziunea va fi mai stabilă, respectiv mai puțin sensibilă la condițiile curente. O echivalență aproximativă a valorilor lui α cu numărul de perioade ale mediei mobile este prezentata în continuare:

Valoarea lui α	Perioadele aproximative în echivalentul medie imobile
0,1	19
0,25	7
0,33	5
0,5	3

Totalul valorilor indicilor de compesare ai termenilor cuprinși într-o nouă previziune tinde la 1 și valoarea acestora se reduce exponențial, de la valoarea cea mai mare a lui α, pentru observațiile recente, până la cele mai mici valori, pentru observațiile cele mai vechi. De exemplu, dacă valoarea lui α este 0,3 și se cere o previziune a vânzărilor în luna iunie, atunci aceasta se va calcula din valorile medii ponderate ale vânzărilor pe lunile anterioare, după cum urmează:

0,3 (vânzările din mai) + 0,21 (vânzările din aprilie) + 0,147 (vânzările din martie) + 0,1029 (vânzările din februarie) + 0,072 (vânzările din ianuarie) + 0,050 (vânzările din decembrie) etc.

Se observă din exemplul de mai înainte că totalul valorilor constantei de compensare tinde la 1. Trebuie subliniat faptul că aplicarea formulei de la paragraful 15 dă în mod automat acești indici, nemaifiind necesare alte calcule.

17. Ilustrarea compensării exponențiale

Reproducem mai jos datele din tabelul 9.1 și previziunile realizate pentru valori de 0,2 și 0,8 ale constantei de compensare (tabelul 9.2).

Tabelul 9.2

Curent		Previziuni exponențiale	
Luna	Vânzări unități	$\alpha = 0,2$	$\alpha = 0,8$
Ianuarie	450		
Februarie	440	450	450
Martie	460	448	442
Aprilie	410	450,4	456,4
Mai	380	442,32	419,28
Iunie	400	429,86	387,86
Iulie	370	423,89	397,57
August	360	413,11	375,51
Septembrie	410	402,49	363,102
Octombrie	450	403,99	400,62
Noiembrie	470	413,19	440,12
Decembrie	490	424,55	464,02
Ianuarie	460	437,64	484,80

Note:

a) Deoarece în acest exemplu nu au fost disponibile previziuni anterioare, am folosit numărul reprezentând vânzările din ianuarie ca previziune pentru luna februarie.

b) După aceea, am aplicat formula obișnuită, de exemplu pentru $\alpha = 0,2$.

Previziunea pentru martie = Previziunea pentru februarie + 0,2 (vânzările din februarie – previziunea pentru februarie).

Previziunea pentru martie = 450 + 0,2 (440 – 450).

Previziunea pentru martie = 448

și în mod similar se va proceda pentru celelalte previziuni.

c) În practică, previziunile se rotunjesc la valoarea întreagă cea mai apropiată. Noi am lăsat valorile așa cum rezulta din calcule, astfel încât cititorul să le poată compara cu valorile obținute din propriile calcule.

d) Este evident că o valoare mai mare a lui a, respectiv 0,8 va da o valoare a predicției mai apropiată de valorile recente ale vânzărilor.

18. Extinderea compensării exponențiale

Principiul fundamental al compensării exponențiale a fost prezentat anterior, dar pentru a face față unor probleme cum ar fi variațiile sezoniere de exemplu, creșteri sau descreșteri abrupte ale cererii pieței etc, au fost imaginate diferite variante

ale acestui model fundamental. Acestea cuprind compensarea exponențială dublă și triplă și corecția tendințelor și a factorilor de întârziere etc. Aceste tehnici nu intră în scopurile pe care și le-a propus lucrarea de față, drept pentru care nu ne vom referi la ele.

19. Caracteristicile compensării exponențiale

a) Datele cele mai recente capătă o pondere mai mare.

b) Sunt încorporate toate datele anterioare, astfel încât nu există puncte de întrerupere ca în cazul mediilor mobile.

c) Necesită stocarea unui volum mai mic de informații comparativ cu mediile mobile pe perioade lungi.

d) La fel ca și mediile mobile, constituie un sistem de previziune adaptabil. Aceasta înseamnă că se poate adapta permanent pe măsură ce noi informații sunt disponibile și, ca urmare, este în mod frecvent încorporat ca parte integrantă a sistemelor de control al stocurilor și a producției.

e) Pentru a putea surmonta diferite neajunsuri (tendințe, factori sezonieri etc), modelul de bază trebuie modificat.

f) Indiferent ce formă de compensare exponențială este adoptată, modelul respectiv poate fi modificat foarte simplu pentru a corespunde modificărilor condițiilor, aceasta realizându-se prin schimbarea valorii lui α.

20. Analiza seriilor cronologice – descompunerea

Observațiile realizate de-a lungul timpului (respectiv o serie cronologică) au cel mai adesea următoarele patru caracteristici:

a) **O tendință pe termen lung** (notată cu *T*), respectiv tendința pe termen lung de scădere sau de creștere a seriilor pe ansamblul lor.

b) **Variațiile sezoniere** (notate cu *S*) respectiv fluctuațiile periodice ale valorilor pe termen scurt, datorate unor împrejurări, cum ar fi: vânzările din magazine sunt în general mai mari vinerea și sâmbăta, vânzările de combustibil pentru încălzire sunt mai mari în timpul iernii etc. În analiza seriilor cronologice, *sezonier* are o semnificație mai largă decât cea referitoare la anotimpurile anului.

c) **Variațiile ciclice** (notate cu *C*) sunt modificări pe termen mediu, datorită unor factori care acționează o scurtă perioadă, apoi dispar, pentru a-și face din nou apariția, urmând un ciclu repetitiv. Ciclul economic (boom, recesiune, boom,...) poate fi un exemplu. Variațiile ciclice se manifestă pe durate mai lungi decât variațiile sezoniere.

d) **Variațiile aleatorii sau reziduale** (notate cu *R*) sunt variații aleatorii nerecurente, ca de exemplu: războaie, incendii, schimbări de guverne etc.

Pentru realizarea unor previziuni de o precizie acceptabilă este adeseori necesară separarea caracteristicilor de mai înainte (respectiv *T, S, C* și *R*) de datele brute.

Acest proces este denumit *descompunerea seriilor cronologice* sau, mai simplu, *analiza seriilor cronologice*. Elementele separate sunt combinate apoi pentru a se obține previziunea.

Există două modele principale de serii cronologice, repectiv *modelul aditiv* și *modelul multiplicativ*.

Modelul aditiv

Valoarea seriei cronologice = $T + S + C + R$, unde S, C și R sunt exprimate ca valori absolute.

Modelul multiplicativ

Valoarea seriei cronlogice = $(T \times S \times C \times R)$, unde S, C și R sunt exprimate ca *procentaje* sau *proporții*.

Modelul multiplicativ este utilizat în mod obișnuit în practică și este de preferat în condițiile în care caracteristicile interacționează, respectiv atunci când o valoare mai mare a tendinței determină creșterea variației sezoniere. Modelul aditiv este de preferat pentru condițiile în care factorii componenți sunt independenți cum ar fi atunci când mărimea variației sezoniere nu este afectată de valoarea tendinței. În fig. 9.1 sunt ilustrate aplicațiile celor două modele în cazul unei tendințe crescătoare.

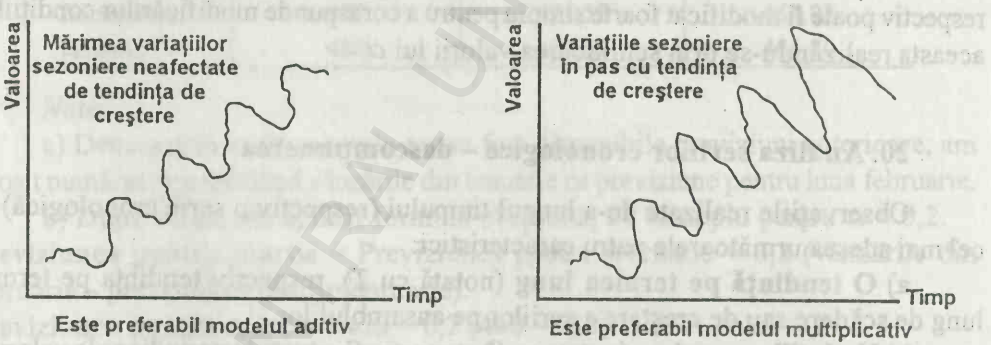


Fig. 9.1

Dintre cele patru elemente, cele mai importante sunt primele două, tendința și variația sezonieră, iar în cadrul acestei lucrări vom insista asupra lor. În imaginea din continuare se poate vedea cum sunt separate tendința (T) și variația sezonieră (S) dintr-o serie cronologică și cum sunt utilizate valorile calculate ale lui T și S pentru realizarea unei previziuni. Procesul separării tendinței și a variației sezoniere se numește *de-sezonizarea datelor*.

21. Analiza seriilor cronologice, tendința și variațiile sezoniere

Vom folosi datele din următorul tabel pentru a ilustra modul în care se calculează tendința și variația sezonieră.

Vânzările în mii de unități					
		Trimestrul			
		1	2	3	4
Anul	19-1	20	32	62	29
	19-2	21	42	75	31
	19-3	23	39	77	48
	19-4	27	39	92	53

Din simpla observație a datelor înscrise este evident faptul că există un element sezonier foarte puternic, cuprins în datele de mai înainte (cu un minim în trimestrul 1 și un maxim în trimestrul 3) și că se manifestă o tendință crescătoare.

Succesiunea de pași pentru analiza datelor și pregătirea previziunii sunt:

Pasul 1. Se calculează tendința pentru fiecare trimestru, folosind metoda pătratelor minime.

Pasul 2. Se estimează vânzările pentru fiecare trimestru, utilizându-se formula de regresie obținută la pasul 1.

Pasul 3. Se calculează variațiile procentuale pentru vânzările reale din fiecare trimestru, din estimările obținute la pasul 2.

Pasul 4. Se face media variațiilor procentuale de la pasul 3. Se obțin astfel valorile medii ale variațiilor sezoniere.

Pasul 5. Se realizează previziunea pe baza relației tendința × variațiile sezoniere procentuale.

Pasul 1

Se calculează tendința pentru datele pe carele avem la dispoziție, prin calculul regresiei liniare prin metoda pătratelor minime $y = a + bx$, așa cum am arătat la capitolul 7 (tabelul 9.3).

Tabelul 9.3

	Trimestre x	Vânzări y	xy	x^2
Anul 1	1	20	20	1
	2	32	64	4
	3	62	186	9
	4	29	116	16
	5	21	105	25
Anul 2	6	42	252	36
	7	75	525	49
	8	31	248	64
	9	23	207	81
Anul 3	10	39	390	100
	11	77	847	121
	12	48	576	144
	13	27	351	169
Anul 4	14	39	546	196
	15	92	1380	225
	16	53	848	256
	$\Sigma x = 136$	$\Sigma y = 710$	$\Sigma xy = 6661$	$\Sigma x^2 = 1496$

Ecuațiile pătratelor minime:

$$\Sigma y = an + b\Sigma x$$
$$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2$$
$$710 = 16a + 136b$$
$$6.661 = 136a + 1.496b$$
$$\therefore\ 626 = 340b$$

$b = 1,84$ și făcând substituția obținem

$a = 28,74$

Dreapta tendinței = $y = 28,74 + 1,84x$.

Pașii 2 și 3

Se utilizează linia tendinței pentru a calcula o estimare a vânzărilor pentru fiecare trimestru.

De exemplu, estimarea pentru primul trimestru al primului an va fi

estimarea = 28,74 + 1,84 (1) = 30,58.

Mai departe, valoarea reală a vânzărilor este exprimată procentual față de această estimare. De exemplu, vânzările reale pentru primul trimestru sunt 20, astfel încât variația sezonieră va fi:

$$\frac{\text{Vânzări reale}}{\text{Estimare}}\% = \frac{20}{30,58} = 65\%.$$

Rezultatele acestor calcule sunt prezentate în tabelul 9.4.

Tabelul 9.4

Estimarea tendințelor și variațiile procentuale

	Trimestre x	Vânzări y	Vânzări estimate	Estimate; reale
Anul 1	1	20	30,58	65
	2	32	32,42	99
	3	62	34,26	181
	4	29	36,10	80
	5	21	37,94	55
Anul 2	6	42	39,78	106
	7	75	41,62	180
	8	31	43,46	71
	9	23	45,30	51
Anul 3	10	39	47,14	83
	11	77	48,98	157
	12	48	50,82	94
	13	27	52,66	51
Anul 4	14	39	54,50	72
	15	92	56,34	163
	16	53	58,18	91

BCU IAȘI CENTRALĂ UNIVERSITY LIBRARY

Pasul 4

Se fac mediile variațiilor procentuale, pentru a se afla variațiile medii sezoniere (tabelul 9.5)

Tabelul 9.5

	Q_1 %	Q_2 %	Q_3 %	Q_4 %
	65	99	181	80
	55	106	180	71
	51	83	157	94
	51	72	163	91
	222	360	681	336
: 4 =	56%	90%	170%	84%

Așadar acestea sunt variațiile medii preconizate în funcție de tendința fiecărui trimestru; de exemplu, în medie, primul trimestru al fiecărui an va reprezenta 56% din valoarea tendinței. Datorită faptului că s-a făcut media variațiilor, valorile care depășesc 100% (cum ar fi Q_3 în acest exemplu) trebuie să egaleze valorile mai mici de 100% (Q_1, Q_2 și Q_4 în cazul acestui exemplu). Acest lucru se poate verifica prin adunarea variațiilor medii, verificându-se ca totalul să fie 400%, după cum urmează:

$$56\% + 90\% + 170\% + 84\% = 400\%:$$

Uneori, pentru ușurința calculelor este necesară ajustarea ușoară a mediilor variațiilor.

Pasul 5

Se pregătește previziunea finală pe baza estimărilor liniei de tendință din tabelul 9.4 (respectiv 30,58 , 32,42 etc) și a variațiilor medii sezoniere din tabelul 9.5 (respectiv 56%, 90%, 170% și 84%).

Previziunea sezonieră ajustată se calculează după cum urmează:

Previziunea sezonieră ajustată = estimarea tendinței +
+ variația procentuală sezonieră.

De exemplu, previziunile pentru trimestrele 1 și 2 ale primului an sunt:

Previziunea $Q_1 = 30{,}58 \times 56\% = 17{,}12$,

Previziunea $Q_2 = 32{,}42 \times 90\% = 29{,}18$.

Previziunile finale sunt reprezentate în tabelul 9.6.

BCU IASI CENTRALA UNIVERSITARA LIBRARY

Tabelul 9.6

Previziunile sezoniere ajustate

	Trimestre x	Vânzări y	Previziunea sezonieră ajustată
Anul 1	1	20	17,12
	2	32	29,18
	3	62	58,24
	4	29	30,32
	5	21	21,24
Anul 2	6	42	35,80
	7	75	70,75
	8	31	36,51
	9	23	25,37
Anul 3	10	39	42,43
	11	77	83,27
	12	48	42,69
	13	27	29,49
Anul 4	14	39	49,05
	15	92	95,78
	16	53	48,87

Extrapolarea pe baza tendinței și a factorilor sezonieri.

Odată calculate, valorile cuprinse în tabelul 9.6 pot fi utilizate pentru previzionarea (extrapolarea) viitorului vânzărilor. Dacă s-ar cere să se dea o estimare a vânzărilor din anul următor (respectiv trimestrele 17, 18, 19 și 20 din seriile noastre) vom proceda după cum urmează:

Trimestrul 17 Tendința de bază = 28,74 + 1,84(17)
= 60,02.

Ajustarea sezonieră pentru primul trimestru = 56%

Previziunea ajustată = 60,02 × 56%
= 33,61.

În mod asemănător se obțin următoarele rezultate:

Previziunea ajustată Trimestrul 18 = 55,67
19 = 108,29
20 = 55,05.

Note:

a) Descompunerea seriilor cronologice nu este un sistem de previziune adaptativ, cum sunt mediile mobile și compensarea exponențială.

b) Previziunile obținute prin acest gen de analiză trebuie abordate cu prevedere. Condițiile variabile și factorii sezonieri variabili fac din predicția pe termen lung o sarcină foarte dificilă.

c) Exemplul de mai înainte a fost o mostră de *model multiplicativ*. Aceasta se datorează faptului că variațiile sezoniere au fost exprimate în termeni de procente sau proporții. Aceeași pași trebuie urmați și în cazul în care se adoptă modelul aditiv, cu deosebirea că se vor folosi valorile absolute ale variațiilor tendinței. De exemplu, primele două variații ar fi:

Q_1: 20 – 30,58 = variația absolută = –10,58,

Q_2: 32 – 32,42 = variația absolută = –0,42

și așa mai departe

Se calculează apoi media variațiilor absolute în mod normal și se află astfel variația absolută medie, fie cu semnul +, fie cu semnul -, iar aceste valori sunt utilizate apoi pentru realizarea previziunilor sezoniere ajustate.

În fig. 9.2 sunt reprezentate vânzările reale, dreapta tendinței și previziunea sezonieră ajustată.

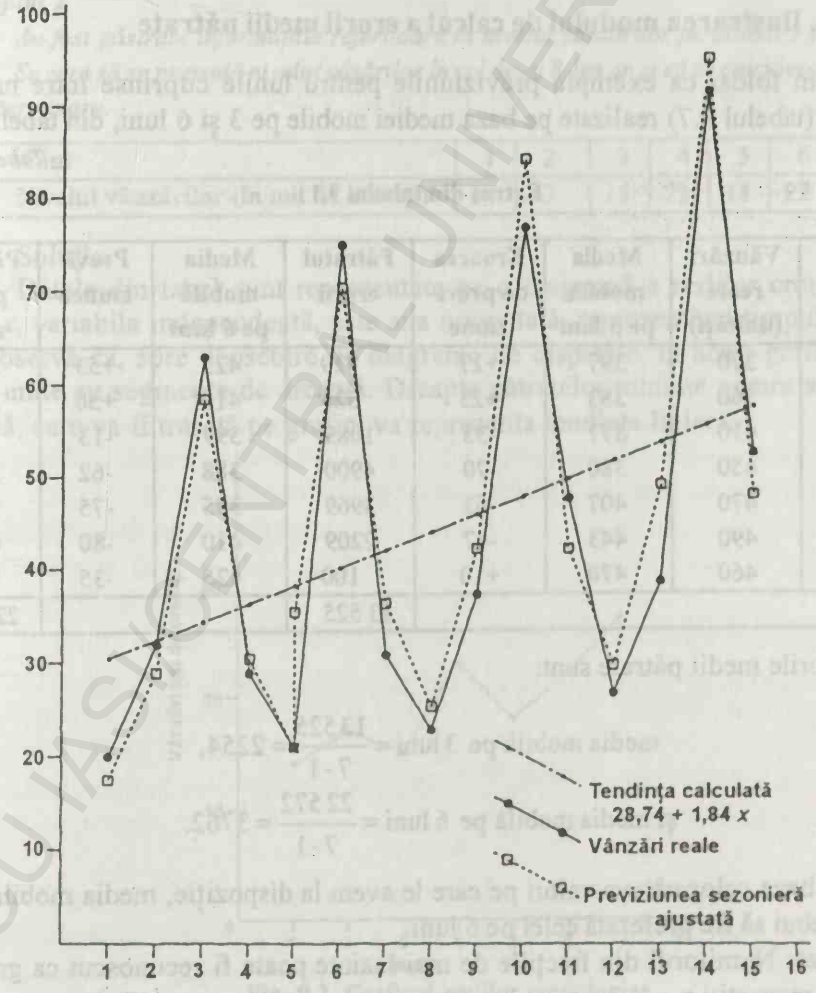


Fig. 9.2. Analiza seriilor cronologice.

22. Măsurarea erorilor din previziuni

Erorile cuprinse în previziuni pot fi datorate mai multor cauze, cum ar fi de exemplu alegerea unui sistem de calculare a previziunii inadecvat, alegerea unei valori inadecvate a lui *a* pentru compensarea exponențială sau o modificare substanțială a tiparului vânzărilor. Indiferent care este cauza, conducerea firmei dorește să cunoască dimensiunile erorilor de previziune și în acest scop au fost imaginate multiple metode de calcul. O tehnică utilizată frecvent, adecvată pentru seriile cronologice, este reprezentată de calcularea *erorii medii pătrate a deviațiilor dintre previziune și* realitate și alegerea unui sistem de previzionare și/sau a unor parametri care să dea cea mai redusă valoare pentru eroarea medie pătrată, respectiv apropiat de metoda „pătratelor medii" de stabilire a dreptei de regresie.

23. Ilustrarea modului de calcul a erorii medii pătrate

Vom folosi ca exemplu previziunile pentru lunile cuprinse între iunie și ianuarie, (tabelul 9.7) realizate pe baza mediei mobile pe 3 și 6 luni, din tabelul 9.1.

Tabelul 9.7

Extras din tabelul 9.1

	Vânzări reale (unități)	Media mobilă pe 3 luni	Eroarea de previziune	Pătratul erorii	Media mobilă pe 6 luni	Previziunea	Pătratul previziunii
Iul.	370	397	+27	729	423	+53	2809
Aug.	360	383	+23	529	410	+50	2500
Sept.	410	377	-33	1089	397	-13	169
Oct.	450	380	-70	4900	388	-62	3844
Nov.	470	407	-63	3969	395	-75	5625
Dec.	490	443	-47	2209	410	-80	6400
Ian.	460	470	+10	100	425	-35	1225
				13 525			22 572

Erorile medii pătrate sunt:

$$\text{media mobilă pe } 3 \text{ luni} = \frac{13\,525}{7-1} = 2254,$$

$$\text{și media mobilă pe } 6 \text{ luni} = \frac{22\,572}{7-1} = 3762.$$

Pe baza celor câteva valori pe care le avem la dispoziție, media mobilă pe 3 luni ar trebui să fie preferată celei pe 6 luni.

Notă: Numitorul din fracțiile de mai înainte poate fi recunoscut ca grad de libertate, respectiv $n - 1$.

24. Previziunile pe termen lung

Mediile mobile, compensarea exponențială și metodele de descompunere sunt adecvate pentru previziunile pe termen scurt și mediu. Previziunile pe termen mai lung sunt în general mai puțin detaliate și în general au în vedere realizarea unei previziuni asupra tendințelor principale de la an la an. Se pot aplica oricare dintre tehnicile de regresie descrise în capitolele precedente, în funcție de presupunerea de liniaritate sau neliniaritate, numărul de variabile independente și așa mai departe. Pentru previziunea tendinței, cel mai frecvent este utilizată metoda de regresie a pătratelor minime, pe care o vom prezenta în continuare.

25. Previziunea pe baza pătratelor minime

Exemplul 2

Au fost păstrate informațiile referitoare la nivelul vânzărilor pe ultimii 7 ani.

Se cere să se prevadă nivelul vâzărilor în cel de-al 8-lea an și să se calculeze coeficientul de determinare.

Anul	1	2	3	4	5	6	7
Nivelul vânzărilor (în mii de unități)	14	17	15	23	18	22	27

Soluția

Datele din tabel sunt reprezentate pe o diagramă a seriilor cronologice în care x, variabila independentă, este axa orizontală, reprezentând timpul (fig. 9.3). Se observă că, spre deosebire de diagrama de dispersie, în acest grafic punctele sunt unite cu segmente de dreaptă. Dreapta pătratelor minime pentru aproximația ideală, care va fi trasată pe grafic, va reprezenta tendința liniară.

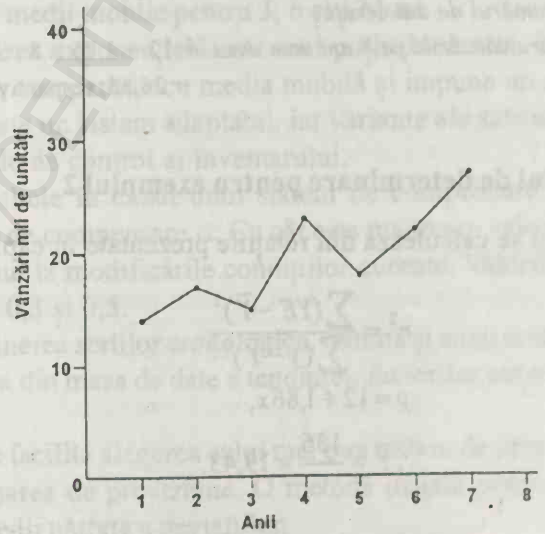


Fig. 9.3. Graficul seriilor cronologice.

Calculele pentru dreapta de regresie sunt prezentate în continuare și sunt conforme cu principiile prezentate în capitolul 7.

Exemplul 3

Având 7 perechi de valori, n = 7, datele problemei sunt notate după cum urmează:

Anii (x)	Vânzările (y)	xy	x^2
1	14	14	1
2	17	34	4
3	15	45	9
4	23	92	16
5	18	90	25
6	22	132	36
7	27	189	49
$\Sigma x = 28$	$\Sigma y = 136$	$\Sigma xy = 596$	$\Sigma x^2 = 140$

(Se lucrează în toate calculele cu două zecimale)

$$136 = 7a + 28b$$
$$596 = 28a + 140b$$
$$52 = 28b$$
$$b = 1{,}86$$

Făcând înlocuirile într-una dintre ecuații vom avea:

$$a = 12$$

∴ Dreapta de regresie $= y = 12 + 1{,}86\,x$

sau, în termenii problemei noastre:

Vânzările (în mii de unități) = 12,00 + 1,86 (numărul de ani).

Pentru a folosi această expresie matematică la formularea previziunii, trebuie numai să înlocuim în paranteză numărul de ani ceruți.

De exemplu, pentru vânzările pe 8 ani vom avea $= 12 + 1{,}86 \times 8$

$= 26{,}88$, respectiv 26.888 de unități.

26. Coeficientul de determinare pentru exemplul 2

Acest coeficient se calculează din relațiile prezentate în capitolul 7:

$$r^2 = \frac{\sum (YE - \overline{Y})^2}{\sum (y - \overline{Y})^2},$$

$$y = 12 + 1{,}86x,$$

$$\therefore \overline{Y} = \frac{136}{7} = 19{,}43.$$

BCU IASI CENTRALA UNIVERSITARA

x (ani)	y (vânzări)	YE	$(YE - \overline{Y})$	$(YE - \overline{Y})^2$	$y - \overline{Y}$	$(y - \overline{Y})^2$
1	14	13,86	-5,57	31,02	-5,43	29,48
2	17	15,72	-3,71	13,76	-2,43	5,90
3	15	17,58	-1,85	3,42	-4,43	19,62
4	23	19,44	0,01	0	3,57	12,74
5	18	21,30	1,87	3,49	-1,43	2,04
6	22	23,16	3,73	13,91	2,57	6,60
7	27	25,02	5,59	31,24	7,57	57,30
$\Sigma y =$ 136			$\Sigma(YE - \overline{Y})^2 =$ 96,84		$\Sigma(y - \overline{Y})^2 =$ 133,68	

$$r^2 = \frac{\sum(YE - \overline{Y})^2}{\sum(y - \overline{Y})^2} = \frac{96,84}{133,68} = 72,44\% = 72\%.$$

Acest rezultat poate fi interpretat în modul următor: în exemplul dat, 72% din variația valorilor reale ale lui y (vânzările) pot fi previzionate prin modificarea valorilor lui x (anii). Cu alte cuvinte, alți factori în afara valorii lui x influențează valoarea lui y în proporție de (100 – 72)%, respectiv 28%.

27. Rezumat

a) Analiza seriilor cronologice se bazează pe date care sunt dispuse pe perioade regulate de timp, ca de exemplu vânzările pe lună.

b) Sistemul de medii mobile se poate baza pe orice număr de perioade. În mod curent se utilizează medii mobile pentru 3; 6 și 12 luni.

c) Compensarea exponențială este mai puțin încărcată, în ceea ce privește aparatul matematic, comparativ cu media mobilă și impune un nivel mai redus de stocare a datelor. Este un sistem adaptabil, iar variante ale sale sunt incluse în mod frecvent în sistemele de control al inventarului.

d) Factorul cheie în cazul unui sistem de compensare exponențială este alegerea constantei de compensare α. Cu cât este mai mare valoarea sa, cu atât este mai sensibil sistemul la modificările condițiilor curente. Valorile cele mai folosite sunt cuprinse între 0,3 și 0,5.

e) Descompunerea seriilor cronologice, numită și analiza seriilor cronologice, reprezintă separarea din masa de date a tendinței, factorilor sezonieri și a mișcărilor ciclice.

f) Pentru a se facilita alegerea celui mai bun sistem de previziune este necesar să se calculeze eroarea de previziune. O metodă uzuală pentru această constă în calcularea erorii medii pătrate a deviațiilor.

g) În analizele seriilor cronologice sunt adeseori utilizate tehnicile de regresie prin pătratele minime.

28. De reținut

a) Metodele fundamentale și principiile realizării previziunilor au fost prezentate în ultimele trei capitole, dar trebuie reținut că în practică sunt utilizate foarte multe sisteme-hibrid.

b) În orice subiect de examen sau concurs pot apărea întrebări referitoare la previziuni, fie ca subiecte independente, fie ca subpuncte în alte probleme.

c) Pentru previziunile pe termen scurt și mediu, sistemele cele mai frecvent utilizate sunt compensarea exponențială simplă și dublă; cea mai mare parte a programelor de calculator pentru gestiune și previziune încorporează și aceste metode. Pentru previziunile pe termen lung, metoda cea mai larg utilizată, datorită preciziei sale, este metoda curbei tendinței calculată prin regresie matematică.

Întrebări de autocontrol

1. Ce se înțelege prin previziune? (2)
2. Faceți distincția între tehnicile de previziune calitative și cantitative. (5, 6, 7)
3. Ce este tehnica Delphi? (7)
4. Ce este analiza seriilor cronologice? (11)
5. Ce este sistemul de previziune pe baza mediilor mobile? (12)
6. Care sunt limitările sistemului mediilor mobile și în ce mod le contracarează compensarea exponențială? (14 și 15)
7. Care sunt principalele caracteristici ale compensării exponențiale? (15 și 16)
8. Care sunt factorii în care poate fi descompusă o serie cronologică? (20)
9. Care sunt pașii care trebuie urmați pentru descompunerea unei serii cronologice? (21)
10. Cum pot fi calculate erorile de previziune? (22)
11. Cum pot fi aplicate tehnicile de corelare și de regresie în cazul previziunilor prin serii cronologice? (24)

Exerciții cu răspunsuri

1. Să se calculeze mediile pe 3 luni și 6 luni pentru următoarele date:

Lunile	Vânzări
Ianuarie	1.200
Februarie	1.280
Martie	1.310
Aprilie	1.270
Mai	1.190
Iunie	1.290

Iulie	1.410
August	1.360
Septembrie	1.430
Octombrie	1.280
Noiembrie	1.410
Decembrie	1.390

2. Folosind nivelul vânzărilor din luna ianuarie ca previziune anterioară și un coeficient de compensare de 0,3 (valoarea lui α) se cere să se calculeze previziunile lunare începând cu luna februarie, utilizând compensarea exponențială.

3. Să se calculeze erorile de previziune pentru mediile mobile pe 3 luni și respectiv 6 luni, calculate în primul exercițiu.

Răspunsuri la exerciții

1.

	Vânzări	Media mobilă pe 3 luni	Media mobilă pe 6 luni
Ianuarie	1200		
Februarie	1280		
Martie	1310		
Aprilie	1270	1263	
Mai	1190	1287	
Iunie	1290	1257	
Iulie	1410	1250	1257
August	1360	1297	1292
Septembrie	1430	1353	1305
Octombrie	1280	1400	1325
Noiembrie	1410	1357	1327
Decembrie	1390	1373	1363

2. Previziunile compensate exponențial începând cu luna februarie, pentru $\alpha = 0,3$

Februarie	1200
Martie	1224
Aprilie	1250
Mai	1256
Iunie	1233
Iulie	1250
August	1283
Septembrie	1327
Octombrie	1358
Noiembrie	1335
Decembrie	1357

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

	Vânzări	Media mobilă pe 3 luni	Previziunea		Media mobilă pe 6 luni	Previziunea	
			Eroare	Pătratul erorii		Eroare	Pătratul erorii
Aprilie	1270	1263	7	49			
Mai	1190	1287	97	9409			
Iunie	1290	1257	33	1089			
Iulie	1410	1250	160	25 600	1257	153	23 409
August	1360	1297	63	3969	1292	68	4624
Septembrie	1430	1353	77	5929	1305	125	15 625
Octombrie	1280	1400	120	14 400	1325	45	2025
Noiembrie	1410	1357	53	2809	1327	83	6889
Decembrie	1390	1373	17	289	1363	27	729
Total iulie-decembrie				52 996			53 301

Aşadar, pentru aceeaşi perioadă, valorile comparative ale mediei mobile pe 3 luni este mai aproape de valorile reale.

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

EVALUARE ŞI RECAPITULARE

PARTEA 2

Întrebări cu răspunsuri

Răspunsurile se dau începând cu pagina 553

A1. O companie de software oferă mai multe tipuri de servicii clienților săi, dintre care unul este reprezentat de consultanța telefonică. Compania a decis să facă o analiză a costurilor acestui sistem. Din experiența anterioară, compania a stabilit că prețul mediu al unei consultații telefonice este de circa 20£.

Se dă mai jos lista convorbirilor telefonice pentru consultații în ultimele 64 de zile din ultimul trimestru, datele cuprinse în ea fiind considerate reprezentative.

Convorbiri telefonice pentru consultanță

Nr. apelurilor	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70+	Total
Frecvența	0	5	10	20	15	10	4	0	64

Se cere să se stabilească:

a) Media și deviația standard a convorbirilor telefonice pentru consultații în cursul ultimului trimestru.

b) Costul anual al serviciului de consultații telefonice, calculat pentru o limită de certitudine de 95% și un comentariu al răspunsului.

$$\left[S^2 = \frac{\sum FX^2}{\sum F} - \bar{x}^2 \right]$$

CIMA Metode cantitative

A2. Managerii unei agenții de importuri studiază durata intervalului de timp necesar clienților săi pentru plata facturilor, al căror termen de plată este de 30 de zile.

Pentru aceasta au analizat registrul de încasări al unui număr de 100 de clienți aleși aleator, realizând următorul tabel:

Plata în:	Număr de clienți
5 la 9 zile	4
10 la 14 zile	10
15 la 19 zile	17
20 la 24 zile	20
25 la 29 zile	22
30 la 34 zile	16
35 la 39 zile	8
40 la 44 zile	3

Se cere:

a) Să se calculeze media aritmetică.

b) Să se calculeze deviația standard.

c) Să se construiască o diagramă statistică de frecvență pe care să fie notate modulurile valorilor.

d) Să se estimeze probabilitatea ca o factură neplătită, aleasă aleator să fie emisă de 30 până la 39 de zile.

CIMA Contabilitatea costurilor și metodele cantitative

A3. a) Pentru un eșantion de elemente extrase dintr-o populație se cere să descrieți în cuvinte:

1) Relația generală dintre eroarea standard și deviația standard a populației.

2) În ce mod și de ce variază eroarea standard în funcție de dimensiunile eșantionului.

b) Pentru fiecare lot de produse al unei companii se alege câte un eșantion de 50 de unități.

Volumul unităților care alcătuiesc un eșantion dintr-un anumit lot este de circa 0,25 litri pe unitate și deviația standard a eșantionului este de 0,004 litri.

Se cere să se stabilească limitele volumului mediu al unității lotului pentru un coeficient de certitudine de 95%.

ACCA Informația managerială

A4. Un cercetător de la o mare companie de vânzări en detail dorește să studieze absența pe motive de sănătate a angajaților. Organizația are un număr mare de sucursale, fiecare dintre ele având o evidență strictă a absențelor pe motive de sănătate. În continuare se prezintă un eșantion reprezentând numărul de zile de concediu medical din ultimul an, pentru zece sucursale alese aleator:

18 23 26 30 32 35 39 45 48 54

a) Utilizând aceste date *se cere:*

1) Să se calculeze, pentru un interval de certitudine de 95%, numărul mediu de zile absentate pentru fiecare sucursală.

2) Să se estimeze numărul de sucursale care ar trebui să fie incluse într-un

B.C.U. „M. EMINESCU" IAȘI

eșantion aleator simplu, astfel încât intervalul de certitudine de 95% pentru numărul mediu de zile absentate să nu fie mai mare de 4.

b) După formarea unui eșantion, devine evident faptul că, în funcție de nivelul vânzărilor, sucursalele pot fi împărțite în trei categorii – mici, medii și mari. Pe baza datelor pe care le-a avut la dispoziție pentru fiecare sucursală, cercetătorul a descoperit că dintr-un total de 210 salariați aleși aleator, 90 lucrează în sucursale mici, 36 în sucursale medii și restul în sucursale mari. În total, 96 de salariați nu au nici o absență pe motive de sănătate, dintre care 52 lucrează în sucursalele mici și 29 în sucursalele mari.

1) Să se conceapă un tabel care să reflecte în mod clar aceste informații.

2) Să se aplice un test statistic adecvat pentru a se investiga dacă dimensiunile sucursalelor influențează numărul de zile absentate pe motive de sănătate. Interpretați rezultatele într-un mod clar.

ACCA Tehnici de luare a deciziilor

A5. Șeful controlului de calitate de la compania Queensville Engineers, dna Brooks a ajuns la concluzia că este necesar să pună la punct un program de acceptare pentru verificarea calității componentelor pe care compania le achiziționează. Având în vedere problemele cu care se confruntă compania în privința axurilor pompelor, pe care le achiziționează de la un producător local, măsura dnei Brooks e deosebit de importantă. Dna Brooks a propus următoarele criterii pentru a stabili dacă loturile mari de axuri pentru pompe, achiziționate de la furnizor pot fi acceptate.

Din fiecare lot primit se ia un eșantion aleator format din 50 de bucăți și se acceptă acest lot cu condiția să nu existe în eșantion mai mult de două axuri defecte.

Dna Brooks trebuie să calculeze, așadar, probabilitatea P_a ca un lot să fie acceptat când proporția componentelor defecte din lot p este mică (să spunem, sub 10%).

Se cere:

a) Să se explice de ce este adecvată distribuția Poisson pentru investigarea acestei situații.

b) Aplicând distribuția Poisson, să se determine probabilitatea P_a de acceptare a lotului conținând $p = 2\%$ rebuturi, pentru cazul în care metoda propusă ar fi acceptată.

c) Să se determine P_a pentru $p = 0\%, 5\%, 10\%$ 15% iar valorile acestea să fie plotate pe un grafic care să vizualizeze raporturile dintre P_a (pe axa verticală) și p (pe axa orizontală).

Utilizați acest grafic pentru a calcula:

1) Proporția de rebuturi care nu trebuie depășită dacă furnizorul vrea să fie 95% sigur că lotul expediat va fi acceptat.

2) Proporția de rebuturi din lot pentru care există o probabilitate de numai 5% să fie acceptat de catre compania Queensville.

ACCA Tehnici de luare a deciziilor

A6. Directorul adjunct pentru cercetare al unei mari companii a vrut să investigheze atitudinea față de o presupusă preluare managerială a companiei. Pentru aceasta, a pus întrebarea dacă sunt sau nu de acord cu o eventuală preluare din compania, unui eșantion aleator de salariați, intenția sa fiind aceea de a stabili dacă atitudinea salariaților față de preluare are vreo legătură cu categoria de muncă prestată (manuală sau nemanuală). Au fost intervievați în total un număr de 120 de salariați, dintre care 70 erau lucrători manuali și 50 lucrători nemanuali. Dintre lucrătorii manuali 30 s-au pronunțat în favoarea preluării, în timp ce dintre lucrătorii nemanuali, numai 25 au fost de acord cu aceasta.

Se cere:

a) Să se conceapă un tabel pe două linii și două coloane în care să fie reprezentate aceste informații și să se realizeze un test χ^2 de asociere pentru a se vedea dacă clasificarea profesională afectează atitudinea față de presupusa preluare a companiei de către manageri.

b) Directorul adjunct pentru cercetare mai este interesat de asemenea dacă atitudinea salariaților față de preluarea companiei are vreo legătură cu sexul lor. Ca urmare, pentru fiecare sex a fost realizată o analiză pe calculator, rezultatele fiind prezentate mai jos.

Frecvențele preconizate sunt notate sub frecvențele observate.

Bărbați			
	Manual	Non-manual	Total
Pentru	26 31,2	22 16,8	48
Împotrivă	39 33,8	13 18,2	52
Total	65	35	100
Testul statistic = 3,89			
Grade de libertate = 1			

Femei			
	Manual	Non-manual	Total
Pentru	4 1,75	3 5,25	7
Împotrivă	1 3,25	12 9,75	13
Total	5	15	20
Testul statistic = 3,59			
Grade de libertate = 1			

Criticați utilizarea testului χ^2 pentru unul dintre sexe și interpretați rezultatele pentru celălalt.

c) Scrieți un scurt raport în legătură cu relația dintre sex, genul de muncă prestată și atitudinea salariaților față de presupusa preluare a companiei.

ACCA Tehnici de luare a deciziilor

A7. Managerii unei companii pregătesc planurile de venituri pentru ultimul trimestru al anului 1993/94 și pentru primele trei trimestre ale anului 1994/5. Datele prezentate în continuare se referă la unul dintre principalele produse.

Venitul	Aprilie-iunie Trimestrul 1 mii lire	Iulie-septembrie Trimestrul 2 mii lire	Octombrie-decembrie Trimestrul 3 mii lire	Ianuarie-martie Trimestrul 4 mii lire
1990/91	49	37	58	67
1991/92	50	38	59	68
1992/93	51	40	60	70
1993/94	50	42	61	-

Se cere:

a) Să se calculeze tendința pentru media mobilă pe patru trimestre, pentru acest set de date.

b) Să se calculeze factorii sezonieri utilizând, la alegere, unul dintre modelele aditiv sau multiplicativ.

c) Să se explice, fără să se calculeze, cum ați utiliza rezultatele de la întrebările a și b pentru a previziona veniturile din ultimul trimestru al anului 1993/94 și pentru primele trei trimestre ale anului 1994/95.

CIMA Contabilitatea costurilor și metodele cantitative

A8. O companie are un garaj auto și încearcă să realizeze o predicție a costurilor anuale de întreținere pentru fiecare vehicul. Analizând un eșantion de vehicule, au fost obținute următoarele date:

Numărul vehiculelor	Vechimea în ani (x)	Costurile de întreținere pe an £ x 10 (y)
1	2	60
2	8	132
3	6	100
4	8	120
5	10	150
6	4	84
7	4	90
8	2	68
9	6	104
10	10	140

Se cere:

a) Utilizând tehnica pătratelor minime, să se calculeze valorile lui a și b din ecuația $y = a + bx$, astfel încât managerii să poată previziona costurile probabile de întreținere, știindu-se vechimea fiecărui vehicul.

b) Să se realizeze un tabel cu costurile de întreținere pentru vehiculele cu vechimi de la 1 la 10 ani, pe baza calculelor de la punctul a.

c) Să se estimeze costurile de întreținere pentru un vehicul cu vechimea de 12 ani și să se realizeze un comentariu pe marginea validității unei asemenea estimări.

CIMA Contabilitatea costurilor și metodele cantitative

A9. La sfârșitul anului 1993, directorul financiar al unei firme producătoare de computere, Upstem, este îngrijorat în legătură cu numărul clienților care au depășit termenele de plată și formează un eșantion de 10 dintre numeroșii clienți ai firmei. Pentru fiecare dintre acești clienți calculează numărul zilelelor cu care a fost depășit termenul de plată în 1993. În următorul tabel este prezentat numărul total de zile cu care s-au depășit în 1993 termenele de plată:

Clientul	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*
Nr. de zile întârziere în 1993	36	81	67	11	20	48	14	21	21	31

Se cere:

a) Să se utilizeze aceste date pentru a se calcula numărul mediu de zile de întârziere pentru toți clienții firmei pe anul 1993, precum și eroarea standard a rezultatului obținut.

b) Dacă directorul financiar estimează că Upstem înregistrează pierderi de 10£ pentru fiecare zi de întârziere a unui client, să se calculeze, la un interval de certitudine de 95%, următoarele:

1) Pierderea medie pe fiecare client înregistrată de Upstem în 1993 ca urmare a întârzierilor de plată.

2) Totalul pierderilor înregistrate de companie ca urmare a întârzierilor de plată, în anul 1993, pentru un total de 750 de clienți.

Enunțați orice presupunere luată în considerare pentru aceste intervale.

c) Directorul financiar a notat de asemenea numărul de zile de întârziere, pentru aceeași clienți, în 1992. Aceste valori sunt date în următorul tabel:

Clientul	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*
Nr. de zile întârziere în 1993	29	73	53	14	2	42	20	20	18	29

1) Aplicând metoda pătratelor minime, stabiliți ecuația de regresie a zilelor de întârziere, pornind de la numărul de zile de întârziere pe anul 1992.

2) Dacă numărul mediu de zile de întârziere pentru toți clienții în anul 1992 a fost de 32, aplicați ecuația regresiei pentru a calcula pierderea medie per client, înregistrată de Upstem din cauza întârzierilor de plată pe anul 1993.

3) Explicați de ce valoarea calculată la punctul 2 al întrebării c este preferabilă valorii obținute la punctul a?

ACCA Tehnicile de luare a deciziilor

A10. Un consultant imobiliar apreciază faptul că numărul de case vândute într-o regiune, într-un anumit an are legătură cu rata ipotecărilor din perioada respectivă. El stochează următoarele date relevante:

Anul	Dobânda ipotecară X	Indicele de vânzare a caselor Y
1982	12	80
1983	10	90
1984	8	105
1985	6	115
1986	7	125
1987	8	120
1988	10	115
1989	12	100
1990	14	85
1991	13	70
1992	11	80

Se cere:

a) Coeficientul de corelare dintre X și Y este –0,81. Folosind formula următoare pentru testarea statistică, pentru a testa semnificația acestui coeficient, interpretați rezultatul.

$$T = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \sim t_{n-2}.$$

b) După stocarea datelor respective, consultantul observă că numărul de case vândute într-un an poate să fie corelat cu nivelul dobânzii ipotecare din anul precedent.

Pentru a se analiza această ipoteză:

1) plotați valorile pe o diagramă de dispersie;

2) calculați un coeficient de corelare relevant,

după care comentați cât de potrivit este acest model.

c) Determinați ecuația de regresie pentru a previziona indicele de vânzare a caselor pe baza ratei ipotecărilor din anul precedent. Pornind de aici, faceți o previziune a indicelui de vânzare a caselor în 1993.

d) Faceți un comentariu al gradului de acuratețe al previziunii dumneavoastră.

ACCA Tehnicile de luare a deciziilor

A11. „Curba de învățare constituie un model matematic simplu, dar aplicațiile sale în problemele managementului contabil necesită o analiză atentă."

Având în vedere această afirmație *se cere*:

a) Să se explice modelul „timpului mediu cumulativ" utilizat curent pentru reprezentarea efectelor curbelor de învățare.

b) Să se schițeze două diagrame pentru a ilustra, în cazul unui nou produs, impacturile relative ale curbelor de învățare de 70%, 80% și 90% asupra:

- numărului mediu de ore cumulative per unitate de produs;

• numărul cumulativ de ore necesare.

c) Explicați utilitatea teoriei curbelor de învățare în elaborarea bugetelor, controlul bugetar și evaluarea proiectelor; explicați dificultățile pe care le poate întâmpina, în fiecare situație, contabilul managerial.

d) Comparați și stabiliți contrastele dintre curba de învățare și curba experienței; explicați condițiile în care una sau alta poate fi mai relevantă.

CIMA Aplicațiile contabilității manageriale

Întrebări fără răspunsuri

B1. În aprilie 1995, o companie de vânzări en detail a efectuat un studiu asupra valorilor tranzacțiilor cu clienții, fiind culese următoarele date:

Valoarea tranzacției	Nr. de clienți
Sub 1,00£	137
1,00£ la 1,99£	259
2,00£ la 2,99£	297
3,00£ la 3,99£	378
4,00£ la 4,99£	193
5,00£ la 5,99£	84
6,00£ și peste,	52

Se cere:

a) Pentru aceste date să se calculeze :

1) valoarea medie per tranzacție (se vor specifica ipotezele de lucru);

2) deviația standard.

b) Un studiu similar a fost efectuat și în octombrie 1994. Datele obținute au dat o valoare medie per tranzacție de 2,79£ și o deviație standard de £1,43.

Faceți un comentariu asupra schimbărilor nivelurilor de cheltuieli ale clienților între cele două luni.

c) Subliniați avantajele și dezavantajele formării eșantioanelor prin metoda aleatorie simplă.

ACCA Managementul informației

B2. Managerii departamentului de vânzări au înregistrat numărul tranzacțiilor încheiate de agenții serviciului său telefonic de vânzări, în decursul unei săptămâni, datele neprelucrate fiind următoarele:

20	10	17	22	35	43	29	34	12	24
24	32	34	13	40	22	34	21	39	12
10	49	32	33	29	26	33	34	34	22
24	17	18	34	37	32	17	36	32	43
12	27	43	32	35	26	38	32	20	21

BCU CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Agenții care realizează mai puțin de 20 de vânzări săptămânal urmează să efectueze un nou curs de pregătire.

Se cere:

a) Să se clasifice datele neprelucrate în intervale de clasă de câte cinci unități, ca de exemplu 10 – 14, 15 – 19 etc.

b) Să se realizeze o diagramă frecvențială cumulativă pentru reprezentarea datelor clasificate la punctul a. Se vor insera liniile mediane și limitele inferioară și superioară.

c) Calculați media aritmetică pentru datele clasificate de la punctul a. Comentați pe scurt de ce media este diferită de mediana de la punctul b.

d) Ce procent din agenții de vânzări vor necesita continuarea pregătirii?

CIMA Contabilitatea costurilor și metodele cantitative

B3. În mai 1993, managerii de vânzări de la Brighton Electronics au câștigat licitația pentru un contract de 5000 de bucăți de transmițătoare cu rază scurtă de acțiune. În contract era stipulat un control de calitate de 100% înaintea livrării comenzii, pentru a exista certitudinea că toate aparatele funcționează în standardele convenite. Una dintre cele mai sensibile componente ale transmițătorului era un subansamblu de impedanță, alcătuit din opt bobine de reglaj.

Managerul pentru vânzări a stabilit cu managerul pentru achiziții să obțină două loturi verificate de bobine de reglaj de la doi furnizori, York Ltd și Zeus Ltd, de la care Brighton Electronics își achiziționa de mai mulți ani componentele. O analiză atentă a bobinelor a scos la iveală faptul că, pentru York, 6% din bobine erau defecte, în timp ce pentru Zeus procentul era de 2%. Prețurile pe bucată sunt de 45 de pence și respectiv 50 de pence.

Inginerul de la proiectare, după o analiză foarte atentă a cerințelor din proiect, a ajuns la concluzia că, în cazul în care fiecare subansamblu de impedanță nu are mai mult de o bobină defectă, circuitul funcționează în limite acceptabile. Dacă două dintre bobine sunt defecte, problema poate fi rezolvată prin introducerea în schemă a unui adaptor suplimentar, la prețul de 2,25£ bucata. Dacă trei sau mai multe bobine sunt defecte, atunci subansamblul se rebutează, la un cost de 8,50£ bucata.

Se cere:

a) Explicați de ce putem utiliza distribuția binomială în această problemă?

b) Dacă bobinele ar fi achiziționate numai de la York Ltd, câte dintre cele 5000 de subansambluri v-ați aștepta să nu conțină bobine defecte, câte subansambluri v-ați aștepta să conțină o bobină defectă și câte două bobine defecte? Care ar fi situația dacă întregul lot de subansambluri ar fi achiziționat numai de la Zeus Ltd?

c) Câte subansambluri credeți că ar fi rebutate dacă toate ar fi achiziționate de la York Ltd? Dar dacă ar fi achiziționate de la Zeus Ltd?

d) Care este numărul total preconizat de bobine de reglaj, necesare pentru ca toate cele 5000 de subansambluri să funcționeze acceptabil, pentru fiecare dintre cele două situații.

e) Care sunt costurile totale preconizate dacă toate bobinele ar fi achiziționate de la York? Dar pentru cazul în care ar fi achiziționate de la Zeus? De la care dintre cei doi producători ar trebui achiziționate toate bobinele necesare?

ACCA Tehnici de luare a deciziilor

B4. Un supermagazin a realizat de curând o serie de studii asupra cumpărătorilor din zilele de sâmbătă. Pe o perioadă de mai multe săptămâni, unui eșantion mare și reprezentativ de cumpărători le-au fost puse la intrare întrebări în legătură cu intențiile de cumpărături, iar la ieșire le-au fost puse alte întrebări cu privire la cumpărăturile efectuate, stimulul pentru obținerea cooperării fiind reprezentat de o sacoșă de pânză. Unele dintre rezultatele de la raionul de echipament sportiv, pentru un eșantion de 1000 de persoane sunt:

Nr. de articole	0	1	2	3	4	5+	Întregul eșantion
Și-au afirmat intenția de a cumpăra acest nr. de articole %	19	51	22	5	2	1	100
Cumpărăturile reale %	48	25	11	10	4	2	100

Din datele culese, s-a calculat că valoarea medie a cumpărăturilor de la raionul de sport în cursul zilei de sâmbătă este de 20£, cu o deviație standard de 10£. Numărul mediu de cumpărători din zilele de sâmbătă a fost de 2000, cu o deviația standard neglijabilă.

Vi se cere:

a) Folosindu-vă de medii și de procentaje, să comentați diferențele dintre intențiile mărturisite la intrarea în magazin și cumpărăturile realizate efectiv la raionul de echipament sportiv.

b) Să găsiți, în limite de certitudine de 95%, procentajul de clienți care intră în raionul de echipament sportiv fără să cumpere ceva.

c) Să se găsească, în limite de certitudine de 95%, totalul cumpărăturilor din zilele de sâmbătă, precizând ipotezele de la care porniți.

CIMA Metode cantitative

B5. Vânzările anuale ale mărcii Y, în cursul ultimilor 11 ani au fost următoarele:

Numărul de unități din marca Y, 1983-1993 (mii)

1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
50	59	46	54	65	51	60	70	56	66	76

Vi se cere:

a) Să calculați tendința mediei mobile pe trei ani.

b) Să notați seriile și tendința pe același grafic.

c) Să realizați previziunea vânzărilor pe 1994, precizând ipotezele de lucru.

CIMA Metode cantitative

B6. O companie care se ocupă cu publicarea de cărți dorește să dezvolte un model de previziune pentru vânzarea cărților pe care intenționează să le publice. Departamentul de marketing a cules date asupra unor variabile, folosind un eșantion de 10 cărți. Datele sunt prezentate mai jos:

Nr. de copii vândute, în mii Y	Pagini X_1	Bugetul pentru publicitate (£000) X_2	Nr. de cărți concurente X_3	Costul (£) X_4
16	126	27	5	15
10	204	30	7	19
33	411	33	7	14
15	176	25	3	15
77	600	41	9	17
59	333	19	1	13
75	483	40	8	11
57	400	26	3	12
88	504	51	12	9
26	302	58	15	14

S-a folosit un pachet statistic pentru realizarea unui model de regresie multiplă a lui Y pe baza a patru variabile independente X_1, X_2, X_3 și X_4.

Matricea corelațiilor:

	Y	X_1	X_2	X_3
X_1	0,89			
X_2	0,31	0,44		
X_3	*	0,35	0,98	
X_4	-0,64	-0,41	-0,27	-0,13

Ecuația de regresie este:

$Y = 29,9 + 0,148X_1 + 0,79X_2 - 3,11X_3 - 2,87X_4$

$R^2 = 90,5\%$.

Se cere:

a) Să se calculeze coeficientul de corelare a momentului produsului între Y și X_3, împreună cu interpretarea semnificației.

b) Utilizând relația următoare pentru testul statistic:

$$T = \frac{r\sqrt{(n-2)}}{\sqrt{1-r^2}}$$ (care are t_{n-2} distribuții pentru H_0)

să se stabilească dacă există o corelație strânsă între numărul de exemplare vândute, Y, și fiecare dintre cele patru variabile dependente, separat.

c) Să se interpreteze valoarea lui R^2 în contextul datelor problemei.

d) Utilizând ecuația regresiei să se preconizeze numărul de exemplare care se

va vinde dintr-o carte de 350 de pagini, cu un buget de publicitate de 35 000£, care are 6 cărți concurente, la prețul de 16£.

e) Criticați utilizarea acestui model pentru previziunea lui *Y*. Explicați în ce mod ar putea fi îmbunătățit modelul

ACCA Tehnici de luare a deciziilor

B7. a) Faceți distincția între:

1) variabilitatea datorată unor cauze comune și

2) variabilitatea datorită unor cauze speciale în cadrul monitorizării proceselor de producție.

Winchester Electronics produce două tipuri de tuburi de raze catodice și anume tipul *A* și tipul *B*, în cadrul unei producții de masă.

b) Într-un interval de 12 zile au fost culese următoarele date, pe baza unor eșantioane zilnice formate din 6 tuburi.Măsurătorile au scos în evidență rezistența mai bună în timp a tuburilor de tipul *A*.

Ziua	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\overline{X}$	162	163	155	160	165	160	160	157	155	158	164	161
R	12	14	19	16	11	15	12	17	18	14	19	13

Să se calculeze media mediilor eșantioanelor și media șirului pentru tuburile de tipul A și de aici să se stabilească limitele superioară și inferioară de control „3σ" pentru

1) mediile eșantioanelor.

2) rangurile eșantioanelor.

Pornindu-se de aici, să se discute dacă procesul de producție pentru tuburile catodice de tipul A se desfășoară satisfăcător sau nu.

c) În tabelul următor sunt cuprinse date culese pe parcursul a 15 zile și reprezintă numărul de tuburi catodice de tipul B rebutate dintr-un număr de 120 verificate zilnic.

Nr. de rebuturi:	9	10	12	7	11	6	9	8	11	10	13	9	7	0	4

1) Să se stabilească limitele de control superioară și inferioară "3s" pentru procentul de tuburi B defecte și să se analizeze dacă procesul de producție al tuburilor B se desfășoară normal.

2) Să se explice de ce ar fi indicat să se oprească procesul de producție în cazul în care rezultatele controalelor cad sub limita inferioară de control de pe graficul rebuturilor.

ACCA Tehnicile de luare a deciziilor

B8. Vânzările de înghețată Yelesol în ultimele 12 trimestre au fost următoarele:

		Vânzări (mii de unități)	Totalul anual mobil (mii de unități)
1991	Q_4	14	–
1992	Q_1	16	–
	Q_2	30	100
	Q_3	40	104
	Q_4	18	104
1993	Q_1	16	108
	Q_2	34	112
	Q_3	44	108
	Q_4	14	108
1994	Q_1	16	112
	Q_2	38	120
	Q_3	52	–
	Q_4		–

Vi se cere:

a) să se calculeze media mobilă centrată;

b) să se noteze pe un grafic datele și media mobilă centrată;

c) să se calculeze variațiile medii sezoniere;

d) să se calculeze previziunile pentru vânzări pentru următoarele două trimestre.

CIMA Metode cantitative

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

PARTEA 3

10. CALCULUL DIFERENȚIAL

1. Obiective

După parcurgerea acestui capitol:

- veți ști de ce se folosește calculul diferențial;
- veți înțelege care sunt principiile și aplicațiile calculului diferențial;
- veți putea calcula derivatele unor expresii uzuale;
- veți putea folosi calculul diferențial pentru rezolvarea unor probleme tipice;
- veți ști cum să aplicați calculul diferențial pentru găsirea punctelor de maxim și minim ale diferitelor funcții;
- veți înțelege principiile generale ale calculului diferențial parțial;
- veți cunoaște elementele de bază ale analizei matematice;
- veți putea face distincția între integralele definite și nedefinite.

2. De ce se folosește analiza matematică?

De multe ori este posibil să se reprezinte diferite relații cu ajutorul unor funcții liniare simple.

De exemplu, o funcție liniară simplă pentru costurile totale poate avea forma

$$y = a + bx,$$

unde: y este costul total, variabila dependentă;

x – producția sau activitatea, variabila independentă, iar a și b constante reprezentând costul fix și respectiv costul variabil (sau marginal).

O asemenea funcție este reprezentată în fig. 10.1.

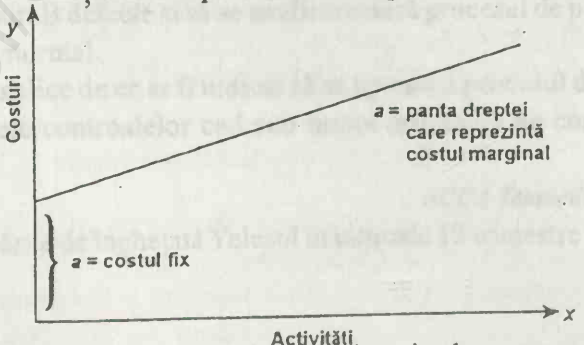


Fig. 10.1. Graficul unei funcții liniare simple pentru costuri.

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pentru această funcție, rata variației costurilor (reprezentată de b, gradientul dreptei) este constantă la toate nivelurile de activitate, nu va crește și nu va scădea la nici un nivel de activitate. Desigur, aceasta este și semnificația funcției liniare. Valoarea lui b poate fi găsită prin calcule aritmetice simple, fără a se recurge la tehnici mai sofisticate.

Există însă și foarte multe situații în care funcția liniară nu mai constituie o reprezentare exactă a realității, fiind necesară pentru acest motiv aplicarea unei funcții curbilinii.

În fig. 10.2 sunt date asemenea exemple.

Fig. 10.2. Exemple de funcții curbilinii.

Examinând aceste funcții curbilinii se constată că panta sau gradientul se schimbă la diferite niveluri ale activității și că la anumite valori minime sau maxime – sau la ambele – există un punct de revenire. Pentru multe aplicații în domeniul afacerilor este important să se cunoască *rata de variație* a funcției (reprezentând, să spunem, costul marginal sau venitul marginal) ca și punctul de gradient zero, *punctul de revenire* (reprezentând, să spunem, venitul maxim sau costul minim). Calculul diferențial oferă mijloacele adecvate de calcul al ratelor de schimb ale funcțiilor curbilinii și al punctelor de revenire, putând prin urmare să fie utilizat ca mijloc de optimizare a analizelor.

În plus față de aceasta, uneori este necesar să se poată calcula nivelul total al veniturilor sau costurilor între două niveluri de activitate pe o funcție curbilinie. Aceasta se poate realiza cu ajutorul calculului integral, care oferă mijloacele de însumare pentru asemenea funcții.

3. Calculul diferențial

Cu ajutorul calculului diferențial se poate stabili panta unei funcții într-un anumit punct. Cu alte cuvinte, calculul diferențial poate să fie utilizat pentru stabilirea ratei de variație a variabilei dependente (să spunem, costul) corespunzătoare unei variații infinit de mici a valorii variabilei independente (să spunem, activitatea).

De exemplu, să analizăm următoarele două funcții:

Funcția I $y = x$

Funcția II $y = x^2$

Funcția I este o funcție liniară, în timp ce, datorită faptului că x este ridicat la puterea a doua, funcția II este o funcție curbilinie.

Să presupunem acum că variabila independentă, x, variază cu o mărime infinit de mică, notată m. Care este rata de variație a lui y determinată de această modificare a valorii lui x?

Funcția I

Dacă x are la un moment dat valoarea A, atunci și y are tot valoarea A. Dacă x variază cu o mărime m, valoarea sa devine $x = A + m$ și, prin urmare, valoarea variabilei dependente va deveni și ea

$$y = A + m.$$

Prin urmare, rezultă că

$$\text{Rata de variație a lui } y \text{ în funcție de } x = \frac{\text{variația valorii lui } y}{\text{variația valorii lui } x} = \frac{m}{m} = 1.$$

Semnificația evidentă a acestei relații este aceea că rata de variație (panta) este constantă și egală cu 1, astfel încât y variază cu exact aceeași mărime ca și x, indiferent de nivelul de activitate sau de mărimea variației.

Funcția II

Care este consecința variației valorii lui x de la $x = A$, la $x = A + m$, pentru funcția $y = x^2$?

$$\text{Când } x = A, y = A^2.$$

$$\text{Când } x = A + m, \; y = (A + m)^2 = A^2 + 2mA + m^2.$$

Așadar, variația valorii lui y determinată de o creștere cu m a valorii lui x va fi:

$$(A^2 + 2mA + m^2) - A^2$$

care se reduce în final la $2mA + m^2$.

La fel cum am arătat și mai înainte pentru funcția I, va rezulta că

$$\text{Rata de variație a lui } y \text{ în funcție de } x = \frac{\text{variația valorii lui } y}{\text{variația valorii lui } x} = \frac{2mA}{m} + \frac{m^2}{m} = 2A + m.$$

Dacă valoarea lui m tinde la zero, rata de variație devine $2A$.

Aceasta înseamnă că pentru orice valori, în cazul funcției $y = x^2$, rata de variație a lui y în funcție de x este $2x$, reprezentând *derivata* sau *coeficientul diferențial*.

Așadar, derivata funcției $y = x^2$ este $2x$. În tabelele care urmează sunt date câteva exemple de valori numerice pentru această funcție.

Valoarea lui x (variabila independentă)	Valoarea lui y (variabila independentă) $y = x^2$	Rata de variație a lui y, respectiv a valorii derivate $2x$
1	1	1
2	4	4
3	9	6
4	16	8
5	25	10
6	36	12
7	49	14

Note:

a) Variația infimă a valorii lui x, pe care am notat-o anterior cu m, este notată convențional Δx (se citește **delta** x). Când Δx tinde la zero, notat $\Delta x \to 0$, comparația variațiilor celor două valori devine:

$$\text{Limita} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

relație care în general se scrie $\frac{dy}{dx}$, cu semnificația „derivata funcției când Δx tinde la zero".

Așadar, funcția $y = x^2$ are derivata $\frac{dy}{dx} = 2x$.

b) Derivata unei funcții dă rata *exactă* a variației într-un punct și dă rezultate aproximative atunci când este folosită pentru un șir finit. Un exemplu ar fi utilizarea calculului diferențial pentru aflarea costului marginal dintr-o funcție curbilinie de cost. Contabilii definesc adeseori costul marginal ca fiind creșterea costului total ca urmare a creșterii cu o unitate a variabilei independente. O unitate întreagă, din punctul de vedere al calculului diferențial, reprezintă un șir finit și, prin urmare, costul marginal obținut prin derivare nu poate fi decât aproximativ. Dar acesta este un punct de vedere tehnic, considerat a nu fi de mare importanță practică.

4. Reguli pentru forma derivatelor

La fel cum am subliniat mai înainte, derivata oricărei funcții poate fi găsită prin aplicarea primelor principii. Acesta ar fi un proces lung și laborios însă, din momentul în care sunt înțelese ideile generale ale , este mult mai simplu să fie urmate câteva reguli simple, pe care le prezentăm în următoarele paragrafe.

5. Derivatele – regula de bază

Pentru funcția $y = x_n$ derivata va fi $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$.

Exemple

Funcția	Derivata
$y = x^2$	$\frac{dy}{dx} = 2x$
$y = x^{10}$	$\frac{dy}{dx} = 10x^9$
$y = -x^2$	$\frac{dy}{dx} = -2x$
$y = \sqrt{x}$ (adică $x^{1/2}$)	$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}x^{-1/2}$ sau $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Note. Toate celelalte reguli sunt extensii ale regulii de bază, care trebuie înțeleasă foarte bine de la bun început. Nu trebuie decât să faceți produsul dintre x și indicele său original și veți observa că noul indice al lui x este mai mic cu o unitate față de valoarea originală.

6. Derivatele – pentru cazurile în care funcția are un coeficient

Pentru funcția $y = kx^n$ (unde k este un coeficient), derivata va avea următoarea formă:

$$\frac{dy}{dx} = nkx^{n-1}.$$

Exemple

Funcția	Derivata
$y = 3x^2$	$\frac{dy}{dx} = 6x$
$y = 8x^4$	$\frac{dy}{dx} = 32x^3$
$y = -7x^5$	$\frac{dy}{dx} = -35x^4$
$y = \frac{1}{2}x^9$	$\frac{dy}{dx} = 4{,}5x^8$
$y = 3x$	$\frac{dy}{dx} = 3$

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

7. Derivatele – pentru cazul în care funcția conține o constantă

Pentru funcția $y = x^n + c$ (unde c este o constantă),

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}.$$

Exemple

Funcția	Derivata
$y = x^3 + 8$	$\frac{dy}{dx} = 3x^2$
$y = 64x^4 + 27$	$\frac{dy}{dx} = 24x^3$
$y = \frac{1}{3}x^3 - 15$	$\frac{dy}{dx} = x^2$

Note. Prin derivare, constanta dispare. Acest lucru se întâmplă deoarece derivatele măsoară rata de variație și constanta (cum ar fi de exemplu costul fix) prin definiție rămâne neschimbată.

8. Derivatele – pentru cazul în care funcția conține o sumă

Pentru funcția $y = x^n + x^m$, derivata va fi

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1} + mx^{m-1}.$$

Exemple

Funcția	Derivata
$y = x^2 + 6x^4$	$\frac{dy}{dx} = 2x + 24x^3$
$y = \frac{1}{2}x^2 + 12x^5$	$\frac{dy}{dx} = 24x^3$
$y = 3x^4 + 10x^2 + 9x^3$	$\frac{dy}{dx} = 12x^3 + 20x + 27x^2$

9. Derivatele – pentru cazul în care funcția este un produs

Să presupunem ca m și n reprezintă două funcții de x și $y = mn$. Atunci derivata va fi

$$\frac{d}{dx}(mn) = m\frac{dn}{dx} + n\frac{dm}{dx}.$$

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pentru a da un exemplu, să considerăm funcția

$y = (8x + 4)(2x^3 + 6)$, în care

$(8x + 4)$ reprezintă m și

$(2x^3 + 6)$ reprezintă n

$$\therefore \frac{dm}{dx} = 8$$

$$\frac{dn}{dx} = 6x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (8x+4)6x^2 + (2x^3+6)8$$

$$= 48x^3 + 24x^2 + 16x^3 + 48$$

$$= 64x^3 + 24x^2 + 48.$$

Exemple

Funcția	Derivata
$y = (10x^2 + 5)(3x^3 + 2)$	$\frac{dy}{dx} = (10x^2 + 5) \cdot 9x^2 + (3x^3 + 2) \cdot 20x$
$y = (x^2 + 4)(6x^{1/2} + 3)$	$\frac{dy}{dx} = (x^2 + 4) \cdot 3x^{-1/2} + (6x^{1/2} + 3) \cdot 2x$

10. Derivatele – pentru cazul în care funcția este o fracție

Dacă presupunem că m este o funcție de x reprezentând numărătorul și n este o altă funcție, reprezentând numitorul, vom avea funcția:

$$y = \frac{m}{n} \text{ și } \frac{dy}{dx} = \frac{n\frac{dm}{dx} - m\frac{dn}{dx}}{n^2}, \; n \neq 0 \cdot$$

Ca exemplu, să luăm funcția

$$y = \frac{4x^3 + 2}{x^6}, \text{ la care } \frac{dm}{dx} = 12x^2$$

$$\text{și } \frac{dn}{dx} = 6x^5.$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x^6 \cdot 12x^2 - (4x^3 + 2) \cdot 6x^6}{(x^6)^2}$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$= \frac{12x^8 - 24x^8 - 12x^5}{x^{12}}$$

$$= -\left(\frac{12x^5 + 12x^8}{x^{12}}\right)$$

$$= -\left(\frac{12 + 12x^3}{x^7}\right).$$

Exemple

Funcția	Derivata
$y = \frac{3-2x}{3+2x}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{-12}{(3+2x)^2}$
$y = \frac{x}{1-4x^2}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1+4x^2}{(1-4x^2)^2}$

11. Derivatele – pentru cazul în care avem o funcție de funcție

Când $y = (2x + 6)^3$, iar expresia dintre paranteze este tot o funcție, să spunem m, respectiv $m = 2x + 6$, întreaga expresie poate fi scrisă sub forma $y = m^3$.

În acest caz, regula de derivare este următoarea: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dm} \times \frac{dm}{dx}$, cunoscută sub denumirea de *regula lanțului.*

Să considerăm că avem funcția $y = (2x + 6)^3$, cu $m = 2x + 6$, așadar $y = m^3$

și $\frac{dy}{dm} = 3m^2$ și $\frac{dm}{dx} = 2.$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3(2x+6)^2 \times 2$$

$$= 6(2x+6)^2.$$

Exemple

Funcția	Derivata
$y = (1-6x)^6$	$\frac{dy}{dx} = -36(1-6x)^5$
$y = (8+4x-x^2)^{1/2}$	$\frac{dy}{dx} = (2-x)(8+4x-^2)^{-1/2}$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Notă. Derivata $\frac{dy}{dx}$ este inversul derivatei $\frac{dx}{dy}$, respectiv

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}.$$

12. Exemplu practic de derivare

Acum, după ce am explicat conceptul de derivare și regulile pentru calcularea derivatelor diferitelor funcții uzuale, să luăm un exemplu practic.

Exemplu

O firmă și-a analizat condițiile de operare, prețurile și costurile și a ajuns la următoarele funcții:

Veniturile £(V) = $400Q - 4Q^2$ și costurile £(C) = $Q^2 + 10Q + 30$,

unde Q reprezintă numărul de unități de produs vândute.

Firma vrea să-și maximizeze profitul și are nevoie de următoarele date:

a) Ce cantitate trebuie vândută?

b) La ce preț?

c) Care va fi nivelul profitului?

Note: În exemplele anterioare am folosit notația y și x, pentru care am avut derivata $\frac{dy}{dx}$.

În acest exemplu folosim notația R, C și Q, rezultând derivatele $\frac{dR}{dQ}$ *și* $\frac{dC}{dQ}$.

Soluția

Ne vom aminti din teoria economică de bază că profitul este maximal atunci când costul marginal = câștigul marginal și, așa cum am explicat în cadrul acestui capitol, derivata unei funcții ne dă valoarea ratei de variație a funcției respective, care este echivalentă costului marginal sau câștigului.

$$R£ = 400Q - 4Q^2 \text{ și } \frac{dR}{dQ} = 400 - 8Q = \text{venitul marginal}$$

$$\text{și } C£ = Q^2 + 10Q + 30 \text{ și } \frac{dC}{dQ} = 2Q + 10 = \text{costul marginal.}$$

Vârful maximizării profitului este atins atunci când

$$MR = MC \text{ sau } \frac{dR}{dQ} = \frac{dC}{dQ},$$

$$\text{respectiv } 400 - 8Q = 2Q + 10$$

$$Q = 39. \qquad \text{răspunsul (a)}$$

BCU IASI CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

$$\text{Venitul total} = 400(39) - 4(39^2)$$
$$= 9516£$$

și cum urmează să fie vândute 39, prețul va fi $\frac{9516}{39} = 244£$ fiecare. Răspunsul b

Profitul total = câștiguri – costuri

Câștiguri = 9516£ – și

costul = $(39)^2 + 10(39) + 30 = 1941$.

∴ Profitul = 7575£. Răspunsul c

13. Punctul de revenire

Unele funcții au puncte de revenire, respectiv puncte de minim sau de maxim, aceste puncte fiind de interes deosebit pentru multe aplicații în domeniul afacerilor, deoarece reprezintă puncte de costuri minime sau de profituri maxime.

În fig. 10.3 sunt reprezentate două asemenea puncte de revenire.

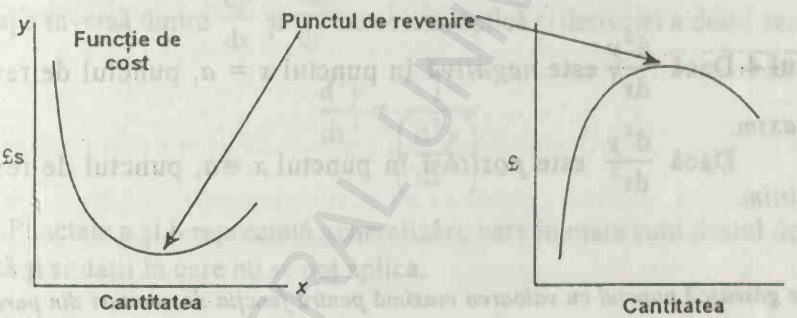


Fig. 10.3

Aceste puncte sunt puncte cu panta sau gradientul egal cu zero și pot fi asemuite vârfului unui deal. Se urcă până pe vârf și odată depășit acest punct, începe coborârea pe cealaltă pantă. În punctul situat exact în vârful dealului (sau exact în fundul gropii), nici nu se coboară și nici nu se urcă, deci gradientul este zero. Tangenta în acest punct va fi paralelă cu axa x, axa orizontală.

14. Utilizarea derivatelor pentru calculul punctelor de revenire

Derivata unei funcții indică panta sau rata de variație a funcției respective. Dacă valoarea derivatei este egală cu zero, vom avea exact punctul de revenire al funcției.

Pentru multe funcții, acest punct va reprezenta punctul de maxim sau de minim căutat. Totuși, există anumite funcții care au două (sau chiar și mai mult de două)

puncte de revenire, astfel încât este necesar să se stabilească dacă punctul de revenire respectiv este un punct de maxim sau de minim. Aceasta se poate face prin calcularea *derivatei a doua,* care are forma $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Derivata a doua se obține prin derivarea derivatei întâi $\frac{dy}{dx}$, aplicând regulile de derivare cunoscute. Dacă derivata a doua este *negativă*, punctul de revenire reprezintă un *maxim*, iar dacă derivata a doua este *pozitivă*, punctul de revenire reprezintă un *minim*.

În cele ce urmează vom prezenta un rezumat al acestei metode.

Cum se găsește valoarea maximă sau minimă a unei funcții

Pasul 1. Prima dată se calculează derivata funcției $\frac{dy}{dx}$.

Pasul 2. Se egalează $\frac{dy}{dx}$ cu zero și se calculează punctul de revenire care este, să spunem, $x = a$.

Pasul 3. Se calculează derivata a doua, respectiv $\frac{d^2y}{dx^2}$ prin derivarea primei derivate.

Pasul 4. Dacă $\frac{d^2y}{dx^2}$ este *negativă* în punctul $x = a$, punctul de revenire este un *maxim*.

Dacă $\frac{d^2y}{dx^2}$ este *pozitivă* în punctul $x = a$, punctul de revenire este un *minim*.

Exemplu

Să se găsească punctul cu valoarea maximă pentru funcția de venituri din paragraful 12, respectiv

$$V = 400Q - 4Q^2.$$

Pasul 1. $\frac{dV}{dQ} = 400 - 8Q.$

Pasul 2. În punctul de revenire $\frac{dV}{dQ} = 0$

$$\therefore 400 - 8Q = 0$$

$$\therefore Q = 50$$

Pasul 3. $\frac{dV}{dQ} = 400 - 8Q$

$\therefore \frac{d^2V}{dQ^2} = -8$ respectiv negativă pentru toate valorile lui Q.

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pasul 4. Deoarece $\frac{d^2V}{dQ^2}$ este negativă, punctul de revenire pentru $Q = 50$ este un maxim, iar venitul în punctul respectiv este

$$R = 400Q - 4Q^2$$
$$= 400(50) - 4(50^2)$$
$$= 10\,000£.$$

Note:

a) Atunci când punctul de revenire este un maxim, derivata a doua este negativă și acest fapt se poate interpreta sub forma că gradientul începe să scadă, ceea ce este de așteptat de fapt în „vârful dealului". Asemănător, pe fundul „gropii", gradientul începe să crească, ceea ce se observă și din faptul că derivata a doua are semnul pozitiv.

b) Există posibilitatea ca derivata a doua să aibă valoarea zero. În acest caz, avem de-a face cu ceea ce se numește punct de inflexiune, un punct în care curba este frântă, deci nu este vorba de fapt despre un punct de revenire.

c) Relația inversă dintre $\frac{dy}{dx}$ și $\frac{dx}{dy}$ nu se mai aplică și derivatei a doua, respectiv:

$$\frac{d^2y}{dx^2} \neq \frac{1}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}.$$

d) Punctele a și b reprezintă generalizări, care în mare sunt destul de precise, dar există și situații în care nu se pot aplica.

15. Derivatele cu mai mult de o singură variabilă independentă

Până în acest moment, pe parcursul acestui capitol funcțiile pe care le-am discutat aveau o singură variabilă independentă, ca în exemplul:

$$y = x^2 + 6x^4,$$

unde y este dependent de valoarea variabilei independente x. Regulile de derivare prezentate anterior oferă posibilitatea de a calcula ratele de variație (pantele curbelor) pentru orice valoare a lui x, singura variabilă independentă.

Dar există și situații în care funcțiile conțin două sau mai multe variabile independente cum ar fi, de exemplu, în cazul în care funcția de costuri a unei firme depinde atât de orele de muncă ale salariaților, cât și de orele de muncă ale utilajelor. Dacă se cere să se calculeze ratele de variație în aceste condiții, se va aplica un procedeu numit *derivare parțială*.

16. Derivarea parțială

Să presupunem că avem o funcție de costuri de forma:

$$y = 10x^2 + 5z^2 - 4xz + 12,$$

unde: y este costul total (variabilă dependentă);

x – orele de muncă (variabilă independentă);

z – orele de muncă ale utilajelor (variabilă independentă).

În cazul unei asemenea funcții, vom avea o suprafață multidimensională a costurilor, cu mai multe pante, după cum urmează:

a) o pantă pentru cazul în care x variază, dar z rămâne constant;

b) o pantă pentru cazul în care z variază, dar x rămâne constant;

c) o pantă pentru cazul în care atât x cât și z sunt variabile.

Fiecare dintre aceste pante are o derivată diferită. (a) și (b) sunt cunoscute ca *derivate parțiale*, iar (c) este cunoscută ca *derivată totală*.

În acest context, ne interesează derivatele parțiale, pentru care se utilizează următoarea notație:

Derivata parțială (a), respectiv când x este variabil și z este constant $= \frac{\delta y}{\delta x}$

(aceasta se numește „derivata parțială a lui y în funcție de x “)

Derivata parțială (b), respectiv când z este variabil și x este constant $= \frac{\delta y}{\delta z}$

(aceasta se numește „derivata parțială a lui y în funcție de z“)

Notă. Observați diferențele dintre simbolul utilizat pentru derivatele parțiale δ și simbolul utilizat anterior, respectiv d.

Derivata $\frac{dy}{dx}$ calculată la începutul acestui capitol este un exemplu de derivată totală.

17. Reguli pentru derivatele parțiale

Din fericire, regulile deja enunțate pentru derivatele obișnuite se aplică și în cazul derivatelor parțiale. Le vom exemplifica pe baza funcției de costuri dată anterior și anume:

$$y = 10x^2 + 5z^2 - 4xz + 12.$$

Problema constă în calcularea derivatelor parțiale $\frac{\delta y}{\delta x}$ și $\frac{\delta y}{\delta z}$.

Aceasta se poate face prin derivarea normală pentru una dintre variabilele independente, să spunem x în timp ce cealaltă variabilă independentă (în acest caz z) este considerată constantă, după cum urmează:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = 20x - 4z\,.$$

Notă. Așa cum am arătat la începutul capitolului, orice parte a expresiei funcție, care nu conține variabila care este derivată (în acest caz x), dispare. Astfel, $5z^2$ și 12 dispar. În cazul unui termen mixt ($-4zx$), acesta va fi considerat ca fiind $(-4z)x$, care va deveni prin derivare $-4z$.

În mod asemănător este derivată și cealaltă derivată parțială, obținând:

$$\frac{\delta y}{\delta z} = 5z - 4x\,.$$

18. Exemplu practic de derivare parțială

Firma DIY Ltd produse unelte pentru uz casnic. Fiecare trusă este alcătuită dintr-o cutie standard de material plastic, în care se găsesc un număr variabil de unelte, în funcție de scopul în care pot fi folosite, de cerințele pieței și de cerințele vânzătorilor. Firma a formulat o funcție de profit care arată că profiturile sale sunt dependente atât de numărul de truse vândute, cât și de numărul de unelte din fiecare trusă. Funcția profitului are următoarea formă:

$$P = 8T - 0{,}0001T^2 + 0{,}05TU - 77{,}5U^2 - 10\,000,$$

unde: P este profitul, în £;

T – numărul de truse;

U – numărul de unelte din fiecare trusă.

Câte truse, conținând câte unelte ar trebui vândute?

Soluția

$$\frac{\delta P}{\delta T} = 8 - 0{,}0002T + 0{,}05U = 0 \text{ la maximum,}$$

$$\frac{\delta P}{\delta U} = 0{,}05T = 155U \qquad = 0 \text{ la maximum.}$$

(*Notă.* Derivata a doua în fiecare caz are semnul negativ, respectiv - 0,0002 și -155, ceea ce indică faptul ca avem maxime.)

Așadar vom avea

$$0{,}05T = 155U$$

$$\therefore U = \frac{0{,}05T}{155} = 0{,}0003226\,T$$

și făcând înlocuirile:

$$8 - 0{,}0002T + 0{,}05(0{,}0003226T) = 0$$

$$\therefore 8 - 0{,}0001839T = 0$$

$$\therefore T = \frac{8}{0{,}0001839}$$

$$= 43\,509 \text{ truse de scule.}$$

Această valoare poate fi înlocuită în derivata parțială $\frac{\delta P}{\delta U}$ rezultând:

$$0{,}05T - 155U = 0$$

$$0{,}05(43509) - 155U = 0$$

$$\therefore T = \frac{0{,}05(43509)}{155}$$

$$\approx 14 \text{ scule.}$$

Prin urmare, profitul va fi maxim prin vânzarea unui număr de 43 509 truse, conținând fiecare câte 14 unelte. Profitul obținut va fi de 63 735£.

19. Integralele

Pentru scopurile pe care ni le-am propus, integrarea poate fi privită ca operația inversă derivării.

Prin derivare se stabilește panta funcției într-un punct, în timp ce integrarea poate fi definită ca metoda prin care se găsește suprafața de sub curba unei funcții, respectiv integrarea este un procedeu de însumare.

Calculul integral fiind opusul calculului diferențial, rezultă că:

Funcția originală	Derivata	Funcția originală	Integrala
x^4	$4x^3$	$4x^3$	x^4

Integrala poate fi scrisă astfel

$$\int 4x^3 dx = x^4,$$

semnificația fiind "funcția care prin derivare față de x dă $4x^3$ este x^4".

Această integrală nu are o formă completă deoarece, așa cum ne amintim de la paragraful 7, puteam avea $x^4 + 10$ sau $x^4 + 50$ sau $x^4 + c$, unde c este o constantă oarecare, toate aceste relații prin derivare dând $4x^3$. Așadar, este esențial ca această posibilitate să fie precizată și în scris, în forma:

$$\int 4x^3 dx = x^4 + c.$$

Integrala care conține și constanta nedeterminată se numește *integrală nedefinită*.

Valoarea constantei poate în anumite situații să fie zero, sau poate avea alte valori atunci când mai există și alte informații adiționale, numite *condiții inițiale*. În continuare vom da exemple pentru ambele cazuri.

20. Regula de bază pentru integrare

Deoarece integrarea este operația inversă față de derivare, rezultă că spre deosebire de derivare, în care se reducea valoarea indicelui lui x cu o unitate și vechiul indice al lui x era folosit drept coeficient, în cazul integrării indicele se mărește cu o unitate și spoi se împarte la valoarea noului indice.

De exemplu, pentru $y = kx^n$, vom avea:

$$\int y\,dx = \frac{kx^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1).$$

Exemple

Funcții	Integrale
$y = 10x^4$	$\int 10x^4 dx = \frac{10x^5}{5} + c = 2x^5 + c$
$y = 6x^3 + 2x + 3$	$\int (6x^3 + 2x + 3)dx = \frac{6}{4}x^4 + \frac{2}{2}x^2 + 3x + c$ $= 1{,}5x^4 + x^2 + 3x + c$

Note:

a) Se observă că la expresia matematică a fiecărei integrale se adaugă o constantă.

b) Deoarece derivarea este un proces mai direct, este util să se verifice formula integralei prin derivarea ei, pentru a vedea dacă se ajunge din nou la expresia originală. De exemplu, derivând relația $2x^5 + c$, obținem $10x^4$, exact ca în primul exemplu de mai înainte.

21. Valoarea constantei de integrare

Înainte de a se obține valori numerice dintr-o integrală, ceea ce constituie cerința tipică pentru aplicațiile în domeniul afacerilor, este adeseori necesar să se stabilească valoarea lui c, respectiv a constantei. Valoarea lui c depinde pe de-a întregul de conjunctura particulară în care este aplicată funcția. Vom da în continuare două exemple.

Exemplul 1

Să presupunem că o funcție de venit marginal are forma y = 3x + 10, unde x reprezintă vânzările în unități.

Integrala va fi: $\int(3x+10)dx = \frac{3}{2}x^2 + 10x = c$

respectiv funcția de venituri totale. În mod evident, când vânzările sunt zero, veniturile vor fi tot zero.

Astfel, când x = 0

$$R = \frac{3}{2}x^2 + 10x + c = 0.$$

∴ c trebuie să fie egal cu zero, aceasta fiind singura situație care convine în această ecuație.

Exemplul 2

Să presupunem că o funcție de profit marginal are forma:

y = 100 - 2x, unde y este profitul în £, iar x reprezintă unitățile vândute.

De asemenea, se știe că compania își asigură echivalența între costuri și venituri la vânzarea a 5 unități (aceasta este informația adițională numită și condiție inițială). Care sunt costurile fixe ale companiei?

Soluție

Primul pas constă în găsirea funcției profitului total, prin integrarea funcției marginale, astfel:

$$\int(100-2x)dx = 100x - x^2 + c.$$

În plus, știm că echivalența între costuri și venituri (respectiv profitul total = 0) când $x = 5$

$$\therefore P = 100x - x^2 + c = 0 \text{ când } x = 5$$

$$\therefore 100(5) - 5^2 + c = 0$$

$$\therefore c = -475$$

c reprezintă costurile fixe ale companiei, așadar răspunsul este 475£.

(În mod alternativ, problema aceasta mai poate fi formulată și astfel: care ar fi valoarea funcției profitului pentru activitate zero, respectiv $x = 0$? Răspunsul este 475£, reprezentând costurile fixe ale companiei.)

22. Integrale definite

Atunci când avem nevoie de un rezultat numeric, ca de exemplu venitul total între două niveluri de activitate, avem o integrală definită și forma ei generală este următoarea: $\int_a^b y dx$, unde a este o valoare definită și b este o altă valoare definită, mai mare decât a.

De exemplu, care este creșterea profitului în cazul creșterii nivelului de activitate de la o producție de 10 unități la o producție de 15 unități, când funcția veniturilor marginale este aceea din exemplul 2 de mai înainte, respectiv $y = 100 - 2x$.

Integrala definită a acestei funcții se scrie după cum urmează:

$$\int_{10}^{15}(100-2x)dx = \left[100-x^2\right]_{5}^{0}$$

$$= \left[100(15)-15^2\right]-\left[100(10)-10^2\right]$$

$$= 375£.$$

Notă. Se observă că a fost omisă constanta c, datorită faptului că valoarea sa (în acest caz - 475) este aceeași și pentru limita superioară și pentru limita inferioară, anulându-se reciproc și nu mai apare ca factor atunci când se trece de la un nivel de activitate la altul.

23. Rezumat

a) Calculul diferențial este utilizat pentru aflarea ratelor de variație și a punctelor de revenire ale funcțiilor.

b) Coeficientul diferențial sau derivat reprezintă rata de variație a lui y (variabila independentă) corespunzătoare unei variații infinitezimale a valorii lui x (variabila independentă).

c) Pentru funcția $y = x^n$ derivata va fi

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}.$$

d) Regulile de derivare se referă la situații în care funcția are o constantă, este o sumă, un produs, un raport, o funcție a unei funcții și pentru multe alte tipuri de funcții complexe.

e) Aplicațiile practice de importanță majoră ale calculului diferențial includ găsirea veniturilor marginale, costurilor marginale, profiturilor marginale, ca și pentru găsirea nivelurilor pentru care profiturile devin maxime.

f) Unele funcții au puncte de revenire, acestea putând fi puncte de venit maxim sau de costuri minime.

g) Prin calcularea derivatei unei funcții și egalând-o cu zero, poate fi găsit punctul de revenire.

h) Punctul de revenire trebuie verificat întotdeauna pentru a se ști dacă reprezintă un maxim sau un minim. Aceasta se realizează prin găsirea derivatei a doua, respectiv

$$\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Dacă aceasta are semn negativ, punctul de revenire reprezintă un maximum și dacă are semn pozitiv, reprezintă un minimum.

i) Derivarea parțială este utilizată în cazurile în care există mai mult de o singură variabilă independentă.

j) Regulile normale ale derivării se aplică în condițiile în care una dintre variabilele independente este considerată ca fiind constantă.

k) Integrarea reprezintă reversul derivării și se notează $\int y dx$.

l) Regula de bază a integrării este

$$\int kx^n dx = \frac{kx^{n+1}}{n+1} + c \qquad (n \neq -1).$$

m) Valoarea constantei depinde de circumstanțe și poate fi găsită prin deducție sau pe baza unor informații adiționale numite și condiții inițiale.

n) Atunci când se dorește obținerea unui rezultat numeric, avem o integrală definită.

24. De reținut

a) Derivarea și integrarea presupun că avem de-a face cu funcții continue. Funcțiile din domeniul afacerilor pot fi discontinue sau dispersate și prin urmare nu este posibil întotdeauna să aplicăm aceste tehnici.

b) În mod frecvent, funcțiile de costuri totale și cele de venituri sunt cunoscute. În aceste cazuri, valorile totale sau valorile dintre două niveluri de activitate pot fi găsite simplu și direct, fără utilizarea integralelor. Integrarea devine necesară numai când se cunosc curbele marginale.

c) Atenție! Calculul diferențial constituie un subiect vast și complex, pe care acest capitol abia dacă a reușit să-l prezinte pe larg. Multe dintre regulile care au fost date sunt utile, dar pot apărea și excepții în situații mai deosebite. Capitolul pune însă la dispoziția cititorului suficient material pentru ca acesta să poată face față examinărilor care îl așteaptă.

d) Așa cum am arătat în acest capitol, calculul diferențial este utilizat adesea pentru aflarea unor informații despre modelele economice și de afaceri care, prin însăși natura lor, sunt în mod normal aproximații, astfel încât orice rezultate obținute pe această cale trebuie utilizate cu atenție.

Întrebări de autoevaluare. *Numerele dintre paranteze se referă la numerele paragrafelor din capitol.*

1. În ce situații se poate folosi calculul diferențial? (2)
2. Care este obiectivul calculului diferențial? (3)
3. Care este regula de bază pentru derivare? (4)

4. În ce mod poate fi aplicat calculul diferențial pentru găsirea punctului de revenire al unei funcții? (14)
5. Ce este derivata a doua? (14)
6. Ce este derivata parțială? (16)
7. Cum se calculează derivata parțială? (17)
8. Care este relația dintre derivare și integrare? (19)
9. Care este regula de bază a integrării? (20)
10. Faceți distincția între integralele definite și integralele nedefinite. (22)

Exerciții cu răspunsuri

1. Să se calculeze derivatele funcțiilor:

a) $y = 6x - x$; c) $y = \sqrt{1+2x}$;

b) $y = \frac{1}{x^2}$; d) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

2. O funcție de cost are firma:

$$£(c) = Q^2 - 30Q + 200,$$

unde Q este cantitatea de unități produse.

Să se calculeze punctul de costuri minime.

3. O firmă care vinde un ghid comercial are următoarea funcție pentru profit:

$$P = 9G - 0{,}0005G^2 + 0{,}06GR - 80R^2 - 5000,$$

unde: G este numărul de ghiduri vândute;

R – numărul de pagini de reclamă.

Câte ghiduri, conținând câte pagini de reclamă ar trebui vândute pentru maximizarea profiturilor?

Răspunsuri la exerciții

1. a) 6. b) $\frac{-2}{x^3}$. c) $\frac{1}{\sqrt{1+2x}}$. d) $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$.

2. $\frac{dc}{dQ} = 2Q - 30.$

$\therefore Q = 15$ minimum.

Notă. $\frac{d^2C}{dQ^2} = 2$ așadar o valoare pozitivă, ceea ce înseamnă că avem o valoare minimă.

3. $$\frac{\delta P}{\delta G} = 9 - 0{,}001G + 0{,}06R.$$

$$\frac{\delta P}{\delta R} = 0{,}06G - 160A.$$

$$\therefore G = \frac{160R}{0,06} = 2667R.$$

$$\therefore 9 - 0,001(2667R) + 0,06R.$$

$9 = 2,727R \quad \therefore R = 3,3$ pagini.

Făcând înlocuirile rezultă :

$9 - 0,001G + 0,06(3,3)$

respectiv $9,198 = 0,001G$

$\therefore G = 9198$ exemplare.

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

11. CONTROLUL STOCURILOR – INTRODUCERE ŞI TERMINOLOGIE

1. Obiective

După parcurgerea acestui capitol:

- veți cunoaște principiile cheie ale controlului stocurilor, care sunt dezvoltate în cuprinsul următoarelor trei capitole;
- veți ști de ce se formează și se păstrează stocuri;
- veți înțelege cele patru costuri asociate stocurilor;
- veți putea defini stocul comun, termenii de control cum sunt timpul total, stocul fizic și stocul liber/disponibil, cantitatea economică pe loturi de comenzi;
- veți ști ce este analiza Pareto și ABC.

2. Tipuri de stocuri

O clasificare convenabilă a tipurilor de stocuri este următoarea:

a) Materii prime – materialele, componentele, combustibilii etc., folosiți la fabricarea unui produs;

b) Semifabricate – bunuri materiale, materiale, subansambluri etc., aflate între fazele tehnologice;

c) Produse finite – bunuri care ies din procesul de fabricație, gata pentru a fi vândute sau distribuite.

Articolele incluse în fiecare dintre aceste categorii variază de la o firmă la alta. Ceea ce pentru o firmă constituie un produs finit, pentru o alta poate să fie materie primă. De exemplu, barele de oțel pot fi clasificate drept produse finite pentru o uzină siderurgică, în timp ce pentru un fabricant de cuie sau de șuruburi, reprezintă materia primă.

3. Motive pentru formarea stocurilor

Principalele motive care duc la formarea stocurilor pot fi rezumate după cum urmează:

a) pentru a avea siguranța că există un număr corespunzător de bunuri pentru satisfacere cererii preconizate;

b) pentru a fi absorbite variațiile dintre cerere și producție;
c) pentru a se constitui un tampon între procesele de producție;
d) pentru a se putea profita de reducerile de preț la cumpărarea unor cantități mari;
e) pentru a se preveni o eventuală penurie din viitor;
f) pentru a se absorbi fluctuațiile sezoniere de utilizare sau de cerere;
g) pentru a permite proceselor tehnologice să se desfășoare în mod fluent;
h) ca necesitate a procesului de producție, ca de exemplu în cazul maturării whisky-ului;
i) ca parte a politicilor deliberate de investiții, în special în perioade de inflație sau când se preconizează penurii.

4. Motive alternative pentru formarea stocurilor

Motivele enumerate în paragraful 3 sunt motive logice, care se bazează pe decizii deliberate. Dar se mai pot forma stocuri și din alte motive, nu tot atât de lăudabile, dintre care tipice sunt următoarele:
a) se stochează marfă depășită din punct de vedere moral;
b) din cauza lipsei evidenței stocurilor sau a unui inventar incorect, când se pot face comenzi mai mari decât necesarul sau din cauza faptului că reaprovizionarea nu este calibrată în funcție de producție;
c) evidența incorectă sau absența evidenței stocurilor;
d) slaba corelare între departamentele de control al producției, achiziții și vânzări;
e) un nivel suboptim de luare a deciziilor, ca de exemplu în cazul în care departamentul de producție dorește o creștere a stocurilor de subansambluri/prefabricate, în scopul de a-și asigura fluența producției pe termen lung.

5. Costurile stocurilor

Indiferent dacă sunt un rezultat al unei politici deliberate sau nu, stocurile înglobează o investiție a societății respective. Și la fel ca în cazul oricărei investiții, costurile menținerii stocurilor trebuie să se regăsească în beneficii. Pentru ca această relație să fie eficientă, este necesar să se stabilească costurile stocării. Există patru categorii: costurile de menținere a stocurilor, costurile de formare a stocurilor, costurile de eliminare a stocurilor și costul propriu-zis al stocului.

6. Costurile menținerii stocurilor

Aceste costuri, cunoscute și sub denumirea de costuri de întreținere, includ următoarele:

a) dobânzile la capitalul investit;

b) cheltuielile de depozitare (chirii, iluminat, încălzire, congelare, aer condiționat etc.);

c) personalul depozitelor, întreținerea echipamentelor și a utilajelor și alte costuri de întreținere;

d) costurile de manevrare;

e) cheltuielile de audit, inventariere sau costurile de inventariere permanentă;

f) asigurări, pază;

g) deteriorare sau demodare;

h) pierderi prin furturi sau distrugere de către animale sau insecte.

7. Costurile de formare a stocurilor

Aceste costuri, cunoscute și sub denumirea de costuri de comandă sau achiziționare, includ următoarele:

a) chetuielile cu funcționarii și costurile administrative corespunzătoare departamentelor de achiziții, contabilitate și recepție;

b) costurile de transport;

c) în cazul în care produsele stocate provin din producția internă, se adaugă și costurile legate de producție pentru fiecare șarjă.

Notă. Unii studenți consideră că în costurile de achiziționare nu ar intra decât costurile asociate achiziționării stocului respectiv din afara societății. Nu trebuie uitat, însă, că și comenzile interne (respectiv fabricarea) comportă o serie de costuri însemnate legate de planificarea producției, lansarea în fabricație etc.

8. Costurile epuizării stocurilor

Aceste costuri se referă la situația în care un stoc de materii prime, subansambluri etc. se epuizează și tocmai încercarea de evitare a acestei situații stă la baza formării stocurilor. Aceste costuri includ următoarele:

a) pierderea unor venituri prin imposibilitatea de a vinde, imposibilitate determinată de epuizarea stocurilor;

b) pierderea posibilităților viitoare de vânzare, clienții căutând alți furnizori;

c) pierderea bunăvoinței clientului;

d) costul sincopelor tehnologice datorate epuizării stocurilor de prefabricate sau materii prime;

e) nemulțumirea forței de muncă determinată de oprirea producției;

f) costuri suplimentare determinate de reaprovizionarea în regim de urgență, cel mai adesea achizițiile acestea făcându-se en-detail, deci fără reducerile de preț din cazul achizițiilor en-gros.

Este evident faptul că unele dintre aceste costuri sunt greu de cunatificat, dar cel mai adesea sunt semnificative.

9. Costurile stocării

Aceste costuri se referă la costurile de achiziționare sau de producție și trebuie avute în vedere în următoarele condiții:

a) pentru achiziționarea unor cantități mari se acordă reduceri de prețuri;

b) în cazul producerii în scopul stocării, trebuie avut în vedere faptul că se pot face economii de producție în cazul în care se produc serii mari.

10. Obiectivele controlului stocurilor

Obiectivul principal al controlului stocurilor constă în menținerea acestora la niveluri pentru care costurile detaliate la paragrafele 6, 7 și 8 de mai înainte să fie minime. Aceasta se poate realiza prin determinarea a doi factori: *când să comanzi* și *cât să comanzi*. Aceste decizii sunt și subiectul următoarelor capitole, dar înainte de a le explica detaliat, vom defini câțiva termeni utilizați în cadrul controlului stocurilor.

11. Terminologia la controlul stocurilor

Vom da în continuare câteva definiții scurte ale unor termeni legați de controlul stocurilor, pe care îi vom ilustra apoi în paragraful 12.

a) *Timpul total* sau timpul de completare. Reprezintă perioada de timp, exprimată în zile, săptămâni, luni etc, care se scurge între momentul efectuării comenzii (fie intern, fie extern) și momentul onorării acesteia, respectiv momentul în care bunurile comandate pot fi utilizate.

b) *Cererea*. Cantitatea impusă de vânzare, producție etc. De obicei, se exprimă sub forma unei rate de cerere săptămânală, lunară etc. Estimările cererii în cursul timpului de procurare constituie un factor determinant în cadrul sistemelor de control al stocurilor. Ne vom referi pe larg la acest subiect în cadrul capitolului 14.

c) *Cantitatea economică pe loturi de comenzi* (CEL) sau cantitatea economică pe serii de producție (CEP). Aceasta reprezintă o cantitate calculată, care este comandată pentru reducerea la minim a balanței costurilor dintre costurile de menținere a stocurilor și costurile de completare a lor. În capitolul 13 ne vom ocupa în detaliu de acest subiect.

d) *Stocurile fizice*. Numărul de articole care se află în stoc la un moment dat.

e) *Stocul liber/disponibil*. Stocul fizic, la care se adaugă comenzile importante de completare a sa și din care se scade cererea neonorată.

f) *Stocul tampon*, stocul minim sau stocul de siguranță. Un surplus de articole din stoc, care are rolul de a acoperi erorile legate de previziune, timpul de procurare sau cererea din timpul de procurare. Acest subiect va fi explicat în detaliu în cursul capitolului 14.

g) *Stocul maxim*. Un nivel al stocului considerat ca fiind maxim admisibil, folosit ca indicator pentru a avea un indiciu în momentul în care stocurile depășesc cu mult necesarul.

h) *Nivelul de completare*. Reprezintă nivelul stocului la care trebuie făcute demersurile de completare. Nivelul de completare este dependent de timpul de procurare și de cererea din timpul de procurare.

i) *Cantitatea de completare*. Cantitatea cu care trebuie completat stocul. În unele tipuri de sisteme de control al stocurilor, această mărime coincide cu cantitatea economică pe loturi de comenzi, iar în altele se folosește o valoare diferită. Acest subiect va fi aprofundat în cadrul capitolului 14.

12. Ilustrarea unei situații simple a stocurilor

Următoarea diagramă (fig. 11.1) prezintă o situație a stocurilor simplificată datorită următoarelor presupuneri: o rată regulată a cererii, timpul de procurare fixat, completarea se face într-o singură fază.

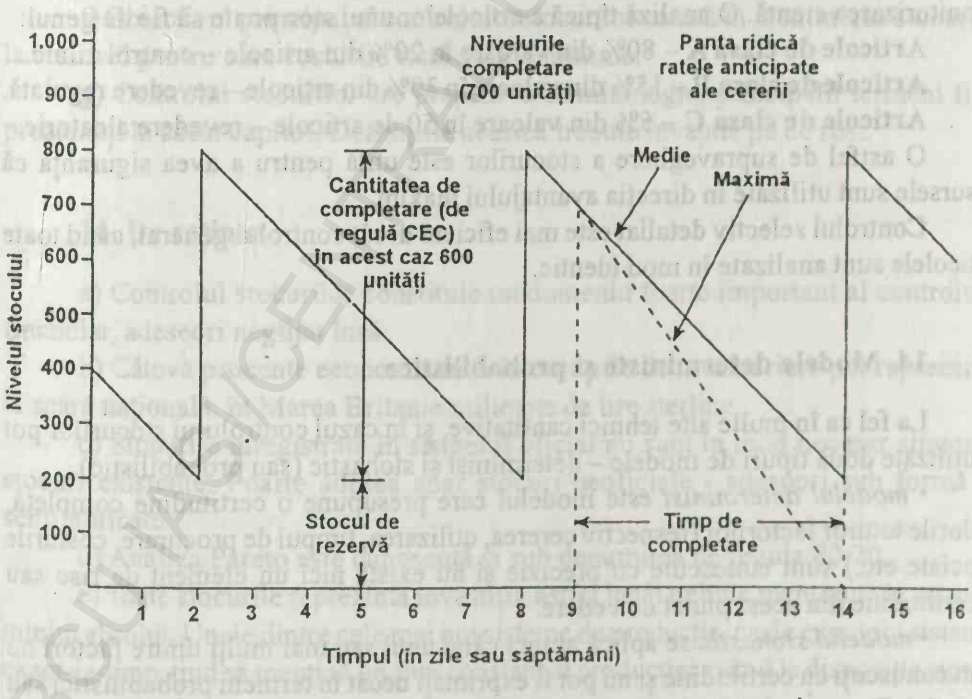


Fig. 11.1. Ilustrarea terminologiei specifice stocurilor

Note:

a) Se observă din fig. 11.1 că stocul de rezervă trebuie să corespundă unui nivel de cerere maximă în cursul timpului de procurare.

b) Timpul de completare reprezentat în diagramă este de 5 săptămâni, stocul de rezervă este de 200 de unități, iar cantitatea de completare este de 600 de unități.

c) Pentru rate constante ale cererii, așa cum se arată în diagramă, stocul mediu este egal cu stocul de rezervă plus 1/2 din cantitatea de completare; de exemplu, în fig. 11.1, stocul mediu este

$$200 + 1/2\ (600) = 500 \text{ unități.}$$

13. Analiza Pareto

Mijloacele de control detaliat al stocurilor necesită resurse și pot costa sume considerabile de bani. Pentru aceste motive, este important ca eforturile să fie direcționate într-o direcție care să fie economică din punctul de vedere al costurilor - nu se justifică aplicarea unor mijloace costisitoare de laborioase de control al stocurilor când este vorba despre articole de valoare insignifiantă.

Având în vedere acest raționament, este mai convenabilă aplicarea analizei Pareto sau analizei ABC. De multe ori se observă că numai câteva articole acoperă cea mai mare parte a valorii stocului și, prin urmare, asupra lor trebuie să fie îndreptată monitorizarea atentă. O analiză tipică a articolelor unui stoc poate să fie de genul:

Articole de clasa A – 80% din valoare în 20% din articole – control zilnic.

Articole de clasa B – 15% din valoare în 30% din articole – revedere regulată.

Articole de clasa C – 5% din valoare în 50 de articole – revedere aleatorie.

O astfel de supraveghere a stocurilor este utilă pentru a avea siguranța că resursele sunt utilizate în direcția avantajului maxim.

Controlul selectiv detaliat este mai eficient decât controlul general, când toate articolele sunt analizate în mod identic.

14. Modele deterministe și probabilistice

La fel ca în multe alte tehnici cantitative, și în cazul controlului stocurilor pot fi utilizate două tipuri de modele – determinist și stohastic (sau probabilistic).

• *modelul determinist* este modelul care presupune o certitudine completă. Valorile tuturor factorilor (respectiv cererea, utilizarea, timpul de procurare, costurile asociate etc.) sunt cunoscute cu precizie și nu există nici un element de risc sau incertitudine din acest punct de vedere.

• *modelul stohastic* se aplică atunci când unul sau mai mulți dintre factori nu sunt cunoscuți cu certitudine și nu pot fi exprimați decât în termeni probabilistici sau statistici. De exemplu, dacă rata de utilizare sau timpul de procurare au fost precizate

în termenii unei distribuții probabilistice, am avea un model stohastic sau probabilistic.

Ambele tipuri de modele vor fi prezentate în capitolele care urmează.

15. Rezumat

a) Stocurile pot fi clasificate foarte convenabil în materii prime, semifabricate și produse finite.

b) Clasificarea unui anumit articol depinde de natura activității firmei care face clasificarea.

c) Se formează și sunt menținute stocuri în vederea acoperirii rapide a cererilor, pentru a se asigura fluența producției, pentru a se profita de reducerile aferente achizițiilor en-gros, ca parte necesară a procesului de producție, pentru absorbția fluctuațiilor sezoniere și a altor fluctuații.

d) Stocurile se pot acumula și inutil, ca urmare a unor metode deficiente de control, neglijenței, slabei colaborări pe lanțul decizional și a modului suboptim de luare a deciziilor.

e) Costurile asociate stocurilor sunt: costurile de înființare a stocurilor, costurile de achiziționare a stocurilor, costurile de eliminare a stocurilor.

f) Obiectivul principal al controlului stocurilor constă în menținerea stocurilor la un nivel pentru care costurile totale să fie minime.

g) Controlul stocurilor are propria sa terminologie, principalii termeni fiind prezentați în acest capitol. Definițiile acestea trebuie învățate pe de rost.

16. De reținut

a) Controlul stocurilor constituie un domeniu foarte important al controlului financiar, adeseori neglijat însă.

b) Câteva procente economisite la la costurile de inventariere pot reprezenta, la scară națională, în Marea Britanie milioane de lire sterline.

c) Stocurile înregistrate în sistemul oficial nu sunt în mod necesar singurele stocuri existente. Foarte adesea apar stocuri neoficiale - adeseori sub formă de semifabricate.

d) Analiza Pareto este cunoscută și sub denumirea de regula 80:20.

e) Toate stocurile reprezintă investiții, astfel încât trebuie menținute la un nivel minim absolut. Unele dintre cele mai noi sisteme de producție, ca de exemplu sistemul exact-la-timp, tind să mențină un flux constant al producției având la dispoziție stocuri minime sau nule.

Întrebări de autoevaluare

1. Câte tipuri de stocuri există? (2)
2. Care sunt motivele pentru menținerea stocurilor? (3)
3. Care sunt principalele categorii de costuri asociate stocurilor? (5 până la 8)
4. Care este obiectivul principal al sistemelor de control a stocurilor? (9)
5. Definiți cel puțin șase termeni specifici controlului stocurilor. (10)
6. Ce este analiza ABC? (12)

BCU IAȘI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

12. CONTROLUL STOCURILOR – TIPURI DE SISTEME DE CONTROL

1. Obiective

După parcurgerea acestui capitol:

• veți fi familiari cu cele două sisteme principale de control al stocurilor;

• veți cunoaște principiile sistemului bazat pe nivelul de completare, respectiv sistemul cu două coșuri;

• veți putea calcula nivelurile cheie de control, nivelul de completare, nivelul minim și nivelul maxim;

• veți înțelege caracteristicile sistemului de verificare periodică.

2. Sistemul nivelului de completare

Acest sistem mai este cunoscut și sub denumirea de sistemul cu două coșuri iar caracteristicile sale sunt următoarele:

a) Pentru fiecare articol sunt prestabilite niveluri de completare.

b) Când nivelul stocului scade până la nivelul de completare, se emite automat ordinul de completare.

c) Cantitatea reprezentând completarea este invariabil egală cu cantitatea economică de comandă (CEC).

d) Denumirea sistemului cu două coșuri rezumă cea mai simplă metodă de operare a unui sistem, prin împărțirea stocului în două coșuri. Se începe să se consume dintr-unul dintre coșuri și când acesta se golește se emite ordinul de completare a stocului.

e) Cea mai mare parte a companiilor care lucrează cu sistemul bazat pe nivelul de completare au registre de evidență a stocurilor cu niveluri de completare antecalculate, pe baza cărora se emite automat ordinul de completare a stocurilor.

Notă. Ilustrația de la capitolul 11 reprezenta un exemplu bazat pe sistemul simplu de completare, care este utilizat pe scară largă în practică și constituie foarte frecvent subiect de examene și concursuri.

3. Ilustrarea sistemului simplu bazat pe nivelul de completare

Cosiderăm că următoarele date se referă la un anumit articol care se află în stoc:

Nivelul normal de utilizare	110 unități pe zi
Nivelul minim de utilizare	50 de unități pe zi
Nivelul maxim de utilizare	140 de unități pe zi
Timpul de procurare	25-30 de zile
Cantitatea economică a comenzii antecalculată	5000 de unități

Utilizând aceste date se pot calcula diferite niveluri de control.

Nivelul de completare = nivelul maxim de utilizare × timpul maxim de procurare
= 140 × 30
= 4.200 unități.

Nivelul minim = nivelul de completare - nivelul mediu de utilizare în perioada de procurare
= 4.200 – (110 × 27,5)
= 1.175 unități.

Nivelul maxim = nivelul de completare + cantitatea economică de comandă - nivelul minim de utilizare în perioada de procurare
= 4200 + 5000 – (50 × 25)
= 7950 unități.

Note:

a) Cele trei niveluri sunt trecute în registrul de însoțire al stocului și se fac comparații între nivelurile reale și nivelurile de control, de fiecare dată când se operează modificări în acest registru.

b) Nivelul de completare reprezintă un nivel precis de acțiune, în timp ce punctele de minim și de maxim reprezintă nivelurile la care trebuie avertizată conducerea de posibilitatea apariției unei situații periculoase.

c) Nivelul de completare este calculat astfel încât chiar și în situația cea mai nefericită, stocul să poată fi completat în timp util.

d) Nivelul minim este calculat astfel încât conducerea să fie avertizată atunci când cererea depășește nivelul mediu și se trece la utilizarea stocului-tampon. Deși este posibil să nu apară o situație periculoasă, evoluția trebuie urmărită cu atenție.

e) Nivelul maxim este calculat astfel încât conducerea să fie avertizată atunci când cererea se află la un nivel minim față de cel anticipat, fiind posibil prin urmare ca nivelul stocului să depășească nivelul maxim intenționat.

f) În cazul unui sistem manual, dacă se primesc avertismente referitoare la neconcordanțe ale nivelurilor minime și maxime cu realitatea, este posibil să fie necesară recalcularea și ajustarea nivelurilor de completare și/sau a cantității

economice de comandă (CEC). În cazul unui sistem informatizat, asemenea ajustări se produc automat, pentru a reflecta cât mai precis condițiile reale și a oferi o previziune cât mai exactă a condițiilor viitoare.

g) Un factor esențial pentru stabilirea nivelurilor de completare și pentru calcularea CEC este estimarea cererii viitoare. Estimarea a fost studiată într-un capitol anterior.

4. Sistemul de supraveghere periodică

Acest sistem mai este denumit și sistemul ciclului constant și are următoarele caracteristici:

a) Nivelurile stocurilor pentru toate articolele sunt supravegheate periodic la intervale fixe, ca de exemplu la fiecare două săptămâni.

b) Atunci când este necesar, se emite ordinul de completare a stocului.

c) Cantitatea comenzii de completare nu este egală cu valoarea antecalculată a CEC, dar se bazează pe aceasta, pe nivelul estimat al cererii până la următoarea verificare periodică și pe nivelul de moment al stocului și pe timpul de procurare.

d) Cantitatea reprezentând completarea stocului are rolul de a-l aduce pe acesta la un nivel predeterminat.

e) Proprietatea acestui sistem constă în posibilitatea de a se emite comenzi pentru *cantități variabile* la *intervale regulate*, spre deosebire de sistemul prezentat anterior, în paragraful 2, care oferea posibilitatea de a se comanda *cantități fixe* la *intervale variabile*.

5. Un model manual simplu de sistem de verificare periodică

Un departament de control al producției aplică sistemul de verificare periodică asupra unui număr de 500 de articole utilizate la asamblarea produselor finite. Nivelurile stocurilor pentru toate cele 500 de articole sunt verificate la fiecare 4 săptămâni și se emite ordinul de completare a stocului pe articole la un nivel antecalculat. Calculul acestui nivel se face la intervale de șase luni, bazându-se pe cererea preconizată pentru fiecare articol.

Graficul următor (fig. 12.1), bazat pe exemplul de mai înainte, arată situația pentru unul dintre articole, respectiv articolul numărul 1101x, pe o perioadă de 16 săptămâni.

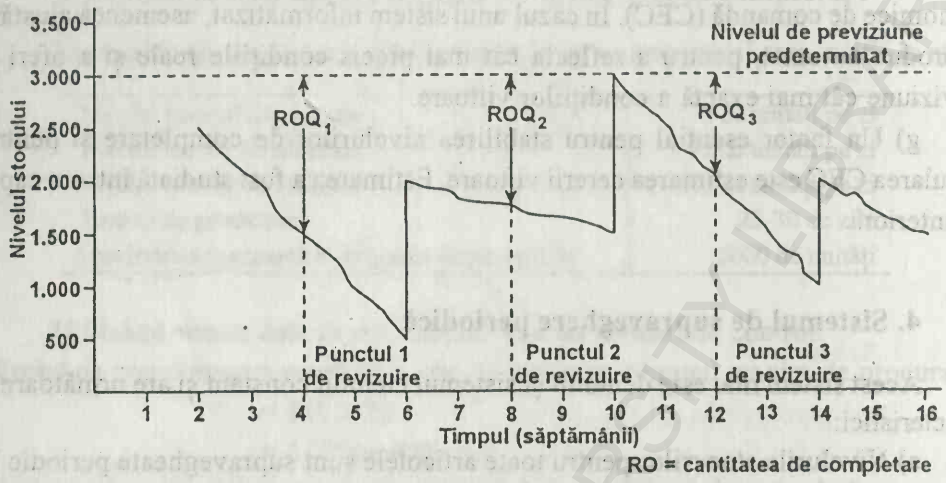


Fig. 12.1. Nivelurile de stocare pentru articolul cu nr. 1101.

Note:

a) Cantitățile de completare, bazate pe sistemul predeterminat, sunt de 1500 unități, 1200 unități și 1000 unități.

b) Se observă că ratele de utilizare sunt variabile și că timpul de completare a fost stabilit la două săptămâni.

c) Fig. 12.1 reprezintă numai unul din multitudinea de moduri de operare a unui sistem periodic de verificare, existând numeroase alte variante, în special pentru metoda de calcul a cantităților de completare.

6. Sistemul de verificare periodică

Avantaje:

a) Toate articolele din stoc sunt verificate periodic, astfel încât există o șansă mult mai mare de eliminare a articolelor depășite moral.

b) Se pot face economii la efectuarea comenzilor prin distribuirea mai uniformă a achizițiilor.

c) Se pot obține reduceri reduceri mari de prețuri pentru achiziții en-gros, atunci când se achiziționează, concomitent, mai multe articole de la un singur furnizor.

d) Deoarece se va păstra întotdeauna aceeași succesiunea a comenzilor, se pot înregistra economii și în producție, ca urmare a unei planificări mai riguroase a producției și a unor costuri mai scăzute pentru relansarea producției. Adeseori, acesta reprezintă un avantaj important și, prin urmare, firmele care au o anumită succesiune preferențială în ciclurile tehnologice, utilizează diferite tipuri de verificări periodice în cadrul sistemelor de control a producției, obținându-se avantaje majore de pe

urma acestei succesiuni predeterminate pe care o implică sistemul de verificare periodică.

Dezvantaje:

a) În general sunt necesare stocuri mai mari, deoarece în calculul cantităților de completare trebuie să se țină seama și de perioada dintre verificări, ca și de timpul de completare.

b) Atunci când cantitățile de completare coincid cu CEC, nu înseamnă că se află la un nivel corespunzător.

c) Este un sistem mai puțin sensibil la variațiile consumului. Dacă rata de utilizare se modifică imediat după o verificare periodică, este foarte posibil să survină o epuizare a stocurilor înaintea următoarei verificări.

d) În afara situațiilor în care consumul este semnificativ, sunt destul de dificil de stabilit intervalele de timp optime pentru efectuarea verificărilor periodice.

7. Sistemul bazat pe nivelul de completare

Avantaje:

a) Se reduce media stocurilor.

b) Completarea se face în concordanță cu cantitățile economice, calculate prin metoda CEC.

c) Într-o anumită măsură este un sistem mai sensibil la fluctuațiile cererii.

d) Se emite în mod automat comanda de completare, la intervalul de timp potrivit, prin compararea nivelului real al stocului cu nivelul de completare.

e) Este un sistem adecvat pentru firmele care utilizează mai multe tipuri de inventariere a stocurilor.

Dezavantaje:

a) Este posibil ca mai multe articole să atingă nivelul de completare în același timp, încărcând astfel sistemul de completare.

b) Articolele din stoc ating nivelurile de completare într-o ordine aleatorie, astfel încât nu poate fi prestabilită nici o ordine.

c) În anumite condiții (respectiv o variabilitate mare a cererii, a costurilor de completare), calcularea CEC poate să nu fie precisă. La acest subiect ne vom referi în detaliu în cadrul capitolului 15.

8. Sisteme hibrid

Am prezentat până acum două modele fundamentale de sisteme de control al stocurilor, dar în practică există o mulțime de variante. O anumită firmă poate să-și pună la punct un sistem adecvat pentru propriile nevoi, conținând elemente specifice ambelor sisteme despre care am vorbit. În condiții stabile ale cererii, timpului de

completare și ale costurilor, ambele abordări fundamentale se pot dovedi la fel de eficiente.

9. Rezumat

a) Există două sisteme de bază pentru controlul stocurilor, nivelul de completare sau sistemul de două coșuri și sistemul de verificări periodice.

b) Sistemul de completare are, în mod obișnuit, trei niveluri de control: nivelul de completare, nivelul maxim și nivelul minim.

c) În cazul sistemului bazat pe nivelul de completare, cantitatea comandată pentru completare este, în general, cantitatea economică de comandă.

d) Sistemul bazat pe nivelul de completare conduce în final la comandarea unor cantități fixe la intervale variabile de timp, în funcție de cerere.

e) Sistemul de verificări periodice are drept caracteristică faptul că stocurile sunt verificate la intervale de timp egale, iar comenzile de completare sunt făcute pentru a aduce stocul la un nivel predeterminat.

f) Cantitatea de comandă în acest caz se bazează pe evaluarea cantității estimate a cererii până la următorul termen de verificare.

g) Sistemul periodic de verificare are ca rezultat comandarea unor cantități de completare variabile la intervale de timp regulate.

10. De reținut

a) Multe subiecte de examene și concursuri tind să acrediteze ideea că sistemele de control al stocurilor au la bază sistemul nivelului de completare. Ceea ce nu este adevărat.

b) Importanța previziunii pentru controlul stocurilor nu trebuie supraestimată. Sistemele de previziune adaptabile, care au fost deja descrise, sunt în mod frecvent o parte integrantă a sistemelor de control a stocurilor, în special în cazul celor computerizate.

c) Nivelul stocului are tendința de a crește liniar cu creșterea lui n, unde n reprezintă numărul de articole din stoc. În consecință, standardizarea produselor, componentelor și a materialelor, poate contribui la reducerea nivelurilor stocurilor. Totuși, câștigurile obținute din reducerea stocurilor pot fi puse în umbră de pierderea capacității de scoatere a produselor pe piață, astfel încât este indicat să se acționeze cu atenție în privința politicilor de standardizare.

Întrebări de autoevaluare. *Numerele dintre paranteze se referă la numerotarea paragrafelor.*

1. Care sunt caracteristicile sistemului nivelului de completare din cadrul

controlului stocurilor? (2)

2. Care sunt cele trei niveluri care trebuie calculate în mod obișnuit pentru sistemele nivelului de completare? (3)

3. Definiți sistemul periodic de verificare și explicați în ce fel se deosebește el de sistemul nivelului de completare? (4)

4. Care sunt principalele avantaje și dezavantaje ale sistemului de verificare periodică? (6)

5. Care sunt principalele avantaje și dezavantaje ale sistemului nivelului de completare? (7)

Exerciții cu răspunsuri

1. În legătură cu un anumit articol aflat în stoc exista următoarele informații:

Nivelul normal de utilizare	1300 unități pe zi
Nivelul minim de utilizare	900 de unități pe zi
Nivelul maxim de utilizare	2000 de unități pe zi
Timpul de procurare	15-20 de zile
Cantitatea economică	30.000 de unități

Calculați diferitele niveluri de control.2. Care sunt avantajele și dezavantajele sistemului de verificare periodică din cadrul controlului stocurilor?

Răspunsuri la exerciții

1. Nivelul de completare $= 2.000 \times 20$
$= 40\,000.$

Nivelul minim $= 40\,000 - (1300 \times 17\ 1/2)$
$= 17\,250.$

Nivelul maxim $= 40\,000 + 30\,000 - (900 \times 15)$
$= 56\,500.$

2. Principalele *avantaje* ale sistemului de verificare periodică sunt:

1) Toate articolele stocate sunt verificate periodic și astfel sunt eliminate stocurile depășite din punct de vedere moral.

2) Se justifică perfect angajarea unui personal specializat.

3) Permite exploatarea cazurilor în care prin comandarea unui număr mare de articole se obțin reduceri de prețuri.

4) Sistemul permite obținerea unor avantaje de pe urma unor succesiuni ale procesului de producție. De exemplu, este mai ușor să se treacă de la un ritm de producție la altul, decât să se oprească producția și apoi să se reseteze pe ansamblu parametrii de producție.

Principalele *dezavantaje* sunt:

1) Este necesar un volum de muncă adițional pentru revederea articolelor din stoc în afara momentelor în care se operează modificări în registru.

2) Adeseori sunt necesare stocuri mai mari, deoarece nivelurile de completare trebuie să țină cont și de perioadele de timp dintre verificări, ca și de timpul de completare.

3) Răspunde mai lent la modificările nivelurilor de consum. Dacă rata de utilizare se modifică la scurt timp după verificarea periodică, este foarte posibil să se producă epuizarea stocului înaintea următorului termen de verificare.

4) Este mai dificil să se stabilească intervalele de verificare. Nivelurile de utilizare fluctuante, spasmodice, pot face ca stabilirea acestor intervale să fie chiar imposibilă.

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

13. CONTROLUL STOCURILOR – CANTITATEA ECONOMICĂ DE COMANDĂ

1. Obiective

1. După parcurgerea acestui capitol:

• veți înțelege care sunt premizele ce trebuie luate în considerare în calculul cantității economice de comandă (CEC)

• veți putea stabili valoarea CEC prin metoda grafică și prin aplicarea formulei

• veți ști cum se calculează CEC folosind completarea graduală și condițiile în care este permisă eliminarea stocurilor

• veți ști cum se calculează volumul cel mai avantajos al unei comenzi atunci când furnizorul face discounturi de preț

• veți înțelege importanța costurilor marginale în calculul CEC.

2. Elementele care influențează nivelul cantității economice de comandă

Anterior, cantitatea economică de comandă a fost definită ca fiind acel nivel al unei comenzi care reduce la minimum balanța costurilor dintre costurile pe care le implică întreținerea unui anumit inventar și costurile de completare a inventarului respectiv. Pentru a putea calcula un nivel grosier al CEC este necesar să se pornească de la anumite premize și anume:

a) există un cost constant și cunoscut al întreținerii unui stoc;

b) există un cost constant și cunoscut al completării stocului;

c) există anumite rate ale cererii, de asemenea cunoscute;

d) există un preț cunoscut pe unitatea de produs care formează stocul;

e) completarea stocului se face instantaneu, respectiv întreaga comandă este livrată în cel mai scurt timp;

f) nu este permisă epuizarea stocului.

Note:

a) Este evident faptul că premizele acestea sunt într-o anumită măsură variabile în timp, acesta fiind un motiv în plus pentru care algoritmul de calcul a CEC trebuie aplicat cu prudență.

b) Unele dintre premizele de mai înainte vor fi detaliate în cursul acestui capitol.

c) Din pornire, algoritmul de calcul a CEC nu ține seama în nici un fel de stocul-tampon, care trebuie menținut pentru a acoperi cererea între momentul emiterii cererii de completare și momentul livrării acestei comenzi.

3. Exemplu grafic de aflare a CEC

Se vor folosi următoarele date pentru rezolvarea grafică a problemei valorii CEC.

Exemplul 1

O companie are nevoie de 50 000 de repere pe an, la costul de achiziție de 10£ bucata. Costurile de comandă și manevrare pentru o singură comandă este de 150£, iar costurile de transport reprezintă 15% pe an, ceea ce înseamnă un cost de 1,50£ pe bucată și an, pentru a-l aduce în depozit (10£x15%).

Pentru a putea trasa graficul diferitelor costuri implicate, trebuie făcute următoarele calcule:

Costurile totale (pe an) = costul de comandă (pe an) +
+ costul de transport (pe an),

unde

Costul de comandă (pe an) = numărul de comenzi × 150£

$$\text{și nr. de comenzi} = \frac{\text{comanda anuală}}{\text{cantitatea comandată}}.$$

(De exemplu, pentru o cantitate comandată de 5.000 de bucăți,

$$\text{nr. de comenzi} = \frac{50\,000}{5000} = 10$$

și costul de comandă (pe an) = 10 × 150£ = 1500£ pe an.

Costul de transport (pe an) = nivelul mediu al stocului × 1,50£

$$\text{și stocul mediu} = \frac{\text{cantitatea comandată}}{2}.$$

(De exemplu, pentru o cantitate comandată de 5000 de bucăți, costurile de transport sunt $\frac{5000}{2} \times 1{,}5£ = 3750£$).

Pe baza acestor principii, tabelul 13.1 dă costurile pentru diferite cantități comandate.

Tabelul 13.1

Costurile de comandă și de întreținere a stocurilor pentru diferite cantități comandate

Coloana I	II	III	IV	V	VI
Cantitatea comandată	Nr. mediu de comenzi (pe an)	Costul anual al comenzilor	Stocul mediu	Costul de întreținere a stocului (pe an)	Costul total
	$\frac{50.000}{\text{Col. I}}$	Col. II × 150£	$\frac{\text{Col. I}}{2}$	Col. IV × 1,5£	Col. III + Col. V
		£	£	£	
1000	50	7500	500	750	8250
2000	25	3750	1000	1500	5250
3000	16 2/3	2500	1500	2250	4750
4000	12 1/2	1875	2000	3000	4875
5000	10	1500	2500	3750	5250
6000	8 1/3	1250	3000	4500	5750

Costurile din tabelul 13.1 pot fi notate pe un grafic (fig. 13.1) după care se poate face o aproximare a CEC.

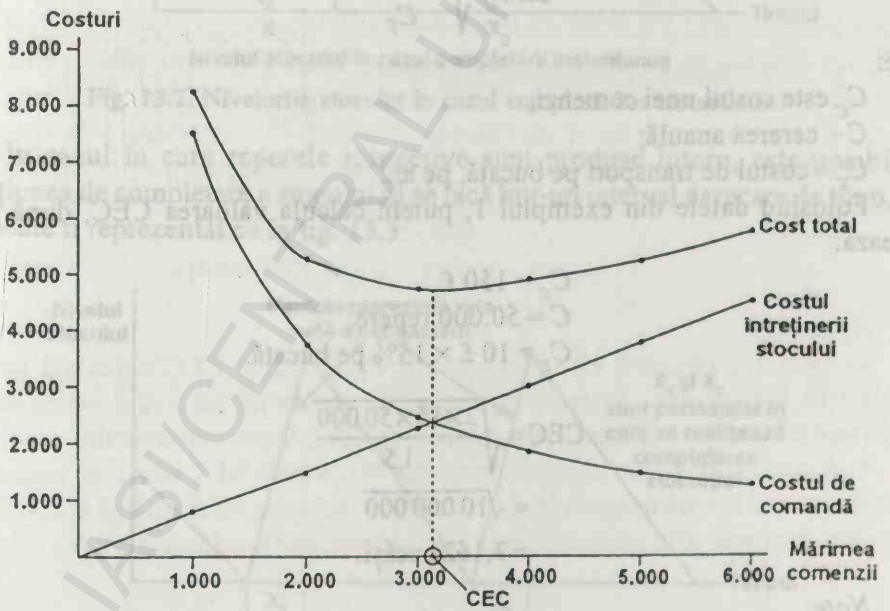


Fig. 13.1. Graficul datelor din tabelul 13.1.

Se observă din grafic faptul că CEC este de aproximativ 3200 de bucăți, ceea ce înseamnă că trebuie făcut un număr de comenzi anuale cu puțin sub 16.

Note:

a) Având ca punct de pornire metoda grafică, un grad mai mare de acuratețe nu este posibil și, oricum, acesta nu este necesar.

b) Din grafic rezultă că zona inferioară a curbei costului total este relativ rectilinie, ceea ce indică faptul că valoarea exactă a CEC nu este foarte critică. Acest fapt este tipic în majoritatea problemelor referitoare la CEC.

4. Formula CEC

Este posibil, și de obicei această metodă este mai des folosită, ca valoarea CEC să fie calculată folosind o formulă matematică. Metoda matematică permite obținerea unui rezultat exact, dar acest lucru nu înseamnă că puteți să vă lăsați tentați să acordați o încredere nemeritată cifrelor exacte. Calculul se bazează pe estimări ale costurilor, cererii etc, toate aceste mărimi fiind, bineînțeles, expuse erorilor. Formula de calcul matematic a CEC este prezentată mai jos și vă recomand să o rețineți. Derivata matematică este dată în apendicele 1 (v. pag. 257) al acestui capitol.

Formula de bază pentru calculul CEC este

$$CEC = \sqrt{\frac{2 \cdot C_C \cdot C}{C_T}},$$

unde:

C_C este costul unei comenzi;

C – cererea anaulă;

C_T – costul de transport pe bucată, pe an.

Folosind datele din exemplul 1, putem calcula valoarea CEC, după cum urmează:

$C_C = 150$ £,
$C = 50.000$ repere,
$C_T = 10$ £ $\times$ 15% pe bucată.

$$CEC = \sqrt{\frac{2 \times 15 \times 50\,000}{1{,}5}}$$

$$= \sqrt{10\,000\,000}$$

$$= 3{,}162 \text{ bucăți.}$$

Note:

a) Cea mai apropiată valoare pe care puteam să o obținem prin metoda grafică era în jur de 3200 de bucăți, ceea ce este destul de aproape de numărul obținut pe cale matematică.

b) Totdeauna trebuie să aveți în vedere ca valorile pentru cerere și costurile de transport să fie specifice pentru același interval de timp.

c) În unele probleme, costurile de transport sunt exprimate ca procent din valoare, în timp ce în altele sunt exprimate direct sub forma de cost pe bucată. În acest exemplu am utilizat ambele exprimări, comparativ.

5. CEC în cazul completării graduale a stocurilor

În exemplul 1 de mai înainte am pornit de la premiza că reperele respective trebuiau comandate unui furnizor extern şi că întreaga cantitate se livrează sub forma unui singur lot, cu alte cuvinte fiind vorba despre completarea instantanee, situaţie reprezentată în fig. 13.2.

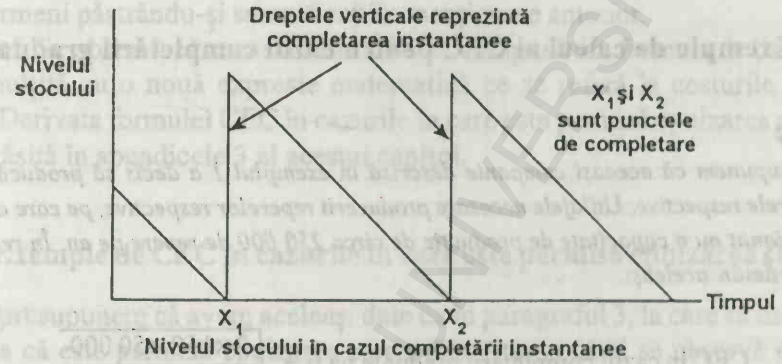


Fig. 13.2. Nivelurile stocului în cazul completărilor instantanee.

În cazul în care reperele respective sunt produse intern, este posibil ca operaţiunea de completare a stocului să se facă într-un interval oarecare de timp, caz care poate fi reprezentat ca în fig. 13.3:

Fig. 13.3. Nivelurile stocului în cazul completărilor neinstantanee.

Rata netă a completării este determinată de rata completării şi de rata consumului în cursul perioadei de completare. Pentru a fi valabilă în situaţii de acest gen, formula de calcul a CEC va fi modificată după cum urmează:

$$\text{Formula CEC pentru completarea graduală} = \sqrt{\frac{2 \cdot C_c \cdot C}{C_T\left(1-\frac{C}{P}\right)}},$$

unde P este rata anuală a producției, respectiv cantitatea care ar putea fi produsă dacă producția pentru reperul respectiv ar fi continuă pe parcursul întregului an.

Toți termenii acestei formule au aceeași semnificație ca și în cazul anterior, rămânând valabile definițiile de la paragraful 4.

Notă. Derivata formulei de mai sus va fi prezentată în cadrul apendicelui 2 de la sfârșitul acestui capitol.

6. Exemplu de calcul al CEC pentru cazul completării graduale

Exemplul 2

Presupunem că aceeași companie descrisă în exemplul 1 a decis să producă pe plan intern reperele respective. Utilajele necesare producerii reperelor respective, pe care compania le-a achiziționat au o capacitate de producție de circa 250 000 de repere pe an. În rest, datele problemei rămân aceleași.

$$\text{CEC în cazul completării graduale va fi} = \sqrt{\frac{2\times150\times50\,000}{1{,}5\left(1-\frac{50\,000}{250\,000}\right)}}$$

$$= \sqrt{\frac{15\,000\,000}{1{,}5(,8)}}$$

$$= 3535 \text{ bucăți.}$$

Note:

a) Valoarea obținută este mai mare decât în cazul CEC calculată pentru completarea instantanee, deoarece consumul de repere pe parcursul perioadei de completare are ca efect reducerea costului mediu de întreținere a stocului.

b) Așa cum am mai subliniat în capitolul 11, paragraful 7, costul de comandă, în cazul comenzii interne cuprinde și costurile de lansare a fabricației și costurile de producție, ca și costurile pe care le implică departamentele administrative.

7. CEC în cazul în care este permisă eliminarea stocurilor

După cum vă amintiți, obiectivul fundamental al controlului stocurilor constă în reducerea la minimum a balanței celor trei costuri principale, respectiv costurile de întreținere a stocurilor, costurile de comandă și costurile legate de epuizarea stocurilor.

Costurile legate de epuizarea stocurilor sunt greu de cuantificat, dar aceasta nu înseamnă că nu ar putea să fie semnificative, iar eliminarea costurilor pe care le implică o asemenea situație este chiar unul dintre principalele motive pentru care se formează stocurile. În cazurile în care costurile epuizării stocurilor sunt cunoscute, valorile respective pot fi incluse în formula matematică a CEC, care devine în acest fel (când epuizarea stocurilor este permisă și când costurile epuizării stocului sunt cunoscute)

$$\text{CEC} = \sqrt{\frac{2 \cdot C_C \cdot C}{C_T}} \times \sqrt{\frac{C_T + C_E}{C_E}},$$

unde C_E reprezintă costul epuizării stocului exprimat la unitatea de produs, pe an, ceilalți termeni păstrându-și semnificațiile menționate anterior.

Notă. Se observă că această formulă este compusă din formula de bază pentru CEC înmulțită cu o nouă expresie matematică ce se referă la costurile epuizării stocului. Derivata formulei CEC în cazurile în care este permisă epuizarea stocurilor poate fi găsită în apendicele 3 al acestui capitol.

8. Exemple de CEC în cazurile în care este permisă epuizarea stocurilor

Să presupunem că avem aceleași date ca în paragraful 3, la care se mai adaugă precizarea că este permisă epuizarea stocurilor. Atunci când se observă epuizarea stocului și se face o nouă comandă de produs, firma furnizoare a fost de acord să o primească, cu condiția ca la livrare să folosească un curier rapid pentru transport, la un cost de 0,75£ pe unitatea de produs. Alte costuri administrative asociate epuizării stocului sunt estimate la 0,25£ pe unitatea de produs. Care este CEC în aceste condiții?

$C_C = 150£$
$C = 50\,000$
$C_T = 1{,}5£$
$C_S = 0{,}75£ + 0{,}25£ = 1£.$

Astfel, CEC în cazul epuizării stocului

$$= \sqrt{\frac{2 \times 150 \times 50\,000}{1{,}5}} \sqrt{\frac{1{,}5+1}{1}}$$
$$= 3162 \times 1{,}58$$
$$= 4.996.$$

9. CEC în cazul obținerii de discounturi

O presupunere cu totul lipsită de bază reală în calculul CEC este aceea că prețul pe unitatea de produs ar putea să rămână constant. În mod curent se poate

obține o formă de discount pentru comenzi substanțiale. Aceste prețuri de discount pot fi incluse în formula de calcul a CEC, dar lucrurile se complică foarte mult în acest caz. O abordare mai simplă ar putea să fie reprezentată de compararea costurilor asociate cu o CEC normală cu costurile antecalculate pentru diferite niveluri de discount, pentru a afla în acest mod cantitatea ideală de comandă.

10. Consecințele financiare ale discounturilor

Discountul de preț pentru achiziționarea unor cantități mai mari de produse are trei efecte financiare, dintre care două sunt benefice și al treilea nociv.

Efectele benefice:

a) reducerea prețului cu amănuntul;

b) comandarea unei cantități mai mari de produs, ceea ce înseamnă că trebuie efectuate mai puține comenzi, astfel încât costul total al comenzilor să fie mai redus.

Efectul nociv.

Cresc prețurile din cauza creșterii costurilor stocării, datorită faptului că nivelul mediu al stocului este mai mare, ca urmare a comandării unei cantități mai mari.

Exemplul 3 - exemplu de CEC cu discount

O companie utilizează un anumit tip de reper în procesul său tehnologic, reper pe care îl achiziționează de la un producător extern. Datele concrete sunt:

Cererea = 2000 bucăți/an,

C_c *= 20£/comandă,*

C_T *= 20% din prețul unității de produs.*

Prețul unității de produs = 10£/bucată.

Compania primește următorul discount la prețul pe bucată:

Pentru niveluri ale comenzii de 400 – 799 o reducere de 2%

800 – 1.599 o reducere de 4%

1.600 și peste o reducere de 5%.

Se cere să se stabilească CEC.

Această problemă poate fi rezolvată folosind următorul procedeu:

a) Se calculează CEC pornind de la prețul de bază.

b) Se compară economiile realizate prin scăderea prețului și cheltuielile suplimentare cu stocarea, pentru fiecare nivel de discount (respectiv, 400, 800, 1600) pentru care CEC se calculează cu formula de bază, după cum urmează:

$$CEC = \sqrt{\frac{2 \times 2000 \times 20}{10 \times 2}}$$

$$= 200 \text{ repere.}$$

Pe baza acestei valori puteți găsi, în tabelul 13.2, comparații ale diferitelor costuri și economii care se pot realiza:

Tabelul 13.2

Tabel comparativ costuri/economii pentru CEC pentru diferite niveluri de discount

Cantitatea de comandă	200 (CEC)	400	800	1600	Nr.
Discount	–	2%	4%	5%	1
Numărul mediu de comenzi pe an	10	5	2 1/2	1 1/4	2
Numărul mediu de comenzi economisite pe an	–	5	7 1/2	8 3/4	3
Economiile cu costurile de comandă pe an	–	(5 × 20) = 100£	(7 1/2 × 20) = 150£	(8 3/4 × 20) = 175£	4
Economiile de cost pe bucată pe an	– –	20p (2000 × 20p) = 400£	40p (2000 × 40p) = 800£	50p (2000 × 50p) = 1000£	5
Câștigul total		500£	950£	1175£	6
Costurile de stocare pe an	(100 × 10 × 0,2) = 200£	(200 × 9,8× 0,2) = 392£	(400 × 9,6 ×0,2) = 768£	(800×9,5× 0,2) = 1520£	7
Costurile adiționale induse de creșterea cantității comandate	–	(92£ – 200£) = 192£	(768£ – 200£) = 658£	(1520£ – 200£) = 1320£	8
Raportul net câștig/pierdere	–	308£	382£	145£	9

Din tabelul 13.2 se observă că CEC cea mai avantajoasă din punct de vedere economic este de 800 de repere, ceea ce înseamnă că este de preferat discountul de 4%.

Note:

a) linia 2 reprezintă $\frac{\text{necesarul anual de repere } 2000}{\text{cantitatea de comandă}}$.

b) linia 7 reprezintă costul transportului unui stoc mediu, respectiv $\frac{\text{cantitatea pe o singură comandă}}{2}$ × costul unui reper × procentajul din cost al transportului.

c) linia 9 reprezintă diferența dintre linia 6 și linia 8 (linia 6 - linia 8).

11. Costurile marginale și calculul CEC

Trebuie reținut foarte bine faptul că toate costurile utilizate în calculul CEC trebuie să reprezinte costuri marginale reale, respectiv costurile care se pot modifica de la o aprovizionare la alta. Rezultă prin urmare că nu trebuie folosite în aceste calcule costuri fixe. În exemplele la care am apelat în acest capitol, costurile au fost enunțate clar și simplu. În cadrul examinărilor însă nu vă veți confrunta în toate cazurile cu această situație, prin urmare fiind necesară foarte multă atenție pentru a fi siguri că utilizați în calcule costurile adecvate.

12. Rezumat

a) CEC reprezintă cantitatea care reduce la minimum costurile totale implicate, inclusiv costurile de stocare și costurile de comandă.

b) Formula de bază pentru calculul CEC pornește de la premiza unor comenzi și costuri constante în timp, a cererii constante și a refacerii instantanee a stocului.

c) Formula de bază pentru CEC este

$$\sqrt{\frac{2.C_C.C}{C_T}}.$$

d) În cazul în care refacerea stocurilor nu se realizează instantaneu, respectiv în cazul achizițiilor interne, formula devine

$$\sqrt{\frac{2.C_C.C}{C_T\left(1-\frac{C}{P}\right)}}.$$

e) În cazul în care refacerea stocului nu se realizează instantaneu, valoarea calculată a CEC este mai mare decât valoarea de bază a CEC.

f) În cazurile în care sunt permise epuizările de stocuri și sunt cunoscute costurile acestora, formula devine

$$\sqrt{\frac{2.C_C.C}{C_T}} \times \sqrt{\frac{C_T + C_S}{C_S}}.$$

g) Atunci când se pot comanda cantități mai mari pentru a beneficia de reduceri de preț, cresc costurile de stocare, dar se realizează economii prin reducerea prețului pe unitatea de produs și prin reducerea costurilor de comandă.

h) Costurile care se utilizează în calculul valorii CEC trebuie să reprezinte costuri marginale. Costurile fixe nu trebuie incluse.

Întrebări de autoevaluare. *Numerele dintre paranteze se referă la numerotarea paragrafelor.*

1. Care sunt presupunerile care trebuie făcute în mod curent la calcularea CEC? (2)
2. Care este formula de bază pentru CEC? (4)
3. Cum se modifică această formulă pentru cazul particular al completării graduale a stocului? (5)
4. Care este formula CEC pentru cazul în care este permisă eliminarea stocurilor? (7)
5. Care sunt efectele reflectate în costuri în cazul achiziționării unor cantități mai mari de produs în vederea obținerii unei reduceri de preț? (9)
6. Care sunt tipurile de costuri ce trebuie folosite în calculul CEC? (11)

Apendicele 1 – Derivata formulei de bază pentru CEC

Notații C – cererea anuală;
Q – cantitatea de comandă;
C_C – costul de comandă;
C_T – costul de transport pentru o singură unitate de produs, pe an.

$$\text{Stocul mediu} = \frac{Q}{2}.$$

$$\text{Costurile totale anuale de stocare} = \frac{QC_T}{2}.$$

$$\text{Numărul de comenzi pe an} = \frac{C}{Q}.$$

$$\text{Costurile de comandă totale anuale} = \frac{CC_C}{Q}.$$

$$\text{Costul total} = \frac{QC_T}{2} + \frac{C}{Q}C_C.$$

Cantitatea de comandă pentru care costul total (pe care îl vom nota cu T_C) este redus la minim se obține prin calcularea derivatei în funcție de Q și egalarea rezultatului cu zero:

$$\frac{dT_c}{dQ} = \frac{C_T}{2} - \frac{CC_C}{Q^2},$$

iar atunci când $\frac{dT_c}{dQ} = 0$ costurile sunt minime

adică $0 = \frac{C_T}{2} - \frac{CC_C}{Q^2}$.

Pentru a afla valoarea lui Q

$$\frac{CC_C}{Q^2} = \frac{C_T}{2},$$

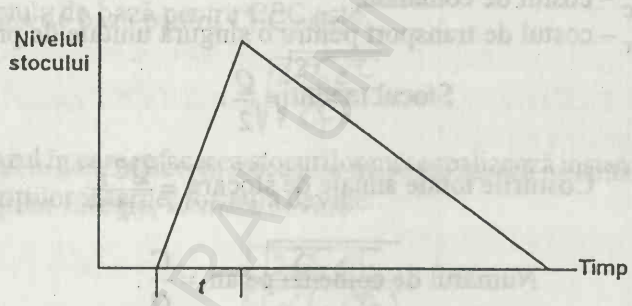
$$2CC_C = Q^2 C_T,$$

$$\frac{2CC_C}{C_T} = Q^2.$$

$$Q \text{ (respectiv CEC)} = \sqrt{\frac{2 \cdot C_T \cdot C}{C_O}}.$$

Apendicele 2 – Derivata CEC pentru completarea graduală a stocului

Vă amintiți că refacerea graduală a stocului se reprezintă grafic ca în imaginea alăturată, în care se poate observa că refacerea stocului se realizează într-un timp t, cu o rată notată R.



Numărul de repere $\times R \times t = C$

respectiv $\frac{C}{Q} \times R \times t = C$.

$$\therefore t = \frac{Q}{R}.$$

Stocul mediu se reprezintă la jumătatea înălțimii triunghiului, înălțimea acestuia fiind determinată de rata de completare a stocului, din care se scade cererea pe timpul afectat completării.

$$\text{Stocul mediu} = \frac{t(R-C)}{2},$$

și făcând înlocuirea lui t obținem

$$\text{Stocul mediu} = \frac{\frac{Q}{R}(R-C)}{2}$$

$$\text{sau } \frac{Q\left(1-\frac{C}{R}\right)}{2}.$$

Costurile totale anuale pentru stocare vor fi: $\frac{Q\left(1-\frac{C}{R}\right)C_o}{2}$.

Această expresie matematică poate fi înlocuită cu expresia matematică corespunzătoare din apendicele 1, urmându-se apoi aceleași etape. Se obține o formulă modificată pentru CEC, respectiv:

$\sqrt{\frac{2 \cdot C_C \cdot C}{C_o\left(1-\frac{C}{R}\right)}}$ pentru CEC în cazul refacerii graduale a stocului.

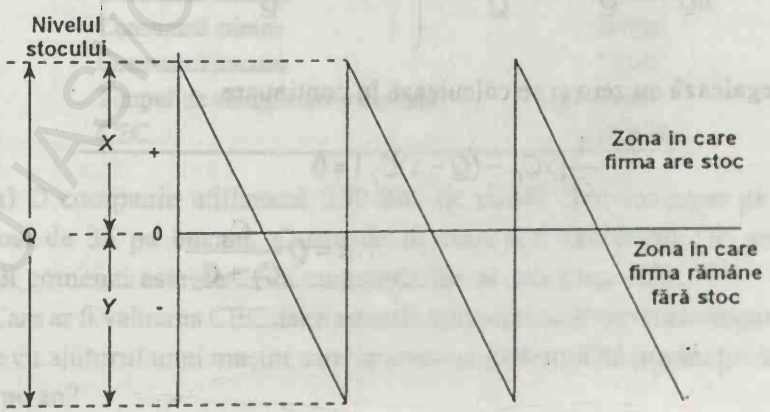
Apendicele 3 – Derivata matematică a formulei CEC pentru cazul în care este permisă epuizarea stocului

Considerăm că toate simbolurile folosite în continuare au aceleași semnificații ca și mai înainte.

Costurile totale = costul de comandă + costurile de transport +
+ costurile de epuizare a stocului,

unde costul anual de comandă $= \frac{CC_C}{Q}$.

Pentru a afla costurile de transport și costurile legate de epuizarea stocului, este necesar să se stabilească cât timp firma dispune de stoc și cât timp rămâne fără stoc:



$\therefore$ Proporția de timp în care firma posedă stoc $= \frac{x}{Q}$.

Proporția de timp în care firma rămâne fără stoc $= \frac{y}{Q}$.

Ca valoare medie a stocului se consideră jumătate din stocul maxim.

Costul de transport (referitor la zona în care firma are stoc) $= \frac{1}{2} x C_T \frac{x}{Q}$.

Costul pentru poziția „fără stoc" (referitor la zona în care firma rămâne fără stoc)

$$= \frac{1}{2} y C_S \frac{y}{Q}.$$

Astfel, costul total va fi $= \frac{CC_C}{Q} + \frac{1}{2} x C_T \frac{x}{Q} + \frac{1}{2} y C_S \frac{y}{Q}$

și făcând substituția lui y

costul total va deveni $= \frac{CC_C}{Q} + \frac{\frac{1}{2}x^2 C_O}{Q} + \frac{\frac{1}{2}(Q-x)^2}{Q} C_S$.

Aceasta este funcția pentru costul total și, ca de obicei, pentru a afla care este nivelul ei minim, vom calcula derivata, pe care o vom egala apoi cu zero.

Cum avem de-a face cu două variabile, x și Q, este necesar să calculăm derivata parțială în funcție de x și Q, iar rezultatele să le egalăm cu zero:

$$\frac{\delta T_a}{\delta x} = \frac{x C_O}{Q} - \frac{(Q-x)C_S}{Q},$$

$$\frac{\delta T_a}{\delta Q} = \frac{-CC_C}{Q^2} - \frac{\frac{1}{2}x^2 C_T}{Q^2} + \left(\frac{Q(Q-x)C_S - \frac{1}{2}(Q-x)^2}{Q^2} \right) C_S.$$

Se egalează cu zero și se calculează în continuare

$$\frac{1}{Q}[xC_O - (Q-x)C_S] = 0$$

$$\therefore x = Q \frac{C_S}{C_T + C_S}$$

$$-\frac{1}{Q^2}[CC_C+\frac{1}{2}x^2C_T-\frac{1}{2}(Q^2-x^2)C_S]=0.$$

$$Q^2=\frac{2CC_C}{C_S}+\frac{x^2C_T}{C_S}+x^2$$

$$=\frac{2CC_C}{C_S}+x^2\frac{C_T+C_S}{C_S}.$$

Știind că $x=Q\frac{C_S}{C_T+C_S}$ se va face substituția:

$$Q^2=\frac{2CC_C}{C_S}+\frac{Q^2C_S}{C_r+C_S}$$

$$\therefore Q^2\left(1-\frac{C_S}{C_T+C_S}\right)=\frac{2CC_C}{C_S}$$

$$Q^2\left(\frac{C_T}{C_T+C_S}\right)=\frac{2CC_C}{C_S}$$

$$\therefore Q^2=\frac{2CC_C(C_T+C_S)}{C_OC_S}$$

$$\therefore Q=\sqrt{\frac{2CC_C}{C_T}}\times\sqrt{\frac{C_T+C_S}{C_S}}.$$

Exerciții cu răspunsuri

1. Calculați nivelurile de control pentru următoarele informații:

Consumul normal	560/zi
Consumul minim	240/zi
Consumul maxim	710/zi
Timpul de completare a stocului	15-20 zile
CEC	10.000

2. a) O companie utilizează 100 000 de unități dintr-un reper pe an, la un preț de cost de 3£ pe bucată. Costurile de transport reprezintă 1% pe lună, iar costul unei comenzi este de 250£/comandă. Să se calculeze CEC.

b) Care ar fi valoarea CEC dacă această companie și-ar produce singură reperele respective cu ajutorul unei mașini care ar avea un potențial de producție de 600 000 de repere pe an?

3. Cererea este de 5000 pe an. Costurile de comandă sunt de 100£ pentru fiecare comandă și prețul de bază pentru un reper este 5£. Costurile de transport sunt de 20% pe an.

Reducerile de preț posibile sunt următoarele:

1.200 – 1.399	reducere de 10%
1.400 – a.499	reducere de 15%
1.500 . și peste	reducere de 20%.

Care este cea mai economică cantitate de comandă?

Răspunsuri la exerciții:

1. Nivelul de comandă pentru completarea stocului = $710 \times 20 = 14\,200$.
   Nivelul minim $14\,200 - (560 \times 17{,}5) = 4400$.
   Nivelul maxim $14\,200 + 10\,000 - (240 \times 15) = 20\,600$.

2. $$CEC = \sqrt{\frac{2 \times 250 \times 100\,000}{3 \times 0{,}12}}$$
$$= 11\,785.$$

CEC în cazul refacerii graduale a stocului

$$= \sqrt{\frac{2 \times 250 \times 100\,000}{3 \times 0{,}12\left(1 - \frac{100\,000}{60\,000}\right)}}$$
$$= 12\,909.$$

3. $$CEC = \sqrt{\frac{2 \times 5000 \times 100}{5 \times 0{,}2}} = 1000.$$

Cantitatea de comandă	1000	1200	1400	1500
Numărul mediu de comenzi pe an	5	4,16	3,57	3,33
Economiile cu costurile de comandă	–	84	143	167
Economiile cu prețurile	–	2500	3750	5000
Costurile pentru stocurile suplimentare	–	40	95	100
Câștigul total		2544	3798	5067

∴ Comenzi de câte 1500 de repere

14. CONTROLUL STOCURILOR – STOCURILE DE SIGURANȚĂ ȘI NIVELURILE DE COMPLETARE

1. Obiective

După parcurgerea acestui capitol:

- veți înțelege faptul că stocurile tampon sau stocurile de siguranță trebuie să fie adaptate atât variațiilor în ceea ce privește cererea și/sau variațiilor în ceea ce privește timpul de completare a stocurilor;
- veți ști cum se calculează stocul de siguranță prin tabelarea costurilor;
- veți putea calcula stocul de siguranță prin metode statistice, pentru diferite niveluri de risc;
- veți înțelege în ce mod analiza sensibilității poate fi aplicată controlului inventarului.

2. Stabilirea nivelurilor de comandă în condiții de certitudine

În cazurile în care rata cererii și timpul de completare a stocului sunt cunoscute cu certitudine, nivelul de comandă este dat de produsul dintre rata cererii și timpul de refacere a stocului. Aceasta înseamnă că, indiferent de durata timpului de refacere a stocului și de nivelul cererii, nu este necesară instituirea unui stoc-tampon. Acesta este cazul în situația care urmează.

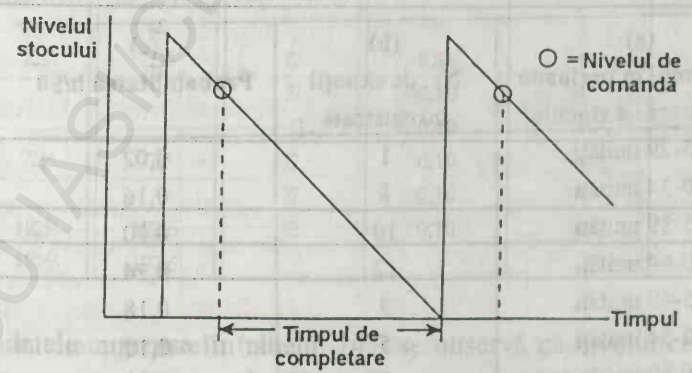


Fig. 14.1. Graficul nivelului de comandă în condiții de certitudine.

3. Relația dintre nivelul de comandă și stocul de siguranță

Din fig. 14.1 rezultă că, în condiții de certitudine, nivelul de comandă poate fi ales astfel încât stocul să fie refăcut exact în momentul în care ajunge la nivelul zero. Atunci când cererea și timpul de completare a stocului variază, nivelul de comandă trebuie ales astfel încât în medie să existe un anumit stoc-tampon disponibil, care să absoarbă variațiile cererii și/sau ale timpului de completare. În asemenea condiții, calcularea nivelului de comandă este mai convenabil să fie compusă din două părți:

a) rata normală sau medie de consum înmulțită cu timpul de completare normal sau mediu (respectiv identic cu calcularea nivelului de comandă în condiții de certitudine) *plus*

b) stocul de siguranță.

4. Calcularea stocului de siguranță prin tabelarea costurilor

Dimensiunea stocului de siguranță este reprezentată de nivelul la care costurile totale asociate stocului de siguranță au o valoare minimă. Cu alte cuvinte, totalul dintre costul de menținere a stocului și costurile legate de epuizarea stocului să fie minime. (Se va observa că aceasta este o poziție a costului similară cu cea descrisă la derivarea CEC – capitolul 13). Calculele corespunzătoare acestei situații sunt date în continuare, pe baza următorului exemplu.

Exemplul 1

O companie de electricitate utilizează un tip special de termostat care costă 5£. Comanda medie este de 800 bucăți/an, iar CEC calculată este de 200 de bucăți. Costul de întreținere a stocului este de 20%/an, iar costul determinat de epuizarea stocului a fost estimat la 2£/bucată în cazul în care aceasta nu este disponibilă. Cererea și timpul de refacere a stocului variază, dar din fericire compania a păstrat o evidență a consumului pe parcursul a 50 de timpi de refacere a stocului, după cum urmează:

Tabelul 14.1

(a) Consumul în perioada de refacere a stocului	(b) Nr. de situații înregistrate	(c) Probabilitatea b/50
25-29 unități	1	0,02
30-34 unități	8	0,16
35-39 unități	10	0,20
40-44 unități	12	0,24
45-49 unități	9	0,18
50-54 unități	5	0,10
55-59 unități	5	0,10
Total	50	1,00

Din datele tabelului 14.1 trebuie calculate nivelul de comandă și stocul de siguranță.

Soluția

Pasul 1 – Folosind valoarea medie pentru fiecare interval de pe coloana a, se va calcula consumul mediu în perioada de refacere a stocului (tabelul 14.2).

Tabelul 14.2

x	t	tx
27	1	27
32	8	256
37	10	370
42	12	504
47	9	423
52	5	260
57	5	285
	50	2.125

$$\text{Consumul mediu} = \frac{2125}{50} = 42{,}5.$$

Pasul 2 – Se calculează costurile de întreținere a stocului și costul epuizării stocului pentru diferite nivele de comandă.

Tabelul 14.3

A	B	C	D	E	F	G	H
Nivelul de comandă	Stocul de siguranță (A-42,5)	Costul de întreținere a stocului (B × 1£)	Epuizări posibile ale stocului (tab. 14.2-A)	Probabilitatea (din tab. 1)	Numărul de comenzi/an (800/200)	Costul epuizării stocului (D×E×F×2£)	Costul total (C+G)
		£				£	£
45	2,5	2,5	2	0,18	4	2,88	
			7	0,10	4	5,6	
			12	0,10	4	9,6	20,58
50	7,5	7,5	2	0,10	4	1,6	
			7	0,10	4	5,6	14,7
55	12,5	12,5	2	0,10	4	1,6	14,1
60	17,5	17,5					17,5

Din datele cuprinse în tabelul 14.3 se observă că nivelul cel mai economic de completare a stocului este de 55 bucăți. Acest nivel de comandă, pentru care se preconizează un consum mediu de 42,5 bucăți în perioada de completare a stocului,

înseamnă asigurarea unui stoc de siguranță de 12,5 bucăți, rezultat care poate fi rotunjit la 13.

5. Calcularea stocului de siguranță prin mijloace statistice

Metoda prezentată anterior de calcul a stocului de siguranță se bazează pe costuri relative de întreținere și epuizare a stocului, dar există situații în care aceste costuri, în special efectele epuizării stocului, nu pot fi estimate. În asemenea împrejurări, conducerea poate stabili un anumit nivel de risc care i se pare acceptabil și pe baza acestuia se stabilesc valorile stocului de siguranță și nivelul de comandă. De exemplu, conducerea poate să decidă că este dispusă să accepte o probabilitate de 5% ca stocul să se epuizeze.

6. Exemple de calcul al stocului de siguranță prin mijloace statistice

Exemplul 2

Utilizând datele din exemplul 1, s-a stabilit că în perioada de completare a stocului, consumul mediu este de 42,5 bucăți. Compania a aprofundat și mai mult analiza, stabilind că acest consum mediu în perioada de completare a stocului este format din consumul mediu (C), care este de 3,162 bucăți pe zi, pe o durată medie estimată pentru completarea stocului de (R) de 13,44 zile. Atât cererea cât și timpul de completare a stocului pot varia, iar compania a estimat că deviația standard a consumului (s_p) este de 0,4 bucăți, iar deviația standard a timpului de completare a stocului (s_R) este 0,75 zile. Compania este gata să accepte un risc de 5% de epuizare a stocului și dorește să știe care este stocul de siguranță necesar în următoarele trei împrejurări:

a) atunci când cererea variază, timpul de completare a stocului fiind constant;

b) atunci când timpul de completare a stocului variază, cererea fiind constantă;

c) atunci când atât cererea cât și timpul de completare a stocului variază.

În cele 3 cazuri, consumul mediu *este* C × R, *respectiv 3,162 × 13,44 = 42,5 bucăți.*

Soluția

a) Stocul de siguranță în condițiile unei cereri variabile și a unui timp de completare a stocului constant.

Din tabelul suprafețelor normale se observă că 5% din suprafață corespunde unei medii de +1,64σ.

∴Stocul de siguranță = 1,64 × deviația standard a cererii pentru 13,44 zile

$$= 1{,}64 \times (0{,}4 \times \sqrt{13{,}44})$$

$$= 2{,}40.$$

Notă. Deviația standard a cererii zilnice, respectiv 0,4 se înmulțește cu $\sqrt{13{,}44}$ deoarece deviația standard este o mărime care nu posedă proprietatea de aditivitate.

b) Stocul de siguranță în condițiile unui interval constant de timp pentru refacerea stocului și a unui consum constant.

∴ Stocul de siguranță = 1,64 × deviația standard a timpului de completare a stocului pentru o cerere de 3,162

= 1,64 × (0,75)

= 1,23.

c) Este o combinație a punctelor a) și b), reprezentând suma stocurilor de siguranță deja calculate:

= 2,40 + 1,23

= 3,63.

Notă:

a) Calcularea stocurilor de siguranță pe baza nivelurilor de risc este cea mai frecvent întâlnită.

b) Atunci când timpul de completare a stocului și cererea sunt variabile, poate să devină costisitoare menținerea unui stoc de siguranță suficient pentru riscuri reduse de epuizare a acestuia.

Exemplul prezentat pornește de la proprietățile distribuției normale și a valorilor obținute din tabelul suprafețelor normale. Aceasta nu este decât o altă aplicație a principiilor statistice acoperite anterior în această lucrare prin utilizarea distribuțiilor probabilistice continue. Probabilitățile discrete și valorile preconizate pot fi folosite de asemeni pentru a încorpora variabilele.

7. Controlul stocurilor și analiza sensibilității

Atunci când se calculează o valoare referitoare la controlul stocurilor, ca de exemplu CEC, nivelul de comandă, costul total pentru întreținerea unui stoc etc., conducerea dorește să știe cât de sensibile sunt valorile obținute la variațiile diferiților factori utilizați în aceste calcule.

De exemplu, cât de mult este afectată CEC de modificările costurilor de comandă? Procesul prin care se realizează această analiză se numește *analiza sensibilității*. Următorul exemplu ilustrează o analiză tipică.

Exemplul 3

Compania Henderson Ltd. a făcut următoarele estimări referitoare la un reper pe care îl folosesc în procesul tehnologic:

Consumul anual 1,125.

Costul de comandă 50£ /comandă.

Costurile de transport/an 5£ pentru fiecare reper.

Pe baza acestor estimări, s-au calculat valori de 150 pentru CEC și costuri totale estimate cu stocul respectiv de 750£/an, după cum urmează:

$$CEC = \sqrt{\frac{2 \times 50 \times 1125}{5}} = 150.$$

Costurile totale legate de întreținerea stocului = costul/comandă · an +
+ costul de întreținere a stocului/an

$$= \left(\frac{1.125}{150}\right) \times 50£ + \frac{5£ \times 150}{2} = 750£.$$

În cursul unui an a fost folosită valoarea de 150 a CEC pentru comanda de completare a stocului, dar consumul real al acestui reper s-a dovedit a fi mai mare cu 20%, respectiv 1350 repere/an.

a) Să se calculeze costul total real al stocului.

b) Să se calculeze care ar fi fost costul total al stocului dacă s-ar fi folosit o valoare corectă pentru CEC.

c) Să se afle cât de sensibile sunt costurile totale la erorile în estimarea consumului.

Soluția

a) Costul total real al stocului $= \left(\frac{1350}{150}\right) \times 50£ + \frac{5 \times 150}{2} = 825£.$

b) CEC corectă $= \sqrt{\frac{2 \times 50 \times 1.350}{5}} = 164.$

Costul total pentru valoarea de 164 a CEC $= \left(\frac{1350}{164}\right) \times 50£ + \frac{5£ \times 164}{2} = 822£.$

c) Prin urmare, folosirea în estimări a valorii incorecte a CEC de 150 a determinat o creștere a costului cu 3£.

Aceasta înseamnă că o creștere cu 20% a cererii a determinat o creștere de numai 0,5% a costurilor totale. Putem concluziona că costurile totale nu sunt sensibile la erorile în aprecierea cererii.

Din punctul de vedere al conducerii este foarte bine așa. Practic, acest lucru înseamnă că atunci când se strecoară erori în estimări, ceea ce este foarte posibil de altfel, rezultatul final nu este afectat în mod semnificativ.

8. Rezumat

a) Stocurile de siguranță sunt necesare datorită variațiilor care apar fie în ceea ce privește cererea, fie în ceea ce privește timpul de completare a stocului.

b) Nivelul de completare a stocului este dat de suma dintre timpul mediu de completare a stocului și stocul de siguranță.

c) Nivelul stocului de siguranță poate fi stabilit prin compararea costurilor asociate unui stoc de siguranță cu costurile implicate de epuizarea stocului, pentru diferite niveluri de comandă pentru completarea acestuia.

d) Atunci când este necesar să se calculeze nivelul stocului de siguranță pentru a corespunde unui risc de epuizare a stocului cunoscut se pot folosi metode statistice, pornind de la suprafețele de sub curba normală.

e) Mediile și deviațiile standard ale cererii și timpului de completare a stocului trebuie calculate sau estimate, iar numărul deviațiilor standard trebuie corelat cu nivelul de risc acceptat care se adaugă cererii medii și/sau timpului mediu de completare a stocului; aceasta înainte de a le înmulți pentru a stabili nivelul de comandă pentru completarea stocului și implicit stocul de siguranță.

9. De reținut

a) Acest capitol se referă la efectele nesiguranței (respectiv ale variabilității) asupra controlului stocurilor. Vă amintiți de la capitolul 1 că includerea riscului și a incertitudinii constituie o parte importantă a cercetării operaționale. Așa cum am menționat anterior, modelele care nu includ un coeficient de incertitudine sunt modele stohastice.

b) Deși unele tehnici de cercetare operațională au o aplicare practică redusă, acest fapt nu mai este valabil și în cazul controlului inventarului.

Întrebări de autocontrol. *Numerele dintre paranteze se referă la numerotarea paragrafelor.*

1. Cum se stabilește nivelul de completare a stocului atunci când cererea și timpul de completare a stocului sunt cunoscute cu certitudine? (2)
2. De ce este esențială stabilirea stocurilor de siguranță pentru exercițiul balanței de costuri? (4)
3. Care sunt costurile corecte care trebuie luate în considerare în stabilirea unui nivel corespunzător pentru stocul de siguranță? (4)
4. Cum pot fi estimate stocurile de siguranță dacă toate costurile asociate sunt necunoscute? (5 și 6)

Exerciții cu răspunsuri

1. O companie utilizează 2.000 de repere pe an, la un preț de cost de 6£/reper. Costurile de întreținere a stocului sunt de 2£/reper/an, iar costurile asociate epuizării stocului sunt de 3£ pentru fiecare reper care nu se mai află în stoc. Valoarea CEC este 500, iar cererea este variabilă, după cum urmează:

Consumul în perioada de refacere a stocului	Probabilitatea
80	0,2
90	0,5
100	0,3

Care este nivelul cel mai economic de comandă: 90, 95 sau 100?

2. Cererea pentru un anumit reper este distribuită în mod normal într-o medie de 50 de bucăți /zi, cu o deviație standard de 5 bucăți. Dacă timpul de completare a stocului este de 20 de zile, se cere să se calculeze nivelul de comandă și stocul de siguranță pentru a face față unei proporții de 90% din cereri.

Răspunsuri la exerciții

1. Consumul estimat = $(80 \times 0{,}2) + (90 \times 0{,}5) + (100 \times 0{,}3) = 91$.

Tabelarea costurilor

Nivelul de comandă	Stocul de siguranță	Costul de întreținere a stocului £	Lipsuri	*P*	Nr. de comenzi /an	Costul legat de numărul de repere lipsă + costurile de întreținere a stocului	£
90	1	2	1	0,5	4	$1 \times 0{,}5 \times 3 \times 4 + 2$ =	8
			9	0,3	4	$9 \times 0{,}3 \times 3 \times 4 + 2$ =	34,4
						=	42,4
95	4	8	5 ×	0,3	4	$5 \times 0{,}3 \times 3 \times 4 + 8$ =	26
100	9	18	–			=	18

∴100 este valoarea CEC.

2. Cererea medie în perioada de refacere a stocului = $50 \times 20 = 1000$.

∴Stocul de siguranță având în vedere că 10% din suprafață este deasupra mediei + $1{,}286\sigma$

$= 1{,}28 \times 5 \times \sqrt{20}$

$= 28{,}62$.

Nivelul de comandă pentru refacerea stocului este de 1028,62.

Notă. O metodă alternativă de a rezolva problemele legate de variabilitatea cererii constă în combinarea variațiilor cererii.

d.s. a cererii = 5 ∴= $5^2 = 25$

∴variația cererii în perioada de completare a stocului = 20 x 25 = 500

∴d.s. a cererii în perioada de completare a stocului = $\sqrt{500} = 22{,}36$

∴Stocul de siguranță pentru un coeficient de certitudine de 90% = 1,28 × 22,36 = 28,62, valoare identică celei calculate anterior.

15. SIMULAREA

1. Obiective

După parcurgerea acestui capitol:
- veți putea defini simularea și veți ști când este utilizată;
- veți ști ce se înțelege prin model și cum sunt dezvoltate modelele;
- veți ști care sunt carcateristicile simulării Monte Carlo;
- veți putea descrie variabilele tipice utilizate în simulare;
- veți putea construi un model pentru simulare;
- veți ști care sunt avantajele și dezavantajele simulării.

2. Definiția simulării

Simularea este procesul de experimentare sau de utilizare a unui model și de notare a rezultatelor obținute. Într-un context de afaceri, procesul experimentării pe bază de model constă în general în introducerea în modelul respectiv a unor valori inițiale și în notarea și observarea valorilor care rezultă. De exemplu, în simularea unui rând, valorile inițiale care se introduc pot fi reprezentate de numărul de sosiri și/ sau puncte de servire, iar valorile rezultate pot fi reprezentate de numărul și de timpii de așteptare la rândul respectiv.

3. De ce se folosește simularea?

Simularea este utilizată în cazurile în care nu sunt accesibile tehnicile analitice sau în cazurile în care aplicarea acestora ar fi extrem de complicată Exemplele tipice din lumea afacerilor sunt: majoritatea sistemelor de așteptare, altele decât cele foarte simple, problemele de control al inventarului, problemele de planificare a producției, planificarea la nivelul corporațiilor etc. Simularea asigură adesea o privire de ansamblu asupra problemei, care nu ar putea fi obținută prin alte mijloace. Prin intermediul simulării, se poate urmări de-a lungul unei perioade de timp comportamentul unui sistem și numai prin intermediul acestui model timpul poate fi comprimat.

Astfel, de exemplu, simularea performanțelor unui sistem de evidență a inventarului pe o perioadă de 30 de luni poate fi realizată, cu ajutorul computerului, în tot atâtea minute. În plus, analistul poate manipula sau experimenta pe baza modelului după dorință. De exemplu, se poate modifica frecvența soluțiilor și a problemelor, regulile de decizie cu care se conduc nivelurile de comandă pentru refacerea stocurilor, precum și cantitățile pe care le implică acest proces și așa mai departe, pentru a observa efectele pe care aceste modificări le au asupra sistemului care este supus simulării sau imitării. Fundamental pentru simulare este conceptul de *model.*

4. Modele de afaceri

Modelul este o reprezentare (fizică sau abstractă) a unui obiect, unei situații sau oportunități reale. Modelele fizice, cum ar fi machetele de avioane pentru testele în tunelele aerodinamice, machetele capsulelor spațiale, machetele utilizate în arhitectură sunt binecunoscute, dar pentru scopurile planificării de afaceri și ale luării deciziilor, asemenea modele sunt rareori adecvate. În schimb, în aceste domenii sunt folosite în general *modelele simbolice.* Acestea sunt modele care reprezintă realitatea în formă numerică, algebrică sau grafică. Cele mai utile modele pentru simularea de afaceri sunt modelele discrete. Acestea sunt modele care fac posibil ca sistemul care este simulat să fie observat sau secționat pe intervale de timp la alegere. Astfel, o simulare a inventarului poate să arate nivelurile zilnice ale stocurilor. În mod asemănător, modelele de simulare a rândurilor de așteptare la casele de marcat ale supermarketurilor pot folosi intervale de cinci minute pentru verificarea performanțelor. Intervalul ales trebuie să fie adecvat realității operaționale a sistemului care este simulat.

5. Construcția modelelor

Succesul unui exercițiu de simulare este strâns legat de calitatea predicțională a modelului pe baza căruia este efectuat și de aceea o atenție deosebită trebuie acordată construcției modelului. *Factorii* cei mai importanți ai dezvoltării modelului sunt:

a) *Orientarea* în direcția obiectivului. Modelul trebuie să fie construit cu un scop definit, iar rezultatele obținute pe acest model trebuie corelate cu acest scop.

b) *Variabilele critice și relațiile dintre ele.* Construcția modelelor este un proces creator având drept scop identificarea acelor variabile și a relațiilor dintre ele, care trebuie incluse în mod obligatoriu în model. Nu este nici esențial și nici de dorit ca modelul să conțină totalitatea variabilelor din realitate.

c) *Simplismul.* Cel mai bun model este cel mai simplu model care are calitățile predicționale adecvate scopului pentru care a fost creat.

d) *Implicarea manageriatului.* Pentru a putea construi modele foarte bune, trebuie să existe o înțelegere foarte profundă a operațiunilor reale. Numai nivelul managerial, de conducere, posedă aceste informații, astfel încât este necesară implicarea acestei verigi în construcția modelului. Dacă construcția modelului este lăsată exclusiv pe seama cercetătorului operațional sau a specialiștilor în computere, pot rezulta modele supraelaborate și sofisticate, care să nu reprezinte, în mod necesar, realitatea.

e) *Dezvoltarea modelului.* Dacă un anumit model urmează să fie folosit nu numai o singură dată, cum ar fi cazul planificărilor la nivelul corporațiilor, care sunt utilizate cel puțin o dată pe trimestru, trebuie avut în vedere să se opereze modificări și perfecționări ale caracteristicilor modelului inițial, astfel încât el să oglindească în continuare realitatea.

Fig. 15.1 vă oferă o imagine de ansamblu a dezvoltării și utilizării unui model.

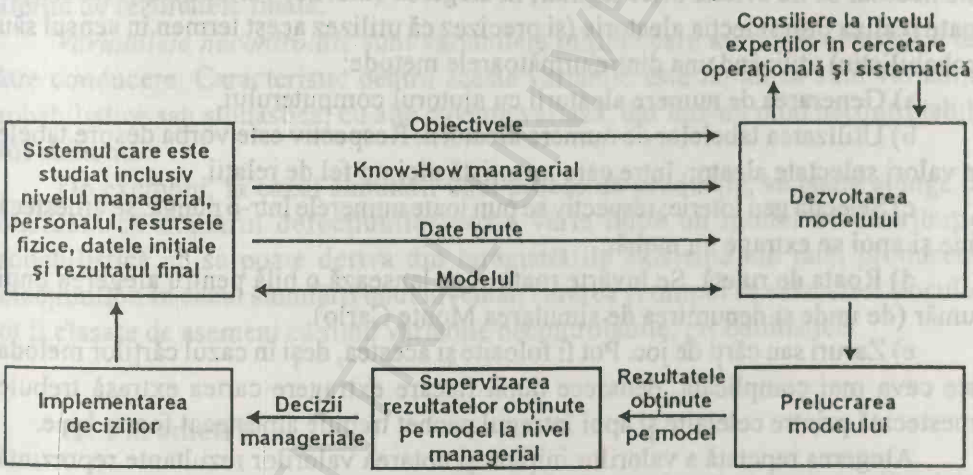


Fig. 15.1. Dezvoltarea și utilizarea modelului.

6. Aprecierea calităților unui model

Modelele reprezintă, așadar, reprezentări inteligente ale realității și nu există nici o metodă pentru a demonstra că un anumit model vă poate oferi cele mai bune predicții în circumstanțe necunoscute. Cu toate acestea, se dezvoltă multe modele în scopul de a ajuta la estimarea rezultatelor în cazul în care o operație existentă deja este dezvoltată sau atunci când i se repartizează sarcini suplimentare. În asemenea circumstanțe, la construcția modelului, sunt introduse valori care corespund nivelurilor operaționale curente și se calculează valorile rezultante. Dacă aceste valori corespund situației existente, înseamnă că există condiții obiective pentru a considera că modelul constituie o reprezentare corectă a realității.

7. Simularea Monte Carlo

Orice problemă de afaceri realistă conține caracteristici probabilistice sau aleatorii, cum ar fi: numărul mediu zilnic de cumpărători dintr-un magazin este de circa 80, dar este de așteptat ca graficul zilnic să fie foarte variabil. În cazul unui exercițiu de planificare la nivel de corporație, estimările vânzărilor vor varia, în mod evident, în funcție de o serie de circumstanțe etc. Deoarece modelul trebuie să se comporte asemănător sistemului aflat sub observație, modelul trebuie să conțină aceste elemente probabilistice. Simulările care implică asemenea elemente aleatorii sunt denumite uneori *simulări Monte Carlo*.

8. Selecția aleatorie

Pentru a putea realiza o simulare realistă implicând elemente probabilistice, este necesar să fie evitate orice legături în alegerea valorilor variabilelor. Aceasta se poate realiza prin selecția aleatorie (și precizez că utilizez acest termen în sensul său probabilistic) utilizând una dintre următoarele metode:

a) Generarea de numere aleatorii cu ajutorul computerului.

b) Utilizarea tabelelor de numere aleatorii. Respectiv este vorba despre tabele de valori selectate aleator, între care nu există nici un fel de relații.

c) Selecția gen loterie; respectiv se pun toate numerele într-o pungă, se amestecă bine și apoi se extrage un număr.

d) Roata de ruletă. Se învârte roata și se lansează o bilă pentru alegerea unui număr (de unde și denumirea de simularea Monte Carlo).

e) Zaruri sau cărți de joc. Pot fi folosite și acestea, deși în cazul cărților metoda este ceva mai complicată, deoarece după fiecare extragere cartea extrasă trebuie amestecată printre celelalte și apoi întregul pachet trebuie amestecat foarte bine.

Alegerea repetată a valorilor inițiale și notarea valorilor rezultante reprezintă însăși esența simulării. În acest mod, se poate ajunge la formarea unei impresii asupra modelului celui mai probabil de rezultate, astfel încât decizia să poată fi luată în cunoștință de cauză.

Notă. Ca orice simulare operațională, și în acest caz se folosește computerul, metoda a fiind de departe cea mai larg utilizată.

9. Variabilele unui model de simulare

Un model de afaceri constă, în general, din serii de ecuații și de formule care sunt astfel aranjate, încât să se poată „comporta" într-o manieră similară cu sistemul real care constituie de fapt obiectul studiului. Formulele și ecuațiile conțin un număr de factori sau variabile care pot fi clasificate în 4 grupe:

a) *variabile inițiale sau exogene;*
b) *parametri;*
c) *variabile de stare;*
d) *variabile rezultante sau endogene.*
Toate aceste variabile sunt descrise în continuare.

10. Variabilele inițiale sau exogene

Aceste variabile sunt de două tipuri - *controlabile și necontrolabile.*

Variabilele controlabile sunt variabile care pot fi controlate de către conducere. Schimbarea valorilor inițiale ale variabilelor controlate și notarea modificărilor suferite de rezultate constituie primul pas în simulare. De exemplu, variabilele tipice controlabile în cazul simulării unui inventar pot fi reprezentate de nivelul de comandă și de cantitatea de comandă. Aceste valori pot fi modificate, notându-se apoi variația suferită de rezultatele finale.

Variabilele necontrolate sunt variabilele inițiale care nu pot fi controlate de către conducere. Caracteristic pentru aceste variabile este faptul că sunt variabile probabilistice sau stohastice, cu alte cuvinte variază, dar într-un mod necontrolabil, probabilistic.

De exemplu, în cazul simulării unui proces de producție, se poate ajunge la concluzia că numărul defecțiunilor poate varia după un model de distribuție probabilistică ce se poate deriva din înregistrările existente ale ratei producerii defecțiunilor. În cazul simulării unui inventar, cererea și timpul de refacere a stocului pot fi clasate de asemeni ca fiind variabile necontrolabile, probabilistice.

11. Parametrii

Aceștia sunt de asemenea variabile inițiale dar au, în cazul unei simulări date, valori constante. Parametrii sunt factori care ajută la explicitarea relațiilor dintre alte tipuri de variabile. De exemplu, în cazul simulării unui proces de producție, parametrul sau constanta poate fi reprezentată de timpul afectat în mod obișnuit întreținerii periodice; în cazul simulării unui inventar, un parametru ar putea fi costul asociat epuizării stocului.

12. Variabilele de stare

În unele tipuri de simulări, comportamentul sistemului (rate, consumuri, viteze, cereri și așa mai departe) variază nu numai în funcție de caracteristicile individuale dar și în funcție de starea generală a sistemului la diferite momente de timp sau în funcție de anotimpuri. De exemplu, în cazul simulării cererii de marfă în cadrul unui

supermarket și a mărimii rândurilor de așteptare la casele de marcat, cererea este o variabilă probabilistică în oricare zi a săptămânii, în timp ce nivelul general al cererii va fi puternic influențat de ziua săptămânii și de anotimpul anului. Variabilele de stare sunt necesare pentru a putea specifica ziua (zilele) sau anotimpul (anotimpurile) la care se referă simularea.

Notă. Ocazional, variabilele de stare și parametrii pot fi numiți parametri, deși există diferențe clare între aceste două concepte.

13. Variabilele rezultante sau endogene

Aceste variabile reprezintă, de fapt, rezultatul simulării. Ele rezultă din calculele și testele efectuate pornindu-se de la model, de la valorile inițiale sau exogene, controlate și necontrolate, de la valorile derivate pentru elementele probabilistice, de la parametrii specificați și de la valorile de stare. Variabilele rezultante trebuie alese cu foarte mare atenție, pentru a reflecta factorii a căror intervenție este critică pentru sistemul real care a fost simulat și trebuie să se coreleze foarte bine cu obiectivele sistemului real. De exemplu, variabilele rezultante în cazul simulării unui inventar trebuie să cuprindă obligatoriu:

- costul întreținerii stocului;
- numărul ocaziilor în care s-a ajuns la epuizarea stocului;
- numărul de comenzi neonorate din cauza epuizării stocului;
- numărul de comenzi de completare a stocului;
- costul unei comenzi de completare a stocului și așa mai departe.

14. Construcția unui model pentru simulări

În continuare voi enumera câteva linii generale necesare pentru construcția unui model de simulare. Acestea vă vor fi utile, bineînțeles, în cursul examinărilor în fața unei comisii profesionale, dar mai ales în practică, deoarece nu trebuie uitat faptul că în acest domeniu aspectul practic este de importanță vitală.

Pasul 1. Se identifică obiectivul (obiectivele) simulării. Se face o listă detaliată a rezultatelor care se așteaptă de la simularea care se pregătește, pentru a vă facilita clarificarea pasului 5 - variabilele rezultante.

Pasul 2. Se identifică variabilele inițiale. Trebuie să se facă distincția între variabilele controlate și variabilele necontrolate.

Pasul 3. În cazurile în care acest lucru se poate dovedi necesar, se va determina distribuția probabilistică pentru variabilele necontrolabile.

Pasul 4. Se identifică toți parametrii și variabilele de stare.

Pasul 5. Se identifică variabilele rezultante la care se dorește să se ajungă.

Pasul 6. Se determină principiile logice care trebuie să conducă modelul.

Această succesiune de pași reprezintă baza construirii modelului. Întrebările cheie sunt:

– cum se transformă variabilele inițiale în variabile rezultante?
– ce formule/reguli de luare a deciziilor se cer?
– cum se va putea lucra cu elementele probabilistice?
– cum trebuie prezentate rezultatele?

Pentru a ilustra acești pași, vom exemplifica pe o problemă căreia îi vom da soluția folosind rezolvarea în șase pași care a fost prezentată anterior.

15. O simulare simplă de stoc

Exemplul 1

Un angrosist are un stoc de repere pentru care cererea este nesigură. El dorește să decidă între două politici de comandă pentru refacerea acestui stoc, respectiv care politică este mai economică pe perioade de zece zile: să comande câte 10 unități la un nivel de comandă de 10 unități sau să comande câte 15 unități la un nivel de comandă de 15 unități.

Se dau următoarele date:

Cererea zilnică (unități)	Probabilitatea
4	0,10
5	0,15
6	0,25
7	0,30
8	0,20

Costurile de transport sunt de 15£/unitate/zi. Costul de comandă este se 50£/comandă. Pierderea determinată de imposibilitatea onorării comenzilor, calculată pentru fiecare unitate este de 30£. Timpul de completare a stocului este de 3 zile. Stocul de pornire este de 17 unități.

Distribuția probabilistică se va baza pe următoarele numere aleatorii:

41	92	05	44	66	07	00	00	14	62
20	07	95	05	79	95	64	26	06	48

Notă. *nivelul de comandă pentru completarea stocului reprezintă suma dintre valoarea stocului fizic și comenzile de completare a stocului emise, care urmează să fie primite.*

Soluția

Pasul 1. Obiectivele simulării

Pentru simularea comportamentului celor două politici de comandă pentru

completarea stocului – o comandă de 15 la un nivel de comandă de 15 unități sau o comandă de 10 la un nivel de comandă de 10 unități – se urmărește să se stabilească cea mai ieftină posibilitate.

Pasul 2. Identificarea variabilelor inițiale.

Variabilele controlabile:

– cantitatea comandată;

– nivelul de comandă.

Variabilele necontrolabile:

– cererea probabilistică.

Pasul 3. Determinarea distribuției probabilistice.

Numerele aleatorii se vor aloca cererii după cum urmează:

Cererea	Probabilitatea	Probabilitatea cumulată	Numerele aleatorii
4	10%	10%	00 – 09
5	15%	25%	10 – 24
6	25%	50%	25 – 49
7	30%	80%	50 – 79
8	20%	100%	80 – 99

Cele două liste de numere aleatorii care apar în datele problemei pot fi folosite pentru a realiza două rulări ale simulării, în care fiecare pereche de cifre este utilizată pentru a simula o cerere. De exemplu, în cazul simulării politicii de comandă de 15 unități, primele două cifre, 41, reprezintă o cerere de 6 unități în ziua 1. Următoarele două cifre, 92, dau o cerere de 8 unități în ziua 2 și așa mai departe.

Pasul 4. Identificarea parametrilor și a variabilelor de stare

Parametri	
Stocul de pornire	17 unități
Costurile de transport	15£/unitate/zi
Costurile de comandă	50£/comandă
Pierderile determinate de epuizarea stocului	30£
Timpul de completare a stocului	3 zile

Nu există nici o variabilă de stare care să rezulte din datele problemei.

Pasul 5. Identificarea variabilelor rezultante.

Principala variabilă rezultantă trebuie să fie costul total. Dintre variabilele rezultante care vor fi obținute în urma simulării fac parte:

- Numărul de comenzi

- Numărul de cazuri de epuizare a stocului
- Costul epuizării stocului
- Costul total de transport
- Costul total de comandă

Pasul 6. Determinarea principiilor logice care trebuie să conducă modelul.

În cazul acestui exemplu, principiile logice și regulile care trebuie aplicate nu reprezintă altceva decât elementele de bază ale controlului inventarului și anume:

Nivelul de comandă	= stocul fizic + comenzile de completare a stocului care urmează să fie primite
Stocul de închidere	= stocul de deschidere – cererea
Costul zilnic pentru transport	= stocul × 30£/unitate
Costul total	= costurile implicate de pierderea comenzilor prin epuizarea stocului + costurile de transport + costurile de comandă

Informațiile, valorile și regulile sunt utilizate în continuare pentru a simula cele două politici de comandă. Rezultatele acestor simulări sunt prezentate în tabelele 15.1 și 15.2, din care se poate trage concluzia că politica simulată de comandă a unei cantități de 15 unități este mai economică decât politica simulată de comandă a unei cantități de 10 unități pentru un interval de 10 zile.

Tabelul 15.1.

Rezultatele simulării pentru o cantitate comandată și un nivel de comandă pentru completarea stocului, de 15 unități

Ziua	Stocul de deschidere	Cererea	Stocul la închidere	Costurile de comandă	Costurile de transport	Costurile epuizării stocului	Costurile totale
1	17	6	11	50£	165£		215£
2	11	8	3		45£		45
3	3	4	–		–	30£	30
4	+15	6	9	50£	135£		185
5	9	7	2		30£		30
6	2	4	–		–	60£	60
7	+15	4	11	50£	165£		215
8	11	4	7		105£		105
9	7	5	2		30£		30
10	+15 +2	7	10	50£	150£		200
				200£	825£	90£	1115£

Note la tabelul 15.1:

• Cererea zilnică poate fi aflată prin utilizarea numerelor aleatorii din paragraful 15 (respectiv 41, 92, 05 etc.) pe baza cărora se stabilește cererea simulată prin alocarea probabilistică prezentată anterior la pasul 3. Astfel, 41 intră în grupul cuprins între 29-49, corespunzând unei cereri de 6 unități, iar 92 intră în grupul cuprins între 80-99, corespunzând unei cereri de 8 unități și așa mai departe.

• Comanda de 15 unități trebuie emisă ori de câte ori suma dintre stocul fizic și comenzile în curs de livrare este mai mică de 15. Aceasta situație, așa cum se poate observa din tabel apare în zilele 1, 4, 7, și 10.

Tabelul 15.2

Rezultatele simulării pentru o cantitate comandată și un nivel de comandă pentru refacerea stocului de 10 unități

Ziua	Stocul de deschidere	Cererea	Stocul la închidere	Costurile de comandă	Costurile de transport	Costurile epuizării stocului	Costurile totale
1	17	5	12		£180		£180
2	12	4	8	£50	120		170
3	8	8	–		–	–	–
4	–	5	–		–	£150	150
5	+10	7	3	50	45		95
6	3	8	–		–	150	150
7	–	7	–		–	210	210
8	+10	6	4	50	60		110
9	4	4	–		–		–
10	–	6	–		–	180	180
				£150	£405	£690	£1.245

16. Alte exemple de simulări

O aplicație des întâlnită a simulării constă în examinarea comportamentului rândurilor de așteptare în condițiile în care nu este posibilă aplicarea formulelor pentru rânduri. Următorul exemplu este tipic pentru aceste simulari.

Exemplul 2

Se proiectează o stație de alimentare cu carburanți și se cere să se afle câți vânzători vor fi necesari pentru a mări la maximum câștigurile. Din studiile de trafic s-a preconizat probabilitățile de apariție a cumpărătorilor cuprinse în următorul tabel:

Probabilitatea ca nici un cumpărător să nu apară într-un minut 0,72
Probabilitatea de apariție a unui cumpărător într-un minut 0,24
Probabilitatea de apariție a 2 clienți într-un minut 0,03
Probabilitatea de apariție a 3 clienți într-un minut 0,01

Din experiența anterioară s-a estimat că timpul afectat servirii unui client variază conform următorului tabel:

Durata servirii unui client ,minute	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probabilitatea	0,16	0,13	0,12	0,10	0,09	0,08	0,07	0,06	0,05	0,05	0,05	0,04

Atunci când există mai mult de un singur client în așteptare, în afara celor care sunt serviți, persoanele care mai apar trec mai departe și sunt pierdute ca clienți.

Un vânzător de la o pompă de benzină este plătit cu 20£/8 ore, iar venitul estimat de pe urma fiecărui client este de 2£.

Câți vânzători sunt necesari?

Soluția

Pasul 1. Obiectivele simulării

Găsirea numărului de vânzători adecvat pentru mărirea la maximum a câștigurilor.

Pasul 2. Variabilele inițiale

Controlabile — Numărul de clienți

Necontrolabile — Rata sosirii clienților

Durata servirii

Pasul 3. Distribuția probabilistică

Ca și mai înainte, se folosește un tabel de numere aleatorii (tabelul 15.3) din care prezentăm mai jos un extras.

Tabelul 15.3

5053225496	9565241457	7354776952	2149630416	5579018342
7245174840	2275698645	8416549348	4676463101	2229367983
6749420382	4832530032	5670984959	5432114610	2966095680
7164238934	7666237259	5263097712	9999089966	7544056852
4192054466	0700014629	5169439659	8408705169	1074373131
9697426117	6488888550	4031652526	8123543276	0927534537
2007950579	9564268448	3457415998	1531027886	7016633739
4584768758	2389278610	3859431781	3643768456	4141314518
3840145867	9120831830	7228567652	1267173884	4020651657

Modelul estimat de sosire a clienților este reprodus în continuare împreună cu numerele aleatorii asociate.

		Numere aleatorii asociate
Probabilitatea ca nici un client să nu apară într-un minut	= 0,72	01 - 72
Probabilitatea de apariție a unui client într-un minut	= 0,24	73 - 96
Probabilitatea de apariție a 2 clienți într-un minut	= 0,03	97 - 99
Probabilitatea de apariție a 3 clienți într-un minut	= 0,01	00

În mod similar, pentru modelul serviciilor vom aloca următoarele numere aleatorii după cum urmează:

Timpul de servire, în minute	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probabilitatea	0,16	0,13	0,12	0,10	0,09	0,08	0,08	0,06	0,05	0,05	0,05	0,04
Nr. aleatorii alocate	01-16	17-29	30-41	42-51	52-60	61-68	69-75	76-81	82-86	87-91	92-96	97-00

Tabelul de numere aleatorii poate fi citit în orice direcție, pe grupe de câte două cifre și, în funcție de aceste cifre, se alege modelul corespunzător de sosire a clienților sau timpul de servire.

De exemplu, să presupunem că pentru modelul sosirii clienților, tabelul 15.4 este citit de la stânga la dreapta începând de la primul rând.

Tabelul 15.4

Nr. de minute	Perechile de cifre aleatorii din tabel	Nr. de sosiri
1	50	0
2	53	0
3	22	0
4	54	0
5	96	1
6	95	1
7	65	0
8	24	0
9	14	0
10	57	0
11	73	1
12	54	0
13	77	1
14	69	0
15	52	0
16	21	0
17	49	0
etc.		0

Pornind de la această premiză se poate face o selecție pe durata de, să spunem, o săptămână, obținând astfel o selecție aleatorie care reflectă estimarea probabilităților.

Pasul 4. Parametrii

Costul pentru fiecare vânzător pe zi 20£.

Câștigul mediu pe fiecare client 2£.

Pasul 5. Variabilele rezultante

Câștigul mediu zilnic.

Costul zilnic al vânzătorilor.

Numărul de clienți care nu pot fi serviți.

Pasul 6. Determinarea principiilor logice care trebuie să guverneze modelul.

În acest caz, raționamentul este reprezentat prin diagrama din fig. 15.2, rezultatele simulării fiind notate în tabelul din tabelele 15.5 și 15.6.

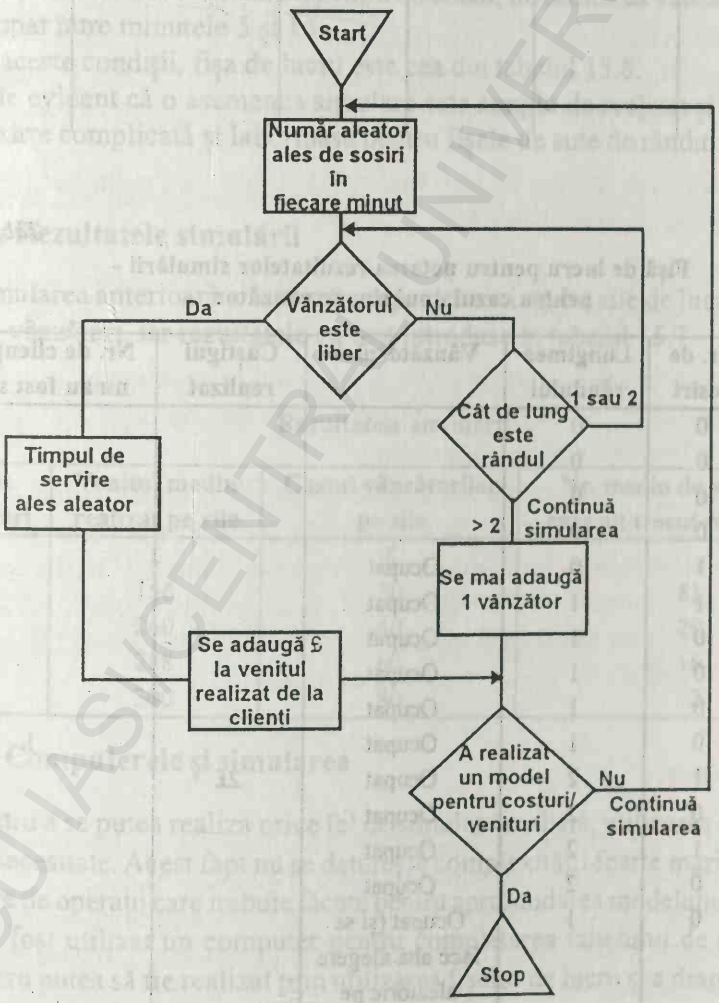


Fig. 15.2. Principiile logice care guvernează simularea - exemplu.

BCU IASI CENTRU UNIVERSITAR LIBRARY

Rezultatele unui asemenea proces de simulare pot fi introduse pe o fișă de lucru simplă, după cum urmează:

Tabelul 15.5

Fișă de lucru pentru notarea rezultatelor simulării - pentru exemplul 2

Minutul	Nr. de sosiri	Lungimea rândului	Vânzător	Vânzător	Venitul realizat pentru fiecare client	Numărul de clienți care nu au fost serviți
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
etc.						

Tabelul 15.6

Fișă de lucru pentru notarea rezultatelor simulării - pentru cazul unui singur vânzător

Minute	Nr. de sosiri	Lungimea rândului	Vânzătorul A	Câștigul realizat	Nr. de clienți care nu au fost serviți
1	0	0			
2	0	0			
3	0	0			
4	0	0			
5	1	0	Ocupat		
6	1	1	Ocupat		
7	0	1	Ocupat		
8	0	1	Ocupat		
9	0	1	Ocupat		
10	0	1	Ocupat		1
11	1	2	Ocupat	2£	
12	0	2	Ocupat		
13	1	2	Ocupat		
14	0	2	Ocupat		
15	0	1	Ocupat (și se face altă alegere aleatorie pe unități de timp)		

După ce obiectivele, variabilele, suportul logic și toate celelalte elemente au fost stabilite, poate fi declanșată simularea pentru un număr de rânduri, fiecare reprezentând operațiile dintr-un singur minut; se va începe cu un singur vânzător, apoi se va trece la cazul cu doi vânzători, apoi trei, și așa mai departe până când se obține un model coerent pentru raporturile existente între numărul de vânzători și veniturile realizate.

Având în vedere că diagrama din fig. 15.2 este concepută pentru a oglindi situația din fiecare minut, numărul sosirilor va fi ales aleator din tabelul de numere aleatorii (tabelul 15.4). Dacă un vânzător este liber, se face o alegere aleatoare pentru timpul de servire și se notează apoi numărul corespunzător de minute în rubrica vânzătorului respectiv. De exemplu, conform tabelului 15.4, sosește un client de-abia în minutul 5. Dacă timpul mediu aleator ales pentru servirea sa a fost, să spunem, 10 minute iar simularea s-a realizat pentru un client, înseamnă că vânzătorul respectiv a fost ocupat între minutele 5 și 14.

În aceste condiții, fișa de lucru este cea din tabelul 15.6.

Este evident că o asemenea simulare este simplu de realizat și de folosit, dar devine foarte complicată și laborioasă pentru fișele de sute de rânduri.

18. Rezultatele simulării

Simularea anterioară a fost extinsă pentru mai multe zile de lucru la un număr de 1, 2, 3 vânzători, iar rezultatele au fost introduse în tabelul 15.7.

Tabelul 15.7

Rezultatele simulării

Nr. de vânzători	Venitul mediu realizat pe zile	Costul vânzătorilor pe zile	Nr. mediu de vehicule/zi care au trecut mai departe
	£	£	
1	156	20	81
2	260	40	29
3	288	60	16
4	300	80	2

19. Computerele și simularea

Pentru a se putea realiza orice fel de simulare realistă, utilizarea computerului devine o necesitate. Acest fapt nu se datorește complexității foarte mari ci numărului foarte mare de operații care trebuie făcute pentru aprofundarea modelului. În exemplul anterior a fost utilizat un computer pentru completarea tabelului de rezultate, dar același lucru putea să fie realizat prin utilizarea fișelor de lucru și a diagramei, dar cu

foarte multă răbdare. Datorită importanței pe care o au computerele în simulare, au fost dezvoltate mai multe limbaje de simulare pentru a se facilita scrierea programului și utilizarea eficientă a modelului. Pentru majoritatea calculatoarelor este disponibil un simulator de sisteme pentru scopuri generale – GPSS: General Purpose Systems Simulator – iar accesul tot mai simplu la microcomputere și la terminalele unor mașini foarte puternice face ca simularea manuală să fie cu totul depășită în practică, deși este foarte posibil să vă întâlniți cu asemenea probleme în subiectele de examen.

20. Avantajele simulării

a) Simularea poate fi aplicată în domeniile pentru care nu sunt disponibile tehnici analitice sau în cazurile în care acestea ar fi foarte complexe.

b) Construirea modelului trebuie să cuprindă inevitabil nivelul de conducere al firmei, companiei etc., acest fapt favorizând o aprofundare mai bună a problemei.

c) Un model bine construit face posibil ca rezultatele unei varietăți foarte mari de politici și decizii manageriale să fie examinate fără a fi obligatorii nici un fel de angajamente.

d) Simularea are un preț de cost mai redus și este mai puțin riscantă decât modificarea din mers a unui sistem real.

21. Dezavantajele simulării

a) Deși toate modelele sunt simplificări ale realității, este posibil ca acestea să fie destul de complexe, necesitând un consum important de timp, atât la nivelul managerial cât și la nivelul tehnic de concepție.

b) Simularea practică impune utilizarea inevitabilă a computerelor, fapt care se poate dovedi un handicap pentru firmele care nu posedă aceste facilități de calcul sau nu au acces prompt la un terminal de calculator.

c) Simulările nu pot da rezultate optime. Decizia finală este luată de către manager după ce acesta analizează un număr de politici alternative. De asemeni, există posibilitatea să nu fie selectată politica optimă.

22. Rezumat

a) Simularea este procesul de experimentare pe un model, facilitând examinarea rezultatelor diferitelor politici care pot fi adoptate la un moment dat.

b) La baza simulării stă conceptul de model. Modelul este orice reprezentare a realității, iar modelele de afaceri pot lua forma diagramelor, a fișelor de lucru, formulelor, ecuațiilor etc.

c) Modelul trebuie să reflecte realitatea, iar realitatea implică în mod inevitabil variabile și elemente probabilistice. Simulările practice trebuie să includă aceste variații, tipul acesta de simulare fiind cunoscut sub denumirea de simularea Monte Carlo.

d) Datorită caracterului său de trecere în revistă, pentru realizarea unei simulări cât mai complete este necesară utilizarea computerului în toate problemele practice.

23. De reținut

a) Simularea are multe aplicații potențiale în: domeniul afacerilor, problemele legate de rândurile de așteptare, raționalizarea capitalului și analiza investițiilor, planificarea la nivelul corporațiilor.

b) Deoarece realizarea unei simulări complete este foarte cronofagă, este puțin probabil să vă confruntați cu un asemenea subiect în cazul unui examen. Însă construcția modelelor și unele întrebări generale în legătură cu aplicabilitatea simulării se încadrează foarte bine în scopurile examenelor.

Întrebări de autoevaluare. *Numerele din paranteze se referă la numerele paragrafelor.*

1. De ce la baza tehnicii simulării se află modelele? (2 până la 4)
2. Care sunt factorii principali care trebuie avuți în vedere la construcția unui model? (5)
3. Care este caracteristica principală a simulării Monte Carlo? (7)
4. Ce tipuri de variabile pot fi întâlnite în modelele de simulare? (de la 9 până la 13)
5. Care sunt pașii în construcția unui model pentru simulare? (14)
6. Care este rolul computerelor în realizarea simulărilor? (18)
7. Care sunt avantajele și dezavantajele simulării? (19 și 20)

BCU IASI CENTRALA UNIVERSITARA

EVALUARE ŞI RECAPITULARE

PARTEA 3

Întrebări de examinare cu răspunsuri

Răspunsurile pot fi găsite începând cu pagina 565

A1. Funcțiile pentru venitul total (V_T) și costul total (C_T) ale unei afaceri (pentru o producție de 1000 până la 1300 de unități pe perioada analizată) sunt următoarele:

$$V_T = \frac{-x^2}{2} + 1500x,$$

$$C_T = 330x + 415\,000,$$

(unde x este nivelul producției, iar V_T și C_T sunt exprimate în £).

Se cere:

a) Să se formuleze o expresie matematică pentru profitul total.

b) Utilizând calculul diferențial:

b_1) să se determine formele acestor expresii pentru venit marginal și profit marginal;

b_2) să se găsească producția pentru care profitul este maxim și confirmarea faptului că este vorba despre o valoare maximă.

c) Să se traseze graficul venitului marginal și al costului marginal pentru niveluri ale producției cuprinse între 1000 și 1300 de unități pe perioada analizată, indicându-se clar care este nivelul producției pentru obținerea unui profit maxim.

ACCA Informația managerială

A2. O companie a planificat achiziționarea unui număr de 90 800 de unități dintr-un anumit reper pentru anul care urmează. Articolul respectiv este cumpărat în cutii, fiecare conținând câte 10 unități, la un preț de 200£/cutie. Se întreține un stoc de siguranță de 250 de cutii.

Costul păstrării unui anumit reper în stoc (inclusiv asigurări, dobânzi și costurile legate de spațiul de depozitare) reprezintă 15% din prețul de achiziționare. Costul comenzilor și al livrărilor trebuie estimat din datele despre costuri stocate cu ocazia efectuării unor comenzi asemănătoare, când costuri de 5910£ au fost însumate în final din 30 de comenzi. Este de presupus că costurile de comandă se modifică proporțional cu numărul de comenzi. Se mai adaugă un procent de 2% la costurile anterioare pentru compensarea ratei inflației.

Se cere:

să se calculeze care este cantitatea comandată care ar reduce la minim costurile articolului respectiv și să se determine frecvența emiterii comenzilor, presupunând că cererea pentru articolul respectiv este uniformă de-a lungul anului.

ACCA Informația managerială

A3. Compania Mayfair Electrics, care se află în stare de funcțiune timp de 300 de zile pe an, se pregătește să lanseze producția unui nou produs, pentru care compania a estimat o cerere anuală de 25 000 de unități; se presupune că cererea pentru acest produs va fi constantă de-a lungul anului. Produsul conține un reper care poate fi achiziționat fie de la un singur angrosist, fie de la ambii; este vorba despre Apex Ltd și Bemax Ltd. Presupunem că prețul reperului respectiv este variabil. Apex Ltd poate onora comenzi în orice cantități la un cost de 8£/reper, la care se mai adaugă o taxă de livrare de 50£ pentru fiecare comandă.Bemax Ltd livrează reperul respectiv la un preț de cost de 7,95£ și percepe taxe suplimentare numai pentru livrări de peste 5000 de bucăți.

Se cere:

a) a_1) Să se determine costul total minim anual asociat fiecăruia dintre cei doi angrosiști, Apex Ltd și Bemax Ltd.

a_2) Sfătuiți compania Mayfair Electrics care este cea mai bună sursă de aprovizionare din cele două dacă se dorește reducerea la minimum a costurilor totale anuale, precizându-se și cantitatea de comandă, numărul de livrări pe an și intervalul de timp dintre acestea.

a_3) Formulați premizele unui model simplu de control al stocului și faceți o apreciere în legătură cu validitatea sa în acest caz.

b) Stabiliți care ar fi modificările ce trebuie operate în cazul în care Apex Ltd ar trebui să-și limiteze numărul de unități furnizate unui singur client la 15 000 de unități anual și calculați costul anual suplimentar care ar trebui suportat de Mayfair Electrics.

ACCA Tehnici de luare a deciziilor

A4. Orion Products Ltd. este o companie care vinde cu amănuntul materiale de construcții, funcționând 50 de saptămâni pe an. Unul dintre produsele care se vând cel mai rapid este achiziționat de la un producător extern la un preț de cost de 8,50£ bucata. Cererea săptămânală estimată este de 4800 bucăți. Timpul de refacere a stocului este de trei săptămâni, iar practica curentă la Orion este achiziționarea a 24 000 bucăți/comandă. Comanda de completare a stocului este emisă la un nivel al stocului de 20 000 de bucăți.

Analistul financiar al companiei a stabilit un cost de capital de 15%/an pentru aplicarea deciziilor de inventariere în cadrul companiei. În plus, analiza operațiunilor de achiziție a arătat că sunt necesare aproximativ 15 ore pentru a procesa și coordona efectuarea unei comenzi, indiferent de cantitatea comandată. Salariile în departamentul achiziții sunt în medie de 10£/oră, inclusiv beneficiul angajatorului. În plus, o analiză

detaliată a 40 de comenzi a pus în evidență o cheltuială de 1425£ pentru hârtie, taxe poștale și taxe telefonice, asociată procesului de comandă. De asemenea, costul recepției unei comenzi este estimat la 80£.

Se cere:

a) Să se arate că C, respectiv costul unei comenzi este de 265,625£.

b) Să se calculeze costul anual al achiziționării, comandării și stocării produsului respectiv, aplicând procedeul obișnuit.

c) Să se calculeze cantitatea de comandă care minimalizează costul total anual. Să se determine economia anuală realizată prin recurgerea la această cantitate optimă, presupunând că Orion Products trebuie să-și asigure același nivel de protecție practicat anterior, care este dat de stocul de siguranță.

d) Producătorul oferă o reducere de preț de 5% pentru o comandă de peste 100 000 de bucăți din partea companiei Orion Products. Dacă compania ar vrea să beneficieze de această facilitate, ar avea nevoie de un spațiu de depozitare suplimentar, la un cost de 25 000£/an. În aceste condiții, compania și-ar păstra același nivel al stocului de siguranță.

Scrieți un raport simplu pentru directorul financiar al companiei Orion Products, prin care să argumentați decizia de a accepta sau nu reducerea de preț oferită de producător. Lucrarea trebuie să conțină informațiile financiare și orice alți factori care ar putea influența luarea deciziei.

ACCA Tehnici de luare a deciziilor

A5 a) Descrieți avantajele și dezavantajele utilizării simulării pentru analizarea problemelor de afaceri prin comparație cu utilizarea formulelor matematice.

Compania North Star utilizează un agregat având în componență trei tuburi cu vacuum, care constituie o cauză principală pentru timpii morți înregistrați în exploatarea acestui agregat. Practica uzuală este aceea de a înlocui aceste tuburi atunci când se defectează. S-a făcut propunerea ca toate cele trei tuburi să fie înlocuite atunci când unul dintre ele se defectează, pentru a se reduce astfel frecvența cu care trebuie oprit agregatul. Obiectivul constă în compararea acestor alternative în funcție de costuri.

Costul unui tub este de 400£ și operațiunea de înlocuire a unui tub costă 100£, înlocuirea a două tuburi costă 160£, iar înlocuirea tuturor celor trei tuburi costă 200£. Costurile opririi agregatului au fost calculate la 900£/oră, iar timpii de înlocuire a 1, 2 respectiv 3 tuburi sunt: 30 minute, 50 de minute și respectiv 60 minute.

Informațiile anterioare indică faptul că durata de funcționare a unui asemenea tub are o distribuție după cum urmează:

Durata de funcționare - săptămâni	7	8	9	10	11	12
Probabilitatea de defectare	0,1	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1

b) Folosind informațiile de mai sus și aplicând simularea utilizării acestui agregat pe durata unui an, să se estimeze costurile de întreținere în fiecare dintre următoarele situații:

b_1) se înlocuiește fiecare tub care se defectează;

b_2) se înlocuiesc toate de fiecare dată când unul se defectează.

Se vor folosi următoarele numere aleatorii:

	Numere aleatorii									
Tubul 1	8	0	0	1	7	2	1	9	9	7
Tubul 2	8	8	8	4	8	5	2	3	7	0
Tubul 3	5	7	2	0	2	8	6	2	8	5

c) De ce estimările pe care le-ați făcut la punctul b nu pot fi considerate de încredere și cum le-ați îmbunătăți?

d) Directorul de producție propune ca fiecare tub să fie înlocuit atunci când se defectează și cu aceeași ocazie să fie înlocuit fiecare tub care a depășit o durată de funcționare de 8 săptămâni.

Folosiți tehnicile de simulare pentru testarea acestei propuneri.

ACCA Tehnici de luare a deciziilor

Probleme de examen fără răspunsuri

B1. FRN Ltd este o companie mică, având un singur produs – un avion ușor, Rustler. Rustler este similar ca performanțe cu avioanele produse de alte companii, dar și câteva calități care îl fac deosebit de util pentru anumite scopuri speciale. Într-o perioadă dată de trei luni, clienților care achiziționează acest avion li se percepe același preț.

În cadrul companiei FRN Ltd, producerea acestui avion este o operație de asamblare a componentelor achiziționate de la producători externi. Majoritatea angajaților companiei sunt angajați prin contracte de muncă în care se prevede un salariu de bază fix, o normă pe oră și bonificații pentru orele suplimentare. Se precizează că nu este posibilă extinderea fabricii sau achiziționarea unui echipament mai perfecționat într-o perioadă de trei luni.

Ați fost angajat în calitate de consultant, pentru a face recomandări conducerii companiei FRN Ltd în legatură cu producția și politica de prețuri pentru perioada de trei luni imediat următoare. Numărul maxim de avioane care pot fi produse în această perioadă este de 30. Din informările inițiale, rezultă că veniturile și costurile variabile asociate producerii unuia sau a 30 de aparate Rustler, în această perioadă, sunt:

Producția de avioane	1	30
	£	£
Venituri	100 000	2 134 000
Costuri variabile	30 000	2 497 000

Puteți considera că relația matematică dintre veniturile realizate din vânzarea aparatelor și costurile variabile este curbilinie, fiind descrisă de ecuația

$$y = ax^n.$$

Se cere:

a) Să se realizeze o diagramă prin care să se ilustreze comportamentul venitului și al costurilor variabile pentru întreaga gamă a nivelurilor de producție.

b) Determinați două formule matematice care să descrie relațiile dintre:

– producție și venituri;

– producție și costurile variabile.

c) Determinați nivelul producției și prețul pentru fiecare aparat, la care profitul ar fi maxim în perioada dată.

d) Dați motivele cele mai probabile pentru care veniturile și costurile variabile au față de producție efectele pe care le au.

CIMA Aplicații alecontabilității în afaceri

B2. Compania de automobile Aquarius achiziționează de la un producător o componentă utilizată la montarea generatoarelor. Operațiunile de producție de la Aquarius necesită 400 de componente pe lună. Costurile asociate emiterii comenzii și livrării (transportul, facturarea etc.) se ridică la 200£/lună. Fiecare componentă are un preț de cost de 20£, iar costurile de capital ale companiei sunt estimate la circa 15%/an. Actuala politică a companiei constă în efectuarea unor comenzi pe loturi de 600 de componente, de opt ori pe an.

Se cere:

a) Să se determine costurile anuale totale suportate de către firmă pentru achiziționarea acestei componente, conform politicii actuale.

b) Evaluați frecvența și nivelul unei politici de comandă pentru care costurile să fie reduse la minimum. Ce economii pot fi făcute trecând la această politică? Enunțați ipotezele necesare pentru efectuarea acestor calcule.

c) Furnizorul acestor componente oferă o reducere de preț de 5% din prețul standard pentru comenzi de peste 1600 de componente.

c_1) Recomandați companiei să-și modifice actuala politică pentru a beneficia de reducerea aceasta?

Ce rezerve pot fi invocate de conducere pentru a nu profita de această reducere?

c_2) Compania de automobile Aquarius nu are certitudinea costurilor curente de capital.

Cât de mari ar trebui să fie acestea astfel încât conducerea să fie indiferentă în privința adaptării nivelului comenzilor pentru a beneficia de reducerea de preț și a

menține politica de comandă stabilită prin punctul b? Comentați sensibilitatea costului de capital al companiei din punctul de vedere al acestei decizii.

c_3) Directorul depozitului estimează că loturile mai mari de 1600 de componente impun realizarea unor extinderi structurale, al căror cost ar fi de 25 000£.

Cât timp ar dura ca economiile realizate pe seama reducerii oferite de furnizorul de componente să acopere costurile extinderii? Comentați răspunsul.

ACCA Tehnici de luare a deciziilor

B3. a) Care sunt avantajele simulării? Există și dezavantaje?

b) Un magazin universal, deschis 300 de zile pe an, a stabilit că a dat greș în încercarea de previziune a modelului de cumpărare a unuia dintre produsele pe care le comercializează, mănușile pentru femei, la un preț de cost de 10£/pereche. De asemeni au stabilit că există o anumită variabilitate în timpul necesar completării stocului pentru fiecare nouă comandă. Aceste împrejurări au condus uneori la niveluri ridicate ale stocului și alteori la epuizarea acestuia. Datele legate de cerere care au fost stocate sunt prezentate în următorul tabel:

Cererea zilnică perechi de mănuși	Probabilitatea
0-2	0,2
3-7	0,3
8-12	0,4
13-19	0,1

Costul emiterii fiecărei comenzi de mănuși este estimat la 15£. Pentru fiecare pereche de mănuși, costul total anual al stocării este de 24% din prețul său de cost.

Se cere:

b_1) Să se determine cererea anuală preconizată.

b_2) Utilizând formula simplă a CEC arătați că numărul optim de perechi de mănuși pentru fiecare comandă este 165.

c) Distribuția timpilor de completare a stocului este prezentată în următorul tabel:

Timpul de completare a stocului, zile	Probabilitatea
1	0,1
2	0.3
3	0.4
4	0,2

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITARĂ

Utilizând cifrele aleatorii de mai jos, să se simuleze o operațiune de inventar pe o perioadă de 10 zile pentru a se stabili costurile săptămânale de stocare. Se pornește de la un stoc inițial de 30 de perechi, cantitatea comandată va fi cea calculată la punctul b, nivelul comenzilor de refacere a stocului va fi de 20 de perechi, în ipoteza că pierderea încrederii în perioada de epuizare a stocului este de 1£ pentru fiecare pereche de mănuși solicitată de cumpărători și care nu a putut fi oferită spre vânzare.

Timpul de refacere a stocului										
Cifrele aleatorii	3	8	7	1	6	0	9	1	4	9
Cererea zilnică	5	2	8	3						

Precizați ipotezele de la care porniți.

d) explicați în ce fel această metodă de simulare poate fi folosită pentru determinarea cantității optime de comandă și a nivelului de comandă pentru refacerea stocului.

ACCA Tehnici de luare a deciziilor

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITARA

PARTEA 4

16. PROGRAMAREA LINIARĂ – INTRODUCERE

1. Obiective:

După parcurgerea acestui capitol:

• veți face cunoștință cu tehnicile de programare liniară;

• veți ști cum să exprimați problemele de programare liniară într-o manieră standardizată;

• veți înțelege sensul funcției obiective și al constrângerii;

• veți ști cum se formulează atât problemele de maximizare cât și cele de minimizare;

• veți înțelege distincțiile dintre constrângerile de tipul „mai mare sau egal" și de tipul „mai mic sau egal".

2. Programarea liniară și alocarea

Problemele de alocare se referă la utilizarea cea mai eficientă a unor resurse limitate. Este evident faptul că multe decizii manageriale sunt în esență decizii de alocare a resurselor și există mai multe tehnici care vin în ajutorul manageriatului în acest domeniu. Programarea liniară este una dintre ele, fiind strâns legată de tehnicile de repartizare și transport despre care va fi vorba în capitolele 20 și 21 și care sunt de asemeni tehnici de alocare.

3. Definiția programării liniare

Programarea liniară este o tehnică matematică ce se ocupă cu alocarea resurselor limitate. Este un procedeu de optimizare a valorii unor obiective (de exemplu, profit maxim sau cost minim) atunci când factorii implicați (de exemplu munca sau numărul de ore/mașini) sunt supuse unor constrângeri (de exemplu, sunt posibile numai 1000 de ore de lucru pe săptămână).

Astfel, programarea liniară poate fi aplicată în rezolvarea unor probleme care se conformează următorului cadru:

a) Trebuie ca problema să se preteze enunțării sub formă numerică.

b) Toți factorii implicați în problemă trebuie să aibă relații liniare de exemplu

dublarea câștigului impune dublarea numărului de ore de muncă; dacă o unitate aduce o contribuție de 10£, atunci zece unități vor aduce o contribuție de £100 și așa mai departe.

c) Problema trebuie să permită efectuarea uneia sau a mai multor alegeri între cursuri alternative ale acțiunii.

d) Trebuie să existe una sau mai multe restricții privitoare la factorii implicați. Acestea pot fi restricții de resurse (ore de muncă, tone de material etc.) sau pot fi reprezentate de anumite caracteristici, ca de exemplu: un îngrășământ trebuie să conțină minimum 15% fosfați și 30% azot sau pentru patentare, un combustibil nu trebuie să conțină mai mult de 6% cenuși, 2% fosfați și 1% sulfuri.

Notă. Componenta „liniară" din denumirea tehnicii de programare liniară a fost explicată mai înainte. Componenta „programare" se referă la metoda de prezentare a soluțiilor. Acestea vor rezulta în mod invariabil dintr-un proces de trecere în revistă și de aceea se poate trece de la o soluție oarecare la alta mai bună în mod progresiv, până se ajunge la o soluție care nu mai poate fi îmbunătățită, deci devine soluția optimă. Prin urmare, în acest context, termenul programare nu are nici o legătură cu programarea din domeniul calculatoarelor.

4. Cerința de liniaritate

Un factor major în programarea liniară este cerința ca relațiile să fie, în totalitatea lor, liniare. În mod evident, nu toți factorii implicați în luarea deciziilor în lumea afacerilor sunt liniari și există chiar anumite situații pentru care sunt tipice și chiar de dorit, relațiile neliniare, ca de exemplu un proces de producție care poate fi dezvoltat astfel încât să se realizeze economii proporționale și reducerea costului pe unitatea de produs. Din fericire, s-a observat că o mulțime de factori (de exemplu ore de muncă, utilizarea mașinilor și a utilajelor, veniturile) au un caracter liniar sau pot fi aproximate liniar în cadrul operațional al valorilor care sunt luate în calcul. Se va observa că această abordare este similară celei adoptate de către contabili în aprecierea costurilor marginale și în analiza P/V.

5. Formularea problemelor de programare liniară

Înainte de a trece la prezentarea metodelor detaliate de rezolvare a problemelor de programare liniară, trebuie ca problema să fie formulată într-o manieră standardizată. În acest fel se ușurează calculele necesare pentru a se ajunge la soluția căutată și există siguranța că nici un element important al problemei nu este trecut cu vederea. Factorii de importanță majoră sunt:

obiectivele și
limitările sau *constrângerile.*

Obiectivele. Primul pas în programarea liniară este reprezentat de stabilirea rezultatului care se așteaptă prin rezolvarea problemei, respectiv *obiectivul*. Acesta poate să fie reprezentat de maximizarea profitului sau a contribuției, ori de minimizarea costului, a timpului sau a altor mărimi adecvate. După stabilirea obiectivului este necesară formularea matematică a elementelor care sunt implicate în atingerea sa, aceasta reprezentând *funcția-obiectiv*.

Exemplul 1

O fabrică poate să realizeze două produse: A *și* B. *Contribuțiile care se pot obține de la aceste două produse sunt următoarele:*

– A *contribuie cu 20£ pe unitatea de produs;*

– B *contribuie cu 30£ pe unitatea de produs.*

Se cere să se maximizeze contribuția.

Funcția-obiectiv pentru această fabrică poate să fie exprimată după cum urmează:

$$Maximum = 20x_1 + 30x_2,$$

unde: x_1 este numărul de unități din produsul A realizate;

x_2 – numărul de unități din produsul B realizate.

Notă. Această problemă are două necunoscute, x_1 și x_2. Uneori, acestea sunt numite *variabile decizionale*. Într-o problemă de programare liniară se lucrează cu un singur obiectiv (în acest caz maximizarea contribuției).

Exemplul 2

Un fermier amestecă trei produse pentru hrănirea porcilor. Concentratul M care are un preț de cost de 20p/kg, concentratul Y care are un preț de cost de 40p/kg și concentratul Z care are un preț de cost de 55p /kg. Fiecare dintre aceste concentrate contribuie cu anumite elemente esențiale la dieta animalelor și fermierul vrea să știe cum își poate hrăni animalele cât mai ieftin posibil.

Funcția-obiectiv este:

$$Minimum = 20x_1 + 40x_2 + 55x_3,$$

unde :x_1 este numărul de kilograme de *M*;

x_2 – numărul de kilograme de *Y*;

x_3 – numărul de kilograme de *Z*.

Dacă prețurile de cost ar fi fost exprimate în £, funcția obiectiv ar fi avut forma:

$$Minimum = 0{,}2x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}55x_3.$$

Notă. Acest exemplu are trei variabile decizionale. Numărul variabilelor decizionale poate varia de la 2 până la câteva sute. Pentru atingerea scopurilor examinărilor, 4 sau 5 este numărul maxim de variabile decizionale cel mai probabil de întâlnit. În ambele exemple anterioare s-a emis ipoteza liniarității, ca de altfel și în exemplele care vor urma.

6. Limitări sau constrângeri

Întotdeauna vor exista împrejurări care influențează îndeplinirea obiectivelor propuse. Acești factori sunt denumiți *limitări* sau *constrângeri*. Limitările din cadrul oricărei probleme trebuie identificate riguros, cuantificate și exprimate matematic. De asemeni, pentru a putea aplica programarea liniară, limitările trebuie să fie de asemeni liniare.

7. Exemple de limitări

Exemplul 3

O fabrică realizează patru produse și dorește să-și maximizeze contribuția. Funcția-obiectiv în acest caz va fi:

$$\text{Maximum} = 5{,}5x_1 + 2{,}7x_2 + 6{,}0x_3 + 4{,}1x_4,$$

unde: x_1 *este numărul de unități din produsul A realizate;*

x_2 *– numărul de unități din produsul B realizate;*

x_3 *– numărul de unități din produsul C realizate;*

x_4 *– numărul de unități din produsul D realizate;*

iar coeficienții funcției-obiectiv (respectiv 5,5; 2,7; 6,0 și 4,1)reprezintă contribuțiile fiecărui produs.

Fabrica are un număr de 200 de muncitori calificați și un număr de 150 de muncitori necalificați, timpul săptămânal de lucru fiind de 40 de ore. Timpul necesar pentru a realiza o unitate din fiecare dintre cele patru produse, de către cele două tipuri de muncitori este dat mai jos:

	Produsele			
	A	*B*	*C*	*D*
Ore de muncă calificată	5	3	1	8
Ore de muncă necalificată	5	7	4	11

Limitările în privința muncii pot fi formulate după cum urmează:

Calificați	$5x_1$	+	$3x_2$	+	x_3	+	$8x_4$	≤	8000
Necalificați	$5x_1$	+	$7x_2$	+	$4x_3$	+	$11x_4$	≤	6000

În plus, mai există o limitare general valabilă în cazul tuturor problemelor de maximizare și anume aceea că nu este posibil să se realizeze cantități negative dintr-un produs, respectiv:

$x_1 \geq 0,\quad x_2 \geq 0,\quad x_3 \geq 0,\quad x_4 \geq 0.$

Note. a) Limitările de domeniul resurselor din această problemă de maximizare urmează un model tipic de tipul „mai mic sau egal cu".

b) Ipoteza formală a constrângerii de nonnegativitate a valorii necunoscutelor

B.C.U. „M. EMINESCU" IAȘI

(x_1, x_2 etc.) trebuie introdusă obligatoriu atunci când se recurge la rezolvarea computerizată a problemei, dar poate să fie omisă în cazul rezolvării cu creionul pe hârtie.

c) Restricția de mai înainte se aplică și la orele de muncă. Orele-muncă ale utilajelor vor fi tratate într-o manieră similară.

Exemplul 4

O companie realizează patru produse: P, Q, R, S, care sunt confecționate din două materii prime: mâl și noroi. Pe o perioadă oarecare sunt disponibile numai 1000 t de mâl și 800 t de noroi. Consumurile de materii prime pentru realizarea produselor sunt următoarele:

Produse		*P*	*Q*	*R*	*S*	
Materii prime	Mâl	2,6	1	5	0	tone/unitate
	Noroi	3,3	4	0	6,2	tone/unitate

∴ Limitările sunt următoarele:

Restricții pentru mâl	$2{,}6x_1$	+	x_2	+	$5x_3$	≤	1000
Restricții pentru noroi	$3{,}3x_1$	+	$4x_2$	+	$6{,}2x_3$	≤	800

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0$

unde: x_1 – *unități din produsul* P;
x_2 – *unități din produsul* Q;
x_3 – *unități din produsul* R;
x_4 – *unități din produsul* Q.

Exemplul 5

Limitările de vânzări datorită cotelor și/sau precizărilor din contract pot fi de tipurile „mai mare sau egal" (≥) sau „mai mic sau egal" (≤).

O companie este membră a unei federații de comerț și a fost de acord să accepte anumite cote de vânzări pentru unele dintre produse. De asemeni, are contracte cu unii clienți permanenți pentru livrarea unor cantități minime din anumite produse. Detaliile sunt următoarele:

Cotele (convenite cu Federația Comercială)

	Produs					
	A	B	C	D	E	
Nivel maxim al vânzărilor	500	1000	Fără limită	2000		Unități/perioadă
Contracte cu clienți permanenți						
Cantitatea minimă ce trebuie furnizată	–	300	400	–		Unități/perioadă

∴Limitările sunt următoarele:

Nivelul constrângerilor	x_1				≤ 500
Nivelul constrângerilor		x_2			≤ 1000
Nivelul constrângerilor				$x_4 + x_5$	≤ 2000
Constrângeri din contract		x_2			≥ 300
Constrângeri din contract			x_3		≥ 400

$$x_1 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0,$$

unde x_1 până la x_5 sunt cantitățile din produsele A până la E care trebuie realizate.

Note:

a) Constrângerile uzuale privind nonnegativitatea nu sunt necesare pentru x_2 și x_3, deoarece restricțiile prin contracte sunt de genul „mai mare sau egal".

b) Exemplele 3, 4 și 5 de mai înainte sunt probleme de maximizare, în care restricțiile sunt în general (dar nu exclusiv) de tipul „mai mic sau egal".

8. Probleme de minimizare

Problemele de minimizare (cum este cea de la exemplul 2) se ocupă în general de minimizarea costurilor îndeplinirii anumitor obiective care sunt supuse unor limitări. Limitările în acest caz sunt de tipul „mai mare sau egal" datorită unui motiv logic, respectiv acela că modul cel mai simplu de minimizare a costurilor este să nu produci nimic și din acest motiv limitările trebuie stabilite astfel încât să se producă minimul posibil pentru îndeplinirea unor obiective.

Exemplul 6

Un fermier își hrănește porcii cu un amestec de lături, vitamine și o rețetă proprie de concentrat. Fermierul are un număr de 100 de porci, care consumă zilnic, fiecare, cel puțin 20 kg de hrană. Fermierul dorește să-și minimizeze costurile de hrănire a animalelor, dar în același timp să se asigure că animalele au o hrană echilibrată. Se dau următorii factori de alimentație și costuri:

	Calorii	Vitamine			
		1	2	3	
Necesități minime zilnice de hrană					
Necesarul/porc	40	20	10	30	
Conținutul alimentației					**Costuri**
Lături/kg (x_1)	1,5	0,5	–	–	5p/kg
Concentrat/kg (x_2)	2,0	0,5	–	1	10p/kg
Vitamine/sticlă (x_3)	–	0,5	7	14	20p/sticlă

Formularea din punctul de vedere al programării liniare va fi:

Funcția-obiectiv: Minimum $5x_1 + 10x_2 + 20x_3$

Constrângeri:

Masa totală (100×20)	$1{,}0x_1$	+	$1{,}0x_2$			$\geq$	2000
Calorii (100×40)	$1{,}5x_1$	+	$2{,}0x_2$			$\geq$	4000
Vitamina 1 (100×20)	$0{,}5x_1$	+	$0{,}5x_2$	+	$5x_3$	$\geq$	2000
Vitamina 2 (100×10)					$7x_3$	$\geq$	1000
Vitamina 3 (100×30)			$1{,}0x_2$	+	$14x_3$	$\geq$	3000

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$

unde: x_1 este kilograme de laturi;
x_2 – kilograme de concentrat;
x_3 – sticle de vitamine.

Note:

a) Restricțiile de tipul „mai mare sau egal" sunt tipice pentru problemele de minimizare.

b) La restricția privind masa totală, greutatea vitaminelor a fost considerată neglijabilă și nu a fost luată în calcul.

c) Constrângerea de nonnegativitate pentru x_3 nu este necesară în această problemă, deoarece restricțiile privind vitamina 2 se referă numai la x_3 și este de tipul „mai mare sau egală".

9. Costurile fixe

Programarea liniară se ocupă de modificările de prețuri și venituri și de aceea o serie de factori cum ar fi costurile fixe, care rămân nemodificate de-a lungul perioadei analizate nu trebuie incluși în formularea problemelor de programare liniară. Pentru eliminarea efectelor costurilor fixe și pentru menținerea relațiilor liniare, este normal ca în funcția-obiectiv să fie utilizată mai curând contribuția (respectiv vânzările minus costul marginal) decât profitul în funcția-obiectiv.

10. Rezumat

a) Programarea liniară este o metodă de rezolvare a problemelor de optimizare în funcție de anumite constrângeri.

b) Toți factorii implicați trebuie să fie exprimați sub formă numerică și între ei trebuie să existe relații liniare.

c) Înaintea începerii rezolvării problemelor de programare liniară, acestea trebuie formulate într-o manieră standardizată. Pașii acestui proces sunt:

c_1) Stabilirea obiectivului.

c_2) Calcularea venitului pe unitatea de produs pentru maximizare sau a costului pe unitatea de produs pentru minimizare (în ambele cazuri nu se ține seama de costurile fixe).

c_3) Se formulează funcția-obiectiv, notând numărul de necunoscute sau de variabile decizionale care apar.

c_4) Se apreciază care sunt factorii care limitează sau constrâng cantitățile care trebuiesc produse sau achiziționate.

c_5) Se exprimă acești factori într-o formă matematică, acordându-se atenție pentru ca inegalitățile (respectiv $\leq$ sau $\geq$) să fie corect apreciate.

c_6) Înaintea începerii rezolvării problemei asigurați-vă că toate relațiile stabilite sunt de tipul liniar sau că pot fi aproximate, în limite rezonabile, unei funcții liniare.

c_7) Se rezolvă problema fie prin metoda grafică (arătată în capitolul 17) fie prin metoda simplex (care va fi prezentată în capitolul 18).

11. De reținut

a) Programarea liniară este o tehnică practică importantă, având un mare domeniu de aplicabilitate.

b) În cadrul întrebărilor de examinare, o proporție importantă a notei se acordă pentru formularea corectă a problemei, astfel încât studiul aprofundat al acestui capitol își găsește cu prisosință răsplata.

c) În practică, sensibilitatea unei soluții constituie un factor de o importanță covârșitoare. Este posibil ca o anumită soluție optimă să fie valabilă pentru un interval foarte restrâns de valori ale constrângerilor, condiții în care soluția va fi considerată *sensibilă*, sau poate să fie valabilă pe un interval foarte larg de valori ale constrângerilor, fiind numită, în această situație, *robustă*. Operațiunea de apreciere a dimensiunii intervalelor pentru care soluțiile rămân constante se numește analiză de sensibilitate, constituind subiectul unuia dintre capitolele ulterioare.

Întrebări de autoevaluare. *Numerele dintre paranteze se referă la numerotarea paragrafelor.*

1. Care sunt caracteristicile esențiale ale problemelor care pot fi rezolvate prin metoda programării liniare? (3 și 4)
2. Ce reprezintă funcția-obiectiv? (5)
3. Câte obiective pot fi urmărite, concomitent, într-o problemă de programare liniară? (5)
4. Ce reprezintă limitările sau constrângerile? (6)
5. Faceți distincția dintre o problemă de maximizare și una de minimizare. (8)
6. De ce se consideră că costurile fixe nu sunt relevante în problemele de programare liniară? (9)

Exerciții cu răspunsuri

1. O firmă fabrică patru produse A, B, C și D, cu prețurile de vânzare de 20£, 25£, 12£ și respectiv 30£ pe bucată. Firma are 500 de angajați care muncesc 40 de ore săptămânal. Timpul exprimat în ore necesar pentru fabricația unei unități din fiecare produs și consumul de materiale sunt prezentate în continuare:

	Produsele			
	A	*B*	*C*	*D*
Ore/unitate	6	4	2	5
X kg de materiale/unitate	2	8,3	5	9
Y kg de materiale/unitate	10	4	8	2
Z kg de materiale/unitate	1,5	–	2	8

Cantitățile de materiale disponibile săptămânal:

X	100 000 kg
Y	65 000 kg
Z	220 000 kg

Compania dorește să-și maximizeze câștigurile.

Să se formuleze problema în maniera standard.

2. Compania Green Bakeries Ltd primește o comandă urgentă de biscuiți cu conținut ridicat de proteine de la fundația Camfam, pentru un ajutor umanitar. Costurile trebuie minimizate dar produsul trebuie să întrunească anumite valori nutritive minime.

Pentru executarea comenzii sunt necesare 1000 kg de aluat pentru biscuiți, care se realizează din ingredientele *R*, *S*, *T*, *U*, cu costurile de 8£, 2£, 3£, 1£ pe kilogram. Cantitatea comandată trebuie să conțină un minim de 400 kg proteine, 250 kg grăsimi, 300 kg carbohidrați și 50 kg de zahăr. Ingredientele folosite de producător au următorul conținut procentual:

	Proteine	Grăsimi	Carbohidrați	Zahăr	Cenuși
R	50%	30%	15%	5%	0
S	10%	15%	50%	15%	10%
T	30%	5%	30%	30%	5%
U	0	5%	5%	30%	60%

Pe moment sunt disponibile numai 150 kg de S și 200 kg de T.

Să se formuleze problema de programare liniară în maniera standard.

Răspunsuri la exerciții

1. Maximizare $20A + 25B + 12C + 30D$

Raportat la:

$$\begin{aligned} 6A + 4B + 2C + 5D &\le 20\,000 \\ 2A + 8{,}3B + 5C + 9D &\le 100\,000 \\ 10A + 4B + 8C + 2D &\le 65\,000 \\ 1{,}5A + 2C + 8D &\le 220\,000 \end{aligned}$$

$$A, B, C \text{ și } D \ge 0$$

2. Minimizare $8R + 2S + 3T + U$

Raportat la:

$$\begin{aligned} R + S + T + U &\ge 1000 \\ 0{,}5R + 0{,}1S + 0{,}3T &\ge 400 \\ 0{,}3R + 0{,}15S + 0{,}05T + 0{,}05U &\ge 250 \\ 0{,}15R + 0{,}5S + 0{,}3T + 0{,}05U &\ge 300 \\ 0{,}05R + 0{,}15S + 0{,}3T + 0{,}3U &\ge 50 \end{aligned}$$

$$R, S, T, U \ge 0$$

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

17. PROGRAMAREA LINIARĂ – SOLUȚII GRAFICE

1. Obiective

După parcurgerea acestui capitol:

- veți ști care este modul grafic de rezolvare a problemelor de programare liniară cu două necunoscute;
- veți ști cum se reprezintă grafic ambele tipuri de constrângeri;
- veți ști ce se înțelege prin aria de fezabilitate;
- veți ști cum se identifică soluția optimă;
- veți ști cum se rezolvă grafic o problemă de minimizare;
- veți ști cum se află prețul din umbră sau prețul dual;
- veți ști cum se inversează o problemă de programare liniară;
- veți înțelege principiile analizei de sensibilitate.

2. Reprezentarea grafică a problemelor de programare liniară

Metoda grafică de rezolvare a problemelor de programare liniară nu poate fi aplicată decât în cazul problemelor cu *două* necunoscute sau variabile decizionale. Problemele în care apar *trei sau mai multe* necunoscute trebuie rezolvate prin alte metode, cum ar fi metoda simplex (care va fi prezentată în capitolul 18). Metodele grafice rămân cele mai simple metode de rezolvare a acestor probleme și ar trebui folosite cât mai frecvent posibil.

a) *Limitările.* Metoda grafică permite lucrul cu un număr oricât de mare de limitări, dar având în vedere că fiecare limitare este reprezentată sub forma unei drepte rezultă că graficul poate să devină foarte încărcat și greu de analizat. În cazul problemelor din cadrul examinărilor și al examenelor, aceste situații nu apar decât foarte rar.

b) *Tipuri de probleme și de limitări.* Atât problemele de maximizare cât și cele de minimizare pot fi rezolvate prin metoda grafică, după cum aceasta metodă poate fi aplicată și în cazul limitărilor de genul "mai mare sau egal" ($\geq$) sau "mai mic sau egal" ($\leq$).

c) *Exemplul grafic.* Metoda grafică de rezolvare a problemelor de programare liniară va fi descrisă pas cu pas, pornind de la o problemă de maximizare.

Exemplul 1

O manufactură fabrică două produse, klunk și klick. klunk aduce un venit de 3£ pe unitatea de produs și klick aduce un venit de 4£ pe unitatea de produs. Conducerea dorește să stabilească un plan săptămânal de producție care să maximizeze veniturile.

Datele de producție sunt următoarele:

	Pe unitatea de produs		
	Prelucrare mecanică, h	Prelucrare manuală, h	Materiale kg
Klunk	4	4	1
Klick	2	6	1
Totalul disponibil săptămânal	100	180	40

Ca urmare a unei înțelegeri comerciale, vânzările de klunk sunt limitate la un maximum săptămânal de 20 de unități, iar pentru onorarea unui contract cu un client vechi, trebuie vândute cel puțin 10 unități de klick pe săptămână.

Pasul 1. Se formulează modelul de programare liniară în maniera descrisă în capitolul 16, astfel:

Maximizare: $3x_1 + 4x_2$

Obiectul limitărilor	*A*	$4x_1$	+ $2x_2$	≤	100	(Limitarea impusă de necesarul de ore pentru prelucrările mecanice)
	B	$4x_1$	+ $6x_2$	≤	180	(Limitarea impusă de necesarul de ore pentru prelucrarea manuală)
	C	x_1	+ x_2	≤	40	(Limitările impuse de disponibilitățile de materiale)
	D	x_1		≤	20	(Limitările impuse de vânzările de klunk)
	E		x_2	≥	10	(Limitările impuse de vânzările de klick)

$x_1 \geq 0$

unde: x_1 este numărul de unități de Klunk;

x_2 – numărul de unități de Klick.

Note:

Nu este posibilă realizarea unor cantități negative din aceste produse și, în mod formal, se introduce constrângerea de nonnegativitate (respectiv $x_1 \geq 0$).

Limitările impuse de resursele materiale și de vânzări sunt de ambele tipuri (respectiv ≥ și ≤).

Având în vedere că este o problemă cu numai două necunoscute (respectiv x_1 și x_2) există posibilitatea rezolvării grafice. Numărul limitărilor nu exclude soluția grafică.

Pasul 2. Se trasează axele graficului, reprezentând necunoscutele x_1 și x_2, după cum rezultă din fig. 17.1.

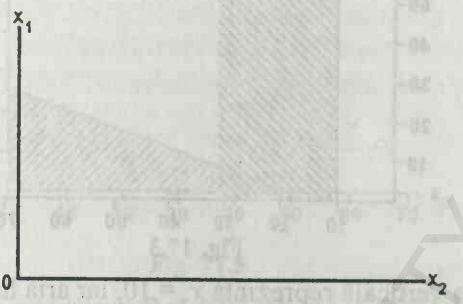


Fig. 17.1

Notă. Scara celor două axe se determină atunci când sunt trasate segmentele de dreaptă reprezentând limitările. Fiecare axă începe de la zero și scara este constantă (respectiv, liniară), cu precizarea că nu este absolut necesar ca scara pentru abscisă să coincidă cu scara pentru ordonată

Pasul 3. Se reprezintă fiecare limitare sub forma unui segment de dreaptă distinct.

Limitările de vânzări. Această limitare afectează, în mod normal, fiecare produs pe rând,iar în exemplul 1 restricțiile de vânzare erau următoarele:

$$x_1 \leq 20 \text{ și } x_2 \geq 10.$$

Aceste limitări sunt reprezentate pe grafic în fig. 17.2 și fig. 17.3.

Constrângerea în privința vânzărilor pentru klunk (constrângerea D), respectiv $x_1 \leq 20$ rezultă din fig. 17.2.

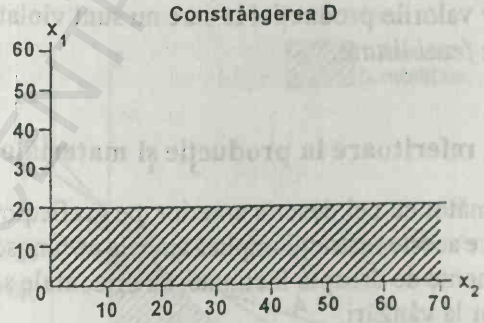


Fig. 17.2

Notă. Dreapta orizontală reprezintă $x_1 = 20$ iar aria haşurată de dedesubt reprezintă aria în care sunt cuprinse toate valorile mai mici de 20.

Constrângerea de vânzări pentru klick (constrângerea E),respectiv $x_2 \geq 10$ este reprezentată în fig. 17.3.

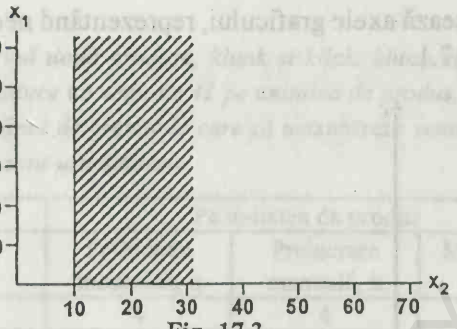


Fig. 17.3

Notă. Dreapta verticală reprezintă $x_2 = 10$, iar aria haşurată la dreapta acestui segment de dreaptă conţine valorile mai mari de 10. Aceste două limitări pot fi reprezentate pe acelaşi grafic, ca în fig. 17.4.

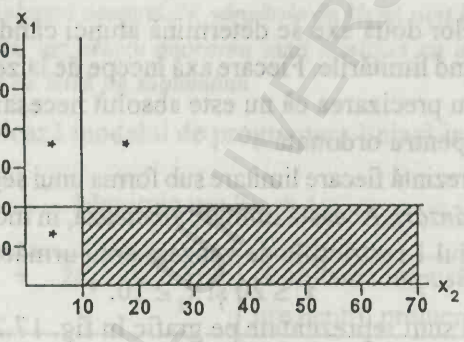


Fig. 17.4

Notă. Aria haşurată reprezintă mulţimea de valori posibile pentru nivelul producţiei (respectiv valorile producţiei la care nu sunt violate constrângerile) şi se numeşte *regiunea de fezabilitate.*

3. Limitările referitoare la producţie şi materiale

În mod asemănător cu cel descris anterior, pe grafic pot fi reprezentate şi alte constrângeri.Deoarece aceste restricţii implică ambele necunoscute, vor fi reprezentate sub forma unor segmente de dreaptă înclinate, nu orizontale sau verticale, aşa cum a fost cazul restricţiilor la vânzări.

Cele trei constrângeri care au mai rămas sunt de acelaşi tip şi sunt abordate în continuare:

Constrângerea referitoare la prelucrarea mecanică constrângerea A, $4x_1 + 2x_2 \leq 100$, este reprezentată grafic ca $4x_1 + 2x_2 = 100$.

Prin urmare, pentru $x_1 = 0, x_2 = 50$ (respectiv 100/2)

iar pentru $x_2 = 0, x_1 = 25$ (respectiv 100/4)

şi astfel se va trasa un segment de dreaptă între unitatea 25 de pe axa x_1 şi unitatea 50 de pe axa x_2, după cum se poate observa în fig. 17.5.

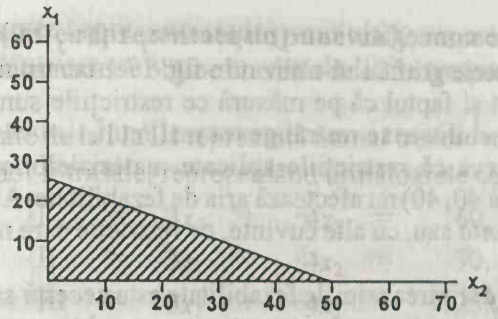


Fig. 17.5

Notă. Ca și anterior, aria haşurată reprezintă aria în care este cuprinsă mulțimea valorilor „mai mici decât". Celelalte constrângeri vor fi abordate într-o manieră asemănătoare.

Astfel, constrângerea referitoare la prelucrarea manuală (constrângerea B) $4x_1 + 6x_2 \leq 180$ va fi reprezentată grafic ca $4x_1 + 6x_2 = 180$.

Prin urmare, pentru $x_1 = 0$, $x_2 = 30$ (respectiv 180/6)

iar pentru $x_2 = 0$, $x_1 = 45$ (respectiv 180/4),

și astfel se va trasa un segment de dreaptă între unitatea 45 de pe axa x_1 și unitatea 30 de pe axa x_2.

Constrângerea privind materialele, (c), $x_1 + x_2 \leq 40$ este reprezentată în grafic ca $x_1 + x_2 = 40$.

De aceea pentru $x_1 = 0$, $x_2 = 40$ și $x_2 = 0$, $x_1 = 40$ și astfel se poate trasa o dreaptă de la 40 pe axa x_1 la 40 pe axa x_2.

Toate contrângerile (legate de vânzări, producție, materii prime și materiale) pot fi trasate acum pe un singur grafic (fig. 17.6), din care va rezulta clar *regiunea de fezabilitate.*

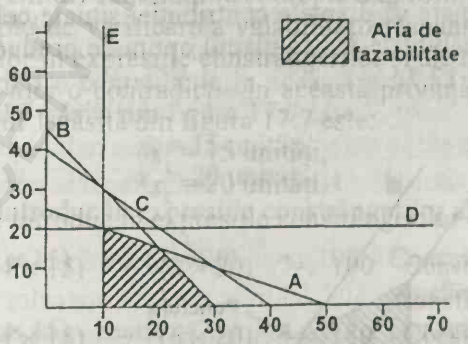


Fig. 17.6

Note:

a) *Regiunea de fezabilitate* este o arie care nu contravine nici uneia dintre restricții, conținând, prin urmare, toate datele permise pentru stabilirea planului de producție.

b) Restricția de nonnegativitate (respectiv $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$) este automat inclusă în grafic, deoarece axele graficului utilizat în fig. 17.1 conțin numai valori pozitive. Mai trebuie observat și faptul că pe măsură ce restricțiile sunt tot mai numeroase, suprafața ariei de fezabilitate se restrânge tot mai mult.

c) Se va observa că restricțiile aplicate materialelor prin constrângerea C (segmentul de dreaptă 40, 40) nu afectează aria de fezabilitate. Acesta este un exemplu de *restricție redundantă* sau, cu alte cuvinte, de restricție care nu influențează în nici un fel rezultatul.

Pasul 4. După definirea ariei de fezabilitate este necesar să se găsească punctul, din interiorul sau de pe limita acesteia pentru care se obține un venit maxim, acesta fiind obiectivul principal al acestei analize.

Acest lucru se realizează prin plotarea segmentelor de dreaptă reprezentând *funcția-obiectiv*, prin aceasta putându-se identifica punctele din aria de fezabilitate care se află pe dreapta valorii maxime a funcției-obiectiv. Aceste drepte ale funcției-obiectiv sau ale veniturilor sunt, de fapt, reprezentări ale funcției obiectiv pentru diferite combinații de klunk și klick care pot aduce aceleași venituri.

De exemplu:

20 de unități de klunk și zero unități de klick aduc un venit de 60£.
12 unități de klunk și 6 unități de klick aduc un venit de 60£.
8 unități de klunk și 9 unități de klick aduc un venit de 60£.
zero unități de klunk și 15 unități de klick aduc un venit de 60£.
etc.

Pot fi calculate o mulțime de alte drepte ale contribuției și dacă măcar o parte dintre acestea vor fi trasate pe grafic, se va observa că:

a) Sunt paralele între ele, având aceeași pantă, determinată de contribuția relativă a celor două produse.

b) Cu cât sunt situate mai la dreapta graficului, cu atât valoarea contribuției pe care o aduc este mai mare.

Rezultă prin urmare că dreptele contribuției situate cel mai la dreapta, care ating totuși aria de fezabilitate indică planul optim de producție pentru asigurarea unui venit maxim (fig. 17.7):

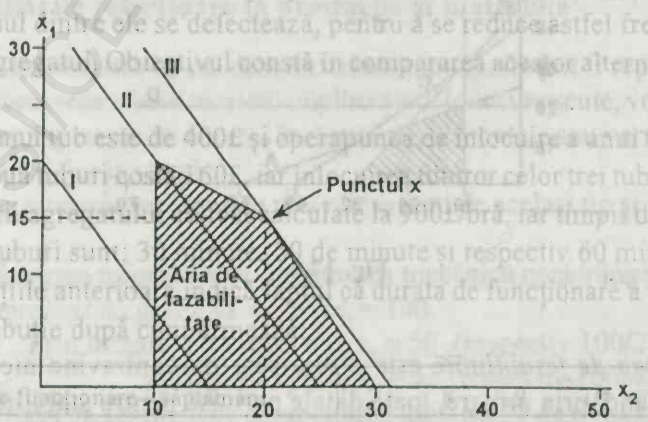


Fig. 17.7

Soluția optimă este reprezentată de punctul X, respectiv **15 unități de x_1 și 20 de unități de x_2**, pentru care se obține un venit de 125£ (respectiv $3£ \times 15 + 4 \times 20$).

Note:

a) Dreptele notate de la I la III reprezintă numai trei din multitudinea de drepte ale contribuției care pot fi trasate, reprezentând următoarele contribuții:

$$\begin{aligned} \text{I} &= 3x_1 + 4x_2 = 60, \\ \text{II} &= 3x_1 + 4x_2 = 90, \\ \text{III} &= 3x_1 + 4x_2 = 125. \end{aligned}$$

Dreapta contribuției are o pantă de 4/3, reprezentând raportul dintre coeficienții lui x_1 și x_2. Punctul de contact cu axa x_1 se găsește făcând împărțirea între contribuție și coeficientul lui x_1, procedeul fiind același și în cazul lui x_2. Intersecția cu axele graficului, pentru dreapta II să spunem, va fi calculată după cum urmează:

$$\text{Intersecția cu axa } x_1 = \frac{\text{venitul}}{\text{coeficientul lui } x_1} = \frac{90}{3} = 30,$$

$$\text{Intersecția cu axa } x_2 = \frac{\text{venitul}}{\text{coeficientul lui } x_2} = \frac{90}{4} = 22{,}5.$$

b) Numai parțial dreptele I, II și III intersectează aria de fezabilitate, dar având în vedere faptul că obiectivul acestui studiu constă în maximizarea veniturilor, rezultă că nu prezintă interes decât punctul x de intersecție a dreptei III cu aria de fezabilitate.

c) Pe fig. 17.7 au fost trasate mai multe drepte, cu scopul de a ilustra modul de utilizare a graficului. În cazul examenelor este suficient să fie trasată numai dreapta venitului care corespunde poziției optime, respectiv, pentru exemplul anterior, dreapta III.

d) Dreptele de venituri sunt numite și drepte izoprofit.

e) Un mod simplu de verificare a valabilității răspunsului constă în inserția valorilor necunoscutelor în expresiile constrângerilor și ale restricțiilor, pentru a se stabili dacă nu există nici o contradicție în această privință. De exemplu, soluția optimă pentru exemplul 1 găsită din figura 17.7 este:

$x_1 = 15$ unități,
$x_2 = 20$ unități.

Aceste valori se introduc în expresiile constrângerilor după cum urmează:

Constrângerea *A*	$(4 \times 15) + (2 \times 20) = 100$		Constrângerea este satisfăcută, fără a fi depășită
Constrângerea *B*	$(4 \times 15) + (6 \times 20) = 180$		Constrângerea este satisfăcută, fără a fi depășită
Constrângerea *C*	$(1 \times 15) + (1 \times 20) = 35$		Constrângerea satisfăcută, dar cu 5 unități sub maxim
Constrângerea *D*	Vânzările de $x_1 = 15$		Constrângerea satisfăcută, dar cu 5 unități sub maxim
Constrângerea *E*	Vânzările de $x_2 = 20$		Constrângerea satisfăcută, dar cu 10 unități sub maxim.

Se observă că cele două constrângeri care se intersectează în punctul de optim (a se vedea figurile 17.6 și 17.7) sunt constrângerile A și B. Acestea sunt singurele constrângeri complet satisfăcute fără valori excedentare. Aceasta este o regulă generală.

4. Exemplu de minimizare

Presupunând că nu există decât două necunoscute și problemele de minimizare pot fi rezolvate prin mijloace grafice. Abordarea generală este identică celei din cazul maximizării, în privința trasării axelor graficului, a alegerii unităților de măsură pentru fiecare axă, a trasării dreptelor reprezentând limitările, constrângerile și restricțiile, dar există și o serie de deosebiri între maximizare și minimizare, după cum se va arăta.

a) În mod obișnuit, într-o problemă de minimizare limitările sunt de genul „mai mare sau egal cu" (≥), astfel încât aria de fezabilitate se va afla deasupra tuturor limitărilor sau cel puțin a majorității lor.

b) Obiectivul obișnuit constă în minimizarea costurilor astfel încât dreapta (dreptele) funcției-obiectiv reprezintă costurile și, datorită faptului că obiectivul constă în *minimizarea* costurilor, punctul optim va fi găsit pe dreptele costurilor care se află cel mai la stânga graficului, intersectând sau atingând aria de fezabilitate, ceea ce înseamnă că este exact opusul metodei aplicate în problemele de maximizare.

Exemplul 2

Un fabricant trebuie să comercializeze un nou îngrășământ, care se obține prin combinarea a două ingrediente, A și B. Proprietățile celor două ingrediente sunt:

	Compoziția ingredientelor				
	Făină de oase	Azot	Oxid de calciu	Fosfați	Cost/kg
Ingredient *A*	20%	30%	40%	10%	1,2 p
Ingredient *B*	40%	10%	45%	5%	0,8 p

S-a stabilit că:

a) îngrășământul va fi vândut la saci cu greutatea minimă de 100 kg;

b) conținutul minim de azot trebuie să fie de 15%;

c) conținutul minim de fosfați trebuie să fie de 8%;

d) conținutul minim de făină de oase trebuie să fie de 25%.

Fabricantul dorește să îndeplinească toate aceste cerințe la un preț de cost minim posibil.

Soluția

Datorită similitudinii care ține de fundamentarea rezolvării grafice a problemelor de maximizare și de minimizare (cu excepția celor două deosebiri menționate anterior), nu vom mai repeta detalierea pașilor intermediari din exemplul 1.

Forma standard a problemei este următoarea:

Funcția-obiectiv

Să se minimizeze $12x_1 + 8x_2$ (costurile fiind exprimate în zecimi de peni), respectând următoarele constrângeri:

Constrângerea *A*	x_1	+	x_2	≥	100	(constrângerea privitoare la greutate)
Constrângerea *B*	$0,3x_1$	+	$0,1x_2$	≥	15	(constrângerea referitoare la conținutul de azot)
Constrângerea *C*	$0,1x_1$	+	$0,05x_2$	≥	8	(constrângerea referitoare la conținutul de fosfați)
Constrângerea *D*	$0,2x_1$	+	$0,4x_2$	≥	25	(constrângerea referitoare la conținutul de făină de oase)

$$x_1 \geq 0 \text{ și } x_2 \geq 0$$

unde: x_1 reprezintă kilogramele din ingredientul A;

x_2 – kilogramele din ingredientul B.

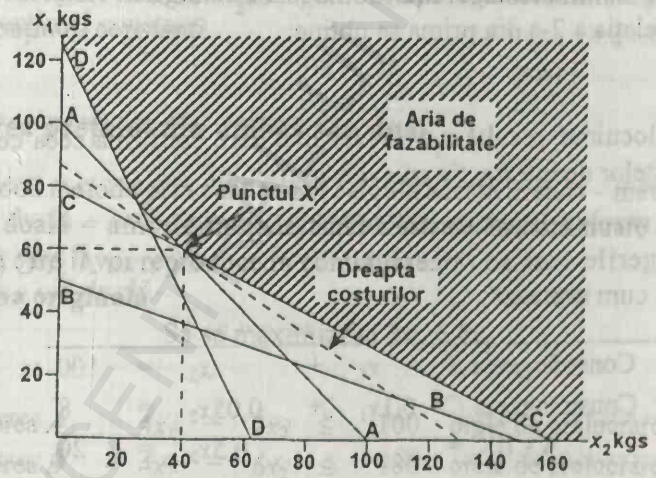


Fig. 17.8

Note la fig. 17.8:

Soluția optimă este reprezentată de punctul X, respectiv 60 kg de x_1 și 40 kg de x_2, la un cost total de

$$1,2 \times 60 + 0,8 \times 40 = 1,04\text{£/sacul de 100 kg.}$$

a) Pe grafic a fost trasată o singură dreaptă a costurilor ($12x_1 + 0,8x_2 = 1,040$, în zeci de penny) corespunzătoare poziției optime.

b) Restricțiile au fost notate pe grafic cu A, B. C și D, semnificațiile lor fiind cele prezentate în formularea standardizată a problemei.

c) Poziția optimă în aria de fezabilitate este reprezentată de *punctul situat cel mai la stânga* graficului intersectat de dreapta costurilor. Aceasta, așa cum am arătat, datorită faptului că este vorba despre o problemă de *minimizare*.

5. Utilizarea ecuațiilor simultane

O metodă alternativă de găsire a valorii numerice reprezentând soluția problemei pentru constrângerile enunțate prin intersectarea graficului, inclusiv vârful optim, constă în rezolvarea sistemului de ecuații reprezentate de constrângerile respective. Pentru a ilustra această posibilitate, problema de maximizare de la exemplul 1 și problema de minimizare de la exemplul 2 vor fi rezolvate aplicând metoda sistemului de două ecuații cu două necunoscute.

Reluarea rezolvării problemei de la exemplul 1

Cele două constrângeri care se intersectau în punctul optim erau constrângerile A și B (a se vedea figurile 17.6 și 17.7), respectiv:

Constrângerea A $\quad 4x_1 + 2x_2 = 100.$

Constrângerea B $\quad 4x_1 + 6x_2 = 180.$

Scăzând relația a 2-a din prima se obține:

$$4x_2 = 80,$$
$$\therefore x_2 = 20.$$

Făcând înlocuirea, rezultă $x_1 = 15$, rezultat care confirmă ceea ce s-a obținut prin citirea punctelor de intersecție cu axele graficului.

Reluarea rezolvării problemei de la exemplul 2

Constrângerile care se intersectau în acest caz erau A și C (a se vedea fig. 17.8), după cum urmează:

Constrângerea A	x_1	+	x_2	=	100
Constrângerea C	$0{,}1x_1$	+	$0{,}05x_2$	=	8
$\therefore A - 10C =$			$0{,}5x_2$	=	20
			$\therefore x_2$	=	40

și făcând înlocuirile, se obține $x_1 = 60$, confirmând din nou rezultatele obținute prin metoda grafică.

Dacă constrângerile care intervin în punctul optim ar fi fost cunoscute înaintea trasării graficului, problema ar fi putut fi rezolvată numai cu ajutorul sistemului de două ecuații cu două necunoscute, fără a mai fi necesară trasarea graficului. Deși este puțin probabil ca rezultatul corect să fie obținut astfel, este recomandabil mai curând ca rezultatul exact să fie obținut din rezolvarea sistemului de două ecuații cu două necunoscute decât să considerăm ca fiind exacte valorile ce se pot obține numai cu ajutorul graficului.

6. Estimarea resurselor limitate

Reprezentarea grafică a unei probleme de programare liniară nu are numai proprietatea de a da rezultatele optime, ci și pe aceea de a realiza identificarea constrângerilor care se asociază, numite și factori de limitare. Spre exemplificare, putem aminti că, în exemplul 1, orele de prelucrare mecanică și orele de prelucrare manuală sunt constrângerile care se asociază, iar o lipsă de disponibilitate legată de una dintre acestea limitează în continuare producția și profitul. Nu toți factorii care apar într-o problemă sunt factori de limitare. Tot în exemplul 1, constrângerile C, D și E nu se află la niveluri maxime și de aceea nu sunt limitate și nici nu exercită un efect de limitare.

Evaluarea resurselor limitate constituie o importantă sursă de informare în domeniul managementului. Aceste evaluări sunt cunoscute sub denumirea de *prețuri duale* sau *prețuri din umbră* și derivă din nivelul creșterii (respectiv descreșterii) veniturilor care ar putea fi obținute dacă ar fi disponibile încă una (sau nu ar fi disponibilă una) dintre resursele limitate. Numai o resursă limitată poate avea preț dual, iar prețul care se calculează ține seama de faptul că nu poate exista decât o creștere sau descreștere marginală a disponibilității resursei limitate și că toți ceilalți factori sunt menținuți constanți.

7. Aflarea prețului din umbră sau dual

Există două metode prin care se pot calcula aceste prețuri – metoda aritmetică și formularea duală – ambele metode fiind ilustrate în continuare plecând de la exemplul 1, pe care îl voi reproduce în continuare:

Problema originală

Să se maximizeze $3x_1 + 4x_2$

în funcție de

Constrângerea *A*	$4x_1$	+	$2x_2$	≤	100	orele de prelucrare mecanică
Constrângerea *B*	$4x_1$	+	$6x_2$	≤	180	orele de prelucrare manuală
Constrângerea *C*	x_1	+	x_2	≤	40	materiale
Constrângerea *D*	x_1			≤	20	vânzări
Constrângerea *E*			x_2	≥	10	vânzări

unde x_1 reprezintă unități de klunk,
x_2 – unități de klick.

Soluția corectă a fost: o producție de $15x_1$ și $20x_2$, care aduce un venit de 125£. Precizez că constrângerile A și B sunt asociate.

De această dată, problema cere să se afle care sunt prețurile din umbră ale celor două constrângeri asociate, orele de prelucrare mecanică și orele de prelucrare

manuală, respectiv se cere evaluarea costurilor unei ore în plus (sau în minus) de prelucrare mecanică și al unei ore în plus (sau în minus) de prelucrare manuală.

8. Metoda matematică de aflare a prețurilor din umbră

Ocupându-ne pentru început de orele de prelucrare mecanică, presupunem că avem la dispoziție încă o oră (numărul total de ore de muncă fiind în continuare de 180) și calculăm diferența de venit care ar rezulta în acest fel, după cum urmează.

Constrângerile asociate devin:

Orele de prelucrare mecanică $4x_1 + 2x_2 = 101$ (respectiv 100 ore originale +1);

Orele de prelucrare manuală $4x_1 + 6x_2 = 180$ (nemodificat).

Rezolvând acest sistem de două ecuații cu două necunoscute, se obțin valori noi pentru x_1 și x_2:

$x_1 = 15{,}375$ și $x_2 = 19{,}75$ și făcând înlocuirile în funcția-obiectiv se obține un nou venit

$$3(15{,}375) + 4(19{,}75) = 125{,}125£,$$

Venitul original = 125£,

Diferența = 0,125£.

Astfel, o singură oră în plus de prelucrare mecanică determină o creștere a veniturilor cu 0,125£, care reprezintă prețul din umbră pentru ora de prelucrare mecanică.

Într-o manieră asemănătoare poate fi tratată problema pentru o oră de lucru manual în plus.

Noile constrângeri în cazul unei ore suplimentare de lucru manual (în condițiile în care orele de prelucrare mecanică rămân tot 100):

– orele de prelucrare mecanică $4x_1 + 2x_2 = 100$,

– orele de prelucrare manuală $4x_1 + 6x_2 = 181$,

iar prin rezolvarea sistemului de două ecuații cu două necunoscute se obține următorul rezultat: $x_1 = 14{,}875$ și $x_2 = 20{,}25$.

$$\text{Noul venit} = 3(14{,}875) + 4(20{,}25) = 125{,}625£,$$

Venitul original = 125£,

Diferența = £0,625£.

$\therefore$ Prețul din umbră pentru o oră de muncă manuală = £0,625.

Cele două valori obținute pot fi verificate, făcându-se totalul între produșii numărului real de ore de prelucrare mecanică și evaluarea unei ore în plus și prețul scontat al unei ore în plus, după cum urmează:

$$100(0{,}125£) + 180(0{,}625£) = 125£.$$

Note:

a) Rezultate similare ar fi obținute în fiecare caz dacă s-ar repeta calculele pentru o oră de prelucrare mecanică sau de prelucrare manuală în minus. Puteți încerca să faceți verificarea.

b) Prețurile din umbră calculate mai înainte nu se pot aplica decât în cazul constrângerilor asociate. Dacă, de exemplu, ar fi disponibile tot mai multe ore de prelucrare mecanică, se presupune că la un moment dat prelucrarea mecanică nu ar mai constitui o resursă limitată, condiție în care ar reieși o altă constrângere care s-ar putea asocia. Acest punct de vedere va fi dezvoltat mai departe, în paragraful 12.

9. Metoda formulării duale pentru prețurile din umbră

Fiecare problemă de programare liniară are și o formulare *inversă* sau *duală*. Dacă problema originală, numită *problemă primară*, este o problemă de maximizare, atunci în formulare duală, aceasta ar fi o problemă de minimizare și viceversa. Așa, de exemplu, pornind tot de la problema din exemplul 1, care în forma ei primară este o problemă de maximizare, duala sa ar fi o problemă de minimizare. Rezolvarea problemei duale dă la iveală prețurile din umbră determinate de constrângerile asociate, de unde și denumirea alternativă dată prețurilor din umbră și anume, *prețuri duale*.

Etapele în formularea și rezolvarea problemei duale pentru soluția exemplului 1 sunt prezentate în continuare.

Părțile relevante ale formulării inițiale integrale care apar în soluție sunt:

Să se maximizeze	$3x_1$	$+$ $4x_2$			(funcția-obiectiv)
Sub constrângerile	$4x_1$	$+$ $2x_2$	$\leq$	100	(orele de prelucrare mecanică)
	$4x_1$	$+$ $6x_2$	$\leq$	180	(orele de prelucrare manuală)

(Constrângerile C, D și E nu sunt asociate, astfel încât nu vor apărea în soluție).

Problema duală de minimizare (formularea duală) se formulează prin inversarea formulării de mai înainte și anume transformând coloanele în rânduri și rândurile în coloane astfel:

Să se minimizeze	$100M$	$+$ $180L$			(în original coloana constrângerilor)
Sub constrângerile	$4M$	$+$ $4L$	$\geq$	3	(în original coloana x_1)
	$2M$	$+$ $6L$	$\geq$	4	(în original coloana x_2)

Constrângerile actuale pot fi rezolvate ca orice sistem de două ecuații cu două necunoscute:

$$4M + 4L = 3,$$
$$2M + 6L = 4.$$

Se obțin următoarele valori: $M = 0{,}125$ și $L = 0{,}625$, în care se pot recunoaște cu ușurință evaluările realizate deja la paragraful 8.

Dacă aceste prețuri duale sunt introduse în funcția-obiectiv a problemei duale, se vor obține exact aceleași rezultate ca și în cazul problemei primare.

respectiv 100(0,125) + 180(0,625) = 125£.

Acest rezultat este identic cu cel al problemei primare și așa va fi în orice caz.

Note:

a) Formularea duală prezentată mai înainte reprezintă forma restrânsă a formulării duale integrale. Această abordare a fost posibilă în acest caz deoarece problema primară a fost deja rezolvată, știindu-se așadar că trei dintre constrângeri nu erau asociate (și anume C, D și E).

b) Formularea duală va fi dezvoltată în continuare, în capitolul 19.

10. Interpretarea prețurilor din umbră

Prețul din umbră în cazul unei constrângeri asociate constituie un mijloc important de orientare, deoarece indică manageriatului veniturile suplimentare care ar putea fi realizate prin creșterea cu o unitate a unei resurse limitate. De exemplu, prețul din umbră al orelor de prelucrare manuală calculat anterior este de 0,625£/oră.Aceasta înseamnă că manageriatul poate să se pregătească să plătească până la 0,625£ pe ora suplimentară de prelucrare manuală pentru a-și asigura mai multe ore de muncă. Dacă costul actual al orei de muncă manuală ar fi, de exemplu, de 4£, atunci manageriatul ar putea să plătească până la 4,625£ pentru fiecare oră suplimentară.

Este important să se înțeleagă faptul că numai pentru constrângerile asociate pot exista prețuri duale sau din umbră. Este într-o oarecare măsură o chestiune intuitivă, deoarece nu ar exista nici un motiv pentru care să se plătească suplimentar pentru o resursă care este, oricum, în surplus. În exemplul 1, constrângerile C, D și E au prețul din umbră zero.

11. Analiza sensibilității

Așa cum am arătat anterior, analiza sensibilității este procesul prin care se schimbă anumite valori din problemă, urmărindu-se efectul acestor schimbări asupra soluției. Scopul principal constă în stabilirea sensibilității soluției optime la schimbările operate. În cazul problemelor cu două necunoscute, respectiv problemele care admit soluția grafică, analiza sensibilității poate să fie vizualizată ca fiind procesul de alterare a unghiului, distanței față de originea axelor și a dreptelor din grafic.

De exemplu,am menționat mai înainte că dacă ar deveni disponibile din ce în ce mai multe ore de prelucrare mecanică, s-ar ajunge la un anumit punct în care numărul orelor de prelucrare mecanică ar înceta să mai fie o restricție. Întâmplător, acesta este chiar intervalul asupra căruia se aplică prețul din umbră de 0,125£. Să presupunem

că manageriatul unei întreprinderi dorește să știe ce surplus de ore de prelucrare mecanică este necesar pentru a putea considera că acest parametru nu mai este o constrângere asociată, aceeași informație fiind cerută și în privința orelor de prelucrare manuală.

Numărul orelor suplimentare de prelucrare mecanică

Dacă analizați cu atenție fig. 17.9, veți constata că soluția originară a problemei de la exemplul 1este reprodusă împreună cu noi constrângeri denumite (A) și (B), trasate cu linii punctate.

Să ne ocupăm mai întâi de A, constrângerea referitoare la numărul disponibil de ore de prelucrare mecanică, pentru care dreapta punctată este reprezentată paralel cu dreapta reprezentând constrângerea originară, până la intersecția constrângerilor B și D, unde (A) încetează să mai fie asociată, așa cum este pe marginea noii arii de fezabilitate.

Intersecția dreptelor B și D de pe grafic, notată cu punctul M, este rezolvată aplicând metoda matematică a sistemului de două ecuații cu două necunoscute, în modul obișnuit:

$$4x_1 + 6x_2 = 180 \text{ (constrângerea B)}$$
$$x_1 = 20 \text{ (constrângerea D).}$$

După efectuarea calculelor se obține $x_1 = 20$ și $x_2 = 16$ (2/3), valori care reprezintă noul plan de producție prin prisma ipotezei că se mărește numărul de ore de prelucrare mecanică. În acest punct sunt necesare 113 (1/2) ore de prelucrare mecanică, respectiv 4(20) + 2[16 (2/3)] = 113 (1/3).

Numărul originar de ore de prelucrare mecanică a fost 100, astfel încât ar fi necesar numai un număr de 13 (1/3) ore suplimentare de prelucrare mecanică astfel încât constrângerea determinată de acest parametru să fie neasociată. Numărul de 13 (1/3) ore reprezintă de asemenea intervalul pentru care se aplică prețul din umbră de 0,125£.

Numărul orelor suplimentare de prelucrare manuală

Pentru calculul acestei valori se urmează același model ca și în cazul anterior, însă raportat la punctul în care constrângerea C intersectează axa x_2, respectiv punctul L. Nu mai este necesar un sistem de două ecuații cu două necunoscute, în acest caz răspunsul fiind evident: 40 unități de x_2 și nici una de x_1.

Făcând înlocuirile în relația reprezentând constrângerile privitoare la orele de prelucrare manuală, obținem:

$$4(0) + 6(40) = 240.$$

Așadar, numărul de ore suplimentare de prelucrare manuală este de 60 (respectiv 240 – 180), iar prețul din umbră de 0,625£ se aplică intervalului de la 180 la 240 de ore.

Notă. Deși acest lucru nu apare explicit în fig. 17.9, schimbarea constrângerilor realizată ca în cazul anterior determină modificări ale ariei de fezabilitate.

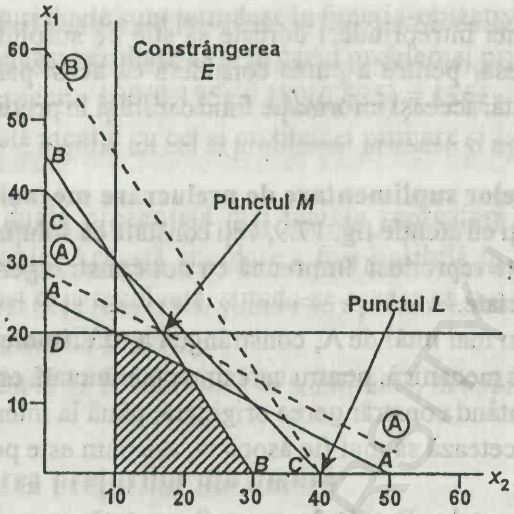


Fig. 17.9. Analiza de sensibilitate pentru exemplul 1.

12. Alte aspecte ale analizei de sensibilitate

Dacă *nivelul* constrângerii este modificat, noua dreaptă reprezentată pe grafic este paralelă cu dreapta originară de constrângere. Acesta este cazul constrângerilor referitoare la orele de prelucrare mecanică și la orele de prelucrare manuală despre care am discutat în paragraful 11.

Pe de altă parte, dacă *se schimbă relațiile* dintre variabilele constrângerilor sau din funcția-obiectiv, se modifică și panta segmentelor de dreaptă.

Exemplu

Se presupune că manageriatul este capabil să ajusteze veniturile obținute de pe urma lui x_1 din exemplul 1, în condițiile în care toți factorii rămân constanți. Manageriatul dorește să știe:

a) Care ar trebui să fie noua pondere, redusă, *pentru x_1, astfel încât soluția optimă să se schimbe din starea actuală de 15 unități x_1 și 20 de unități de x_2?*

b) Reciproc, care ar trebui să fie noua pondere, mărită, *astfel încât să aibă loc o schimbare?*

Soluția

Funcția-obiectiv originară, $3x_1 + 4x_2$, avea o pantă dată de:

$$\frac{\text{Coeficientul lui } x_2}{\text{Coeficientul lui } x_1}, \text{ respectiv } \tfrac{4}{3} \text{ sau } \frac{1\ \frac{1}{3}}{1}.$$

Pentru această pantă există o soluție optimă la intersecția constrângerilor A și B. Reducând coeficientul (ponderea sau producția) lui x_1, rezultă o accentuare a pantei dreptei funcției-obiectiv.

În acest moment, panta funcției-obiectiv este mai orizontală decât constrângerea B, a cărei pantă este de $\tfrac{3}{4}$ sau $\frac{1\ \frac{1}{2}}{1}$.

Rezultă de aici, prin urmare, că atunci când panta funcției-obiectiv se accentuează, apropiindu-se de panta constrângerii B (de fapt, devenind mai accentuată doar marginal), soluția optimă se modifică și ea.

Astfel, noua pantă minimă a funcției-obiectiv trebuie să fie $\frac{x_2}{x_1} = \frac{1\frac{1}{2}}{1}$.

Coeficientul lui x_2 rămânând nemodificat (respectiv 4), x_1 poate să fie dedus ca fiind $\frac{4}{1\frac{1}{2}} = 2\frac{2}{3}$.

La limita inferioară a acestei valori, funcția-obiectiv arată că punctul optim este punctul B din fig. 18.9. În aceste condiții, soluția va fi

Zero unități x_1 și 30 unități x_2.

Ponderea $30 \times 4£ = 120$.

Reciproc, atunci când ponderea lui x_1 *crește*, panta funcției-obiectiv devine *mai puțin înclinată*. Panta maximă pe care o poate avea este cea a constrângerii A.

$$\therefore \text{Panta maximă} = \text{panta constrângerii } A = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{Cum } x_2 = 4 \text{ și } \frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{2},\ x_1 = 8.$$

Astfel, atunci când venitul realizat din x_1 se află la limita de 8£, noul punct optim este reprezentat de intersecția constrângerilor A, D și E. Soluția în acest caz va fi

$20x_1$, $10x_2$

Venitul: $20(8£) + 10(4£) = 200£ + 0$, valoare marginală.

13. Rezumat

a) Programarea liniară este o tehnică de alocare a resurselor în condițiile în care există un obiectiv oarecare, de exemplu maximizarea veniturilor, care se cere a fi optimizat în condițiile funcționării anumitor constrângeri referitoare la resurse.

b) Toți factorii implicați – obiective și constrângeri – trebuie să se afle în relații liniare unii cu ceilalți.

c) Problemele de programare liniară trebuie formulate de la început într-o manieră standardizată, constând în expresia matematică corespunzătoare funcției-obiectiv urmată de o serie de constrângeri, acordându-se o atenție deosebită pentru a stabili dacă aceste constrângeri sunt de genul „mai mare sau egal" (≥) sau de genul „mai mic sau egal (≤)".

d) Problemele de programare liniară sunt probleme de maximizare și de minimizare.

e) Dacă o problemă de programare liniară are două necunoscute, poate să fie rezolvată prin metoda grafică, indiferent care este numărul constrângerilor care

operează şi indiferent dacă este vorba despre o problemă de maximizare sau de minimizare.

f) Pentru rezolvarea grafică este necesară alegerea a două axe perpendiculare reprezentând cele două necunoscute, după care se plotează segmentele de dreaptă reprezentând constrângerile.

g) După reprezentarea tuturor constrângerilor se stabileşte care este aria de fezabilitate. Aria de fezabilitate este suprafaţa de pe grafic care nu contravine nici unei constrângeri. Orice punct din interiorul sau de la limita ariei de fezabilitate reprezintă o posibilă soluţie, deşi nu în mod necesar soluţia optimă.

h) Pentru determinarea soluţiei optime este necesar să se traseze un segment de dreaptă reprezentând funcţia-obiectiv. Pentru problemele de maximizare, această dreaptă reprezintă în general veniturile, iar în cazul problemelor de minimizare reprezintă costurile.

i) În cazul unei probleme de maximizare, poziţia optimă în raport cu aria de fezabilitate este situată în *cel mai îndepărtat punct din dreapta* care este atins de dreapta veniturilor, în timp ce în cazul problemelor de minimizare aceasta este situată în *cel mai îndepărtat punct din stânga*, intersectat de dreapta costurilor.

j) Valorile exacte ale oricărui punct de intersecţie pot fi calculate pe baza sistemelor de ecuaţii cu două necunoscute.

k) Preţul din umbră sau dual reprezintă estimări ale resurselor limitate.

l) Preţurile din umbră pot fi calculate prin metode aritmetice sau prin metoda formulării duale.

m) Preţurile din umbră arată surplusul de venit pe unitatea de produs pentru o constrângere asociată.

n) Analiza sensibilităţii are la bază schimbarea valorilor şi a relaţiilor din problema originală, urmărindu-se modificările suferite de soluţia originală.

14. De reţinut

a) În cazul subiectelor de examen, nu este întotdeauna foarte simplu de formulat problema în maniera standard. Dacă aveţi dificultăţi în această privinţă, concentraţi-vă asupra următoarelor întrebări principale: Care sunt necunoscutele? Care este obiectivul? Ce factori dirijează atingerea acestui obiectiv?

b) Ca în orice situaţie în care se cere trasarea unui grafic, se impun o serie de încercări repetate pentru stabilirea unei proporţii adecvate pentru scările unităţilor de măsură ale celor două axe. Reţineţi că nu este absolut necesară respectarea aceleiaşi scări de măsură pe ambele axe, dar odată aleasă o scară pentru una dintre acestea, ea va trebui respectată riguros până la sfârşit.

c) Deşi exemplele care au fost utilizate în cadrul acestui capitol au avut ca soluţii numere întregi, soluţiile fracţionare sunt şi ele posibile şi apar chiar destul de frecvent.

d) Pentru problemele simple de programare liniară, identificarea punctului optim(respectiv punctul X din figurile 17.7 și 17.8) este foarte simplă și poate fi realizată în cea mai mare parte a cazurilor fără a fi necesară trasarea dreptei funcției-obiectiv. Cu toate acestea, nu recomand folosirea acestor „scurtături", toți studenții trebuind să fie conștienți că trebuie mai înainte să traseze dreapta funcției-obiectiv pentru a identifica punctul optim.

e) Există un mod simplu de verificare a rezultatelor, constând în înlocuirea valorilor obținute pentru necunoscute în relațiile matematice ale constrângerilor, verificarea referindu-se în aceste condiții la respectarea constrângerilor.

f) Soluția *se află întotdeauna la un vârf al graficului*, respectiv la intersecția a două sau mai multe drepte de constrângere.Localizarea vârfului corect este utilă, în unele cazuri, pentru evaluarea coordonatelor în cazul în care se aplică rezolvarea sistemului de două ecuații cu două necunoscute. Acest aspect poate să fie foarte important în condițiile în care este dificil de ales între două puncte, ambele seturi de coordonate putând fi evaluate, iar valorile funcțiilor-obiectiv rezultante, comparate.

g) Orice problemă primară are o problemă duală, care este o problemă de minimizare dacă primara este de maximizare sau de maximizare dacă primara este de minimizare.

Întrebări de autoevaluare. *Numerele dintre paranteze se referă la numerotarea paragrafelor.*

1. Ce tipuri de probleme de programare liniară pot fi rezolvate prin metoda grafică? (2)
2. Câte constrângeri pot exista într-o problemă care se rezolvă prin metoda grafică? (2)
3. Ce este aria de fezabilitate? (3)
4. Cum se determină punctul optim în raport cu aria de fezabilitate? (3)
5. Care sunt deosebirile în privința aplicării metodei grafice pentru rezolvarea unei probleme de maximizare și a uneia de minimizare? (4)
6. Cum se aplică sistemele de două ecuații cu două necunoscute în rezolvarea problemelor de programare liniară? (5)
7. Ce sunt prețurile din umbră sau duale? (6)
8. Ce metode pot fi aplicate pentru calculul prețurilor din umbră? (7)
9. Ce este problema primară și ce este problema duală? (9)
10. Care sunt indicațiile pe care prețul din umbră le transmite manageriatului? (10)
11. Ce este analiza sensibilității și cum se realizează? (11 și 12)

Exerciții cu răspunsuri

1. O firmă realizează două produse, X și Y, cu o pondere de 8£ și respectiv 10£ pe unitatea de produs.

Datele de producție sunt următoarele (per unitate):

	Ore de muncă	Materialul A	Materialul B
X	3	4	6
Y	5	2	8
	500	350	800

Să se formuleze problema de programare liniară în maniera standardizată.

2. Să se rezolve modelul de la întrebarea 1 prin metoda grafică.

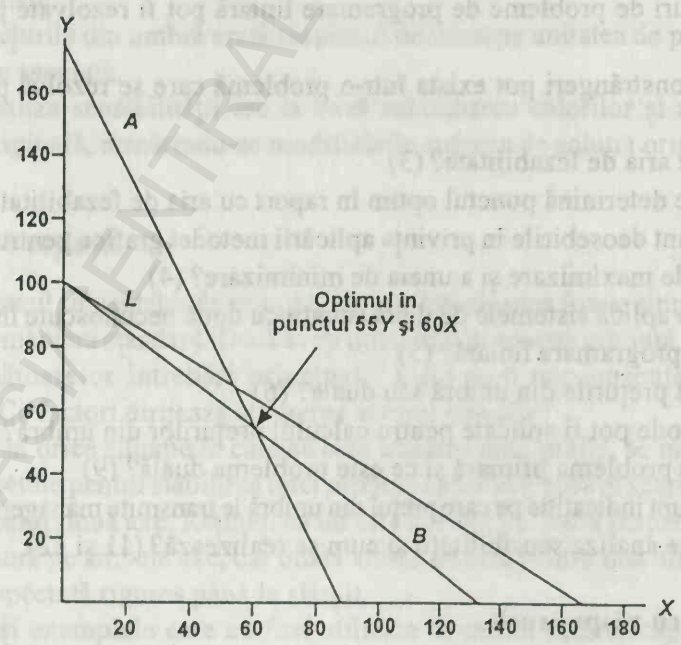
3. Să se calculeze prețurile din umbră pentru constrângerile asociate și să se interpreteze rezultatul.

Rezultatele exercițiilor

1.

	Să se maximizeze	$8X + 10Y$
Constrângeri	Prelucrare manuală	$3X + 5Y \leq 500$ (L)
	Materialul *A*	$4X + 2Y \leq 350$ (A)
	Materialul *B*	$6X + 8Y \leq 800$ (B)

2.



BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Soluția optimă $55Y$ și $60X$
dând $60(8) + 55(10) = 1030$£.

3. **Calculul prețului din umbră**

Soluția optimă	Obiectivul	$8X + 10Y$
	Constrângerile	$4X + 2Y \leq 350$
		$6X + 8Y \leq 800$
Formularea duală	Să se minimizeze	$350S + 800T$
	Constrângerile	$4S + 6Y \geq 8$
		$2S + 8T \geq 10$
	Rezolvarea	$4S + 6T = 8$
		$2S + 8T = 10$
		$= 5T = 6$
		$\therefore T = 1,2$ = materialul B
		$S = 0,2$ = materialul A
Verificarea	$350(0,2) + 800(1,2) =$	
	$= 1030$ £.	

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

18. PROGRAMAREA LINIARĂ – METODA SIMPLEX DE MAXIMIZARE

1. Obiective

După parcurgerea acestui capitol:
- veți putea aplica metoda simplex de rezolvare a problemelor de maximizare;
- veți ști cum se realizează tabelul simplex inițial;
- veți putea identifica elementul pivot pentru a forma următorul tablou;
- veți ști cum se identifică soluția optimă;
- veți ști cum se interpretează tabelul simplex final;
- veți ști cum se aplică analiza de sensibilitate în cazul metodei simplex.

2. Definiția metodei simplex

Este o metodă pas-cu-pas de rezolvare a problemelor de programare liniară, prin care se poate avansa progresiv, dintr-o anumită poziție, sau să spunem producție-zero, cu venituri zero, până într-o poziție caracterizată prin producție maximă, care poate fi maximizată mai mult. Fiecare pas reprezintă o soluție fezabilă și fiecare pas reprezintă un rezultat mai bun decât cel obținut anterior, respectiv un venit mai mare în cazul problemelor de maximizare sau un cost mai redus, în cazul problemelor de minimizare. Aparatul matematic din spatele metodei simplex este destul de complex, dar scopul acestui capitol nu este acela de a vă explica motivele pentru care metoda funcționează, ci să vă arate cum să o aplicați.

3. Formularea modelului simplex

Pentru aplicarea metodei simplex, în primul rând este necesar să se formuleze problema în maniera standardizată explicată anterior, în cadrul capitolului 16. Vă amintiți că aceasta constă în formularea unei funcții-obiectiv și a unui număr de constrângeri, care sunt, din punct de vedere matematic, inegalități de tipul $\geq$ sau $\leq$. După formularea problemei în maniera standard, aceste inegalități trebuiesc transformate în ecuații. Aceasta se datorează faptului că nu se poate opera aritmetic asupra unei inegalități. De exemplu, dacă un fabricant are două produse A și B, care necesită 3 și respectiv 5 ore de prelucrare mecanică pe o freză, care este disponibilă

un număr limitat, de 320 de ore, într-o perioadă de timp, această limitare se va exprima matematic în forma standard după cum urmează:

$$3x_1 + 5x_2 \leq 320,$$

unde x_1 reprezintă unitățile de produs *A;*

x_2 – unitățile de produs *B.*

Această relație matematică este transformată într-o ecuație adăugându-se o variabilă suplimentară, numită *variabilă de stagnare*:

$$3x_1 + 5x_2 + x_3 = 320.$$

Variabila de stagnare, în acest caz x_3, reprezintă capacitatea neutilizată din cadrul constrângerii, putând lua practic orice valoare între **320 de ore** (respectiv poziția corespunzătoare nivelului zero al producției, maximul neutilizării capacității respective) și **0 ore** (respectiv poziția corespunzătoare utilizării la maximum a capacității).

Note:

a) Fiecare constrângere va avea propria sa variabilă de stagnare.

b) O dată inclusă această variabilă de stagnare în cadrul ecuației constrângerii, prelucrarea prin metoda simplex îi va acorda în mod automat valorile corespunzătoare la fiecare derulare.

4. Un exemplu de maximizare simplex

Vom folosi următorul exemplu de maximizare pentru ilustrarea pas-cu-pas a aplicării metodei simplex.

Exemplul 1

O companie realizează trei produse: A, B și C. Aceste produse aduc venituri de 8£, 5£ și respectiv 10£.

Pentru realizarea acestor produse este necesar un utilaj care are o perioadă disponibilă de funcționare în următorul interval de 400 de ore.

Pentru prelucrarea unei unități din fiecare produs sunt necesare 2, 3 și respectiv 1 oră.

În momentul respectiv sunt disponibile numai 150 de componente speciale care intră în alcătuirea produselor A și C.

În aceeași perioadă sunt disponibile 200 kg dintr-un aliaj special. Pentru realizarea produsului A sunt necesare 2 kg/unitatea de produs, iar pentru C sunt necesare 4 kg/unitatea de produs.

În plus, mai există un acord cu o uniune comercială care impune să nu se depășească un număr de 50 de unități din produsul B pe perioada respectivă de timp.

Compania dorește să știe care este planul de producție care maximizează veniturile.

Pasul 1. Se formulează problema în maniera standard cunoscută, după cum urmează:

Să se maximizeze	$8x_1$	+	$5x_2$	+	$10x_3$			
Sub constrângerile	$2x_1$	+	$3x_2$	+	x_3	$\leq$	400	(orele de prelucrare mecanică)
	x_1			+	x_3	$\leq$	150	(limita stocului de componente speciale)
	$2x_1$			+	$4x_3$	$\leq$	200	limita cantității de aliaj
			x_2			$\leq$	50	constrângerea impusă asupra vânzărilor
	$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$							

unde: x_1 este numărul de unități din produsul A;
x_2 – numărul de unități din produsul B;
x_3 – numărul de unități din produsul C.

Pasul 2. Se transformă inegalitățile reprezentând constrângerile în egalități, adăugând câte o variabilă de stagnare pentru fiecare constrângere, după cum urmează:

Să se maximizeze	$8x_1$	+	$5x_2$	+	$10x_3$					
Sub constrângerile	$2x_1$	+	$3x_2$	+	x_3	+	x_4	=	400	
	x_1			+	x_3	+	x_5	=	150	
	$2x_1$			+	$4x_3$	+	x_6	=	200	
			x_2			+	x_7	=	50	

Notă: x_4, x_5, x_6, x_7 sunt variabilele de stagnare, reprezentând capacitatea neutilizată a subiectului constrângerii.

Pasul 3. Se realizează tabelul simplex inițial, aranjând funcția-obiectiv și ecuațiile constrângerilor formulate la pasul 2 (tabelul 18.1).

Tabelul 18.1

Tabelul simplex inițial

Variabila soluției	Produse			Variabile de stagnare				Soluția
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_4	2	3	1	1	0	0	0	400
x_5	1	0	1	0	1	0	0	150
x_6	2	0	4	0	0	1	0	200
x_7	0	1	0	0	0	0	1	50
Z	8	5	10	0	0	0	0	0

Note:

a) Se observă că valorile din acest tabel sunt indicii funcției-obiectiv și a constrângerilor de la pasul 2.

b) Variabila „Z" a fost introdusă pentru funcția-obiectiv, reprezentând venitul total.

c) Din tabel se vede că $x_4 = 400$, $x_5 = 150$, $x_6 = 200$, $x_7 = 50$ și $Z = 0$.

d) Tabelul arată o primă soluție fezabilă, respectiv cea a unei producții zero, care este însoțită de un venit zero și o utilizare a capacității de producție de asemeni zero, reprezentată de valorile zero ale variabilelor x_4, x_5, x_6 și x_3.

e) Deși fezabil, acest plan de producție poate să fie în mod evident îmbunătățit, iar aceasta se poate realiza după cum urmează:

Pasul 4. Se îmbunătățește soluția fezabilă anterioară, realizând un număr maxim de unități din produsul care aduce venitul maxim, respectiv suma cea mai mare de la rubrica Z. Numărul de unități care pot fi realizate este limitat de una sau mai multe constrângeri care intervin după cum urmează.

Se alege cel mai mare venit de la rubrica Z, respectiv 10, de la coloana x_3.

Se împart numerele care apar la coloana soluțiilor cantitative la numerele care apar pe coloana x_3, respectiv:

$$400 : 1 = 400$$
$$150 : 1 = 150$$
$$200 : 4 = 50$$
$$50 : 0 = \text{se ignoră.}$$

Acum vom selecta rândul care dă cel mai redus rezultat (în acest caz rândul x_6). Se încercuiește elementul comun care apare atât pe coloană (x_3) cât și pe rând (x_6), acesta reprezentând *elementul pivot* (tabelul 18.2).

Tabelul 18.2

Tabelul simplex inițial

Variabila soluției	Produse			Variabile de stagnare				Soluția
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_4	2	3	1	1	0	0	0	400
x_5	1	0	1	0	1	0	0	150
→ x_6	2	0	[4]	0	0	1	0	200
x_7	0	1	0	0	0	0	1	50
Z	8	5	10	0	0	0	0	0
			↑					

Pasul 5. Se împart toate elementele de pe rândul identificat (x_6) la valoarea elementului pivot (4) și se schimbă variabila soluției cu cea care se află în capul coloanei identificate (x_3), după cum urmează:

Vechiul rând

x_6	2	0	4	0	0	1	0	200

Se face împărțirea la 4, schimbându-se variabila din fața noului rând:

			Noul rând						
x_3	1/2	0	1	0	0	1/4	0	=	50

Se introduce acest nou rând în tabelul 18.3.

Tabelul 18.3

Al doilea tabel simplex

Rândul nr.	Variabila soluției	Produse			Variabile de stagnare				Soluția
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1	x_4	2	3	1	1	0	0	0	400
2	x_5	1	0	1	0	1	0	0	150
3	x_6	1/2	0	1	0	0	1/4	0	50
4	x_7	0	1	0	0	0	0	1	50
5	Z	8	5	10	0	0	0	0	0

Note:

a) Numerotarea rândurilor a fost introdusă pentru a simplifica explicațiile care urmează în text, coloana respectivă (nr. crt.) nefăcând parte din tabloul simplex.

b) Se va observa că al doilea tabel este identic cu tabelul inițial, cu excepția rândului 3, ale cărui valori au fost recalculate anterior.

c) Rândul 3 indică faptul că se pot produce 50 de unități din produsul x_3.

Pasul 6. Ca urmare a producerii unui număr de 50 de unități din produsul x_3, este necesară reajustarea celorlalte rânduri, pentru a avea reprezentarea numărului corespunzător de ore, componente speciale etc., care sunt utilizate și pentru a se figura venitul realizat de cele 50 de unități de x_3. Aceasta se realizează scăzând pe rând, din valorile de pe fiecare rând valorile corespunzătoare de pe rândul 3, ceea ce are ca efect înlocuirea tuturor valorilor de pe coloana elementului pivot cu zero. Pentru ca fiecare rând să rămână în continuare o egalitate din punct de vedere matematic, este necesar, bineînțeles, ca fiecare element de pe rândul respectiv să fie modificat, de ambele părți ale semnului de egalitate. Folosind rândul 1 din tabelul 18.3, vom exemplifica operația descrisă înainte.

	Rândul 1	x_4	2	3	1	1	0	0	0	= 400
minus	rândul 3	x_3	1/2	0	1	0	0	1/4	0	= 50
Rezultă un nou rând		x_4	1 1/2	3	0*	1	0	-1/4	0	= 350

Note:

a) Acest nou rând trebuie inserat într-un al treilea tabel, împreună cu toate celelalte rânduri modificate și rândul 3 din tabelul al doilea.

b) Scopul acestei operații efectuate cu rândurile tablourilor simplex constă în reducerea la zero (notată cu *). În acest caz a fost necesară o simplă operație de

scădere, dar există situații în care pentru obținerea valorii zero (*) sunt necesare și alte operații, cu precizarea că toate acestea au ca bază rândul 3.

Celelalte rânduri din tabelul 18.3 sunt operate într-un mod asemănător.

	Rândul 2	x_5	1	0	1	0	1	0	0	= 150
minus	rândul 3	x_3	1/2	0	1	0	0	1/4	0	= 50
Rezultă un nou rând		x_5	1/2	0	0*	0	1	-1/4	0	= 100

Rândul 4 nu necesită nici o operație, deoarece elementul de pe coloana x_3 este deja zero.

	Rândul 5	Z	8	5	10	0	0	0	0	= 0
minus 10 ×	rândul 3	x_3	5	0	10	0	0	2 1/2	0	= 500
Rezultă un nou rând		Z	3	5	0*	0	1	-2 1/2	0	= -500

Note:

a) Pentru a se ajunge la zero (*) a fost necesar să se înmulțească rândul 3 cu 10 și apoi să se scadă din rândul 5.

b) Valoarea „-500" de la capătul noului rând al lui Z reprezintă venitul realizat de cele 50 de unități de x_3 la un preț de 10£ unitatea, respectiv 500£. Semnul minus este rezultatul operațiilor matematice pe care le presupune metoda Simplex, faptul că valoarea venitului are semnul negativ fiind nesemnificativ.

Pasul 7. După efectuarea tuturor operațiilor pe rânduri se poate trece la realizarea tabelului 18.4.

Tabelul 18.4.

Rândul nr.	Variabila soluției	Produse			Variabile de stagnare				Soluția
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
6 (rândul 1 - rândul 3)	x_4	1 1/2	3	0	1	0	-1/4	0	350
7 (rândul 2 - rândul 3)	x_5	1/2	0	0	0	1	-1/4	0	100
8 (adică rândul 3)	x_3	1/2	0	4	0	0	1/4	0	50
9 (adică rândul 4)	x_7	0	1	0	0	0	0	1	50
10 (rândul 5 - 10 × rândul 3)	Z	3	5	0	0	0	-2 1/2	0	-500

Note:

a) Toate rândurile noi, rezultate în urma operațiilor efectuate între rândurile tabelului 18.2, operații descrise la pasul 6, au fost introduse în tabelul 18.3.

b) Rândurile au fost numerotate din nou, în continuarea tabelului 18.2, menționându-se între paranteze și operațiile matematice efectuate în cadrul pasului 6 și care au dus la obținerea noilor rânduri.

De exemplu, rândul 10 a fost obținut prin înmulțirea rândului 3 cu rândul 10, rezultatul fiind scăzut din rândul 5.

Pasul 8. Pentru realizarea în continuare a altor tabele, care eventual să conducă la soluția optimă, se repetă pașii de la 4 la 7, până când nu mai rămâne nici o valoare pozitivă pe rândul Z.

Din rândul 10 se observă că venitul maxim este 5.

∴Se alege coloana x_2.

Numerele pozitive de pe coloana x_2 sunt împărțite la numerele reprezentând soluțiile pe cantități și apoi se alege rezultatul cel mai mic,

adică	rândul 6	350	:	3	=	116 (2/3)
	rândul 7	100	:	0		se ignoră
	rândul 8	50	:	0		se ignoră
	rândul 9	50	:	1	=	50

∴Se alege rândul 9, se identifică elementul pivot și valoarea soluției este modificată în funcție de rezultatul operării coloanei x_2, după cum urmează:

Rândul 9	x_2	0	1	0	0	0	0	1	=	50

Având în vedere că elementul pivot este deja 1, nu mai este necesară nici o intervenție la acest nivel, dar celelalte elemente ale coloanei elementului pivot (x_2) trebuie aduse la zero, aplicându-se operații pe rânduri pornindu-se de la rândul 9, după cum urmează:

	Rândul 6	x_4	1 1/2	3	0	1	0	-1/4	0	= 350
minus 3 ×	rândul 9	x_2	0	3	0	0	0	0	3	= 150
Rezultă un nou rând		x_2	1 1/2	0*	0	1	0	-1/4	-3	= 200

Notă. Este obligatoriu să înmulțim rândul 9 cu 3 pentru a obține zero pe coloana x_2 (0*).

Rândurile 7și 8 nu necesită operarea pentru că elementele care le aparțin pentru coloana x_2 sunt deja zero.

	Rândul 10	Z	3	5	0	0	0	-2 1/2	0	= -500
minus 5 ×	rândul 9	x_2	0	5	0	0	0	0	5	= 250
Rezultă un nou rând		Z	3	0*	0	0	0	-2 1/2	-5	= -750

Noul rând obținut poate să fie introdus într-un al patrulea tabel (tabelul 18.5).

Tabelul 18.5

Al patrulea tabel al metodei simplex

Rândul nr.	Variabila soluției	Produse			Variabile de stagnare				Soluția
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
11 (rândul 6 - rândul 9)	x_4	1 1/2	3	0	1	0	-1/4	-3	350
12 (ca rândul 7)	x_5	1/2	0	0	0	1	-1/4	0	100
13 (ca rândul 8)	x_3	1/2	0	4	0	0	1/4	0	50
14 (rând pivot ca rândul 9)	x_2	0	1	0	0	0	0	1	50
15 (rândul 10 - 5 × rândul 9)	Z	3	0	0	0	0	-2 1/2	-5	-750

Note:

a) Tabelul 18.5 arată că s-ar putea produce câte 50 de unități din produsele B și C (x_2 și $x_3 = 50$).

b) Ca rezultat al acestui nivel al producției se obține un venit de 750£ ($Z = -750$).

Pasul 9. Deoarece mai există încă un număr pozitiv pe rândul lui Z (3, corespunzând coloanei x_1), procesele de operare pe rânduri continuă în aceeași manieră ca și până acum. Se alege coloana x_1, iar numerele pozitive de pe colana aceasta sunt împărțite la valoarea soluțiilor pe cantități, alegându-se rezultatul cel mai mic.

Rândul 11	200	:	1 1/2	=	133 1/3
Rândul 12	100	:	1/2	=	200
Rândul 13	50	:	1/2	=	100
Rândul 14	50	:	0	=	se ignoră

∴Se alege rândul 13, se identifică elementul pivot și valoarea soluției este modificată în funcție de rezultatul operării coloanei x_1, după cum urmează:

Rândul 13	x_1	1/2	0	1	0	0	1/4	0	=	50

Elementul pivot trebuie transformat în 1, astfel încât întregul rând este înmulțit cu 2, după cum urmează:

Rândul 13	x_1	1	0	2	0	0	1/2	0	=	100

Și celelalte elemente ale coloanei x_1 trebuie aduse la zero, prin operarea cunoscută a rândurilor.

	Rândul 11	x_4	1 1/2	0	0	1	0	-1/4	-3	= 200
minus 1/2 ×	rândul 13	x_1	1 1/2	0	3	0	0	3/4	0	= 150
Rezultă un nou rând		x_4	0*	0	-3	1	0	-1	-3	= 50

	Rândul 12	x_5	1/2	0	0	1	1	-1/4	0	= 100
minus 1/2 ×	rândul 13	x_1	1/2	0	1	0	0	1/4	0	= 50
Rezultă un nou rând		x_5	0*	0	-1	0	1	-1/2	0	= 50

Rândul 14 nu necesită operare pentru că elementul din coloana x_1 este deja zero.

	Rândul 15	Z	3	0	0	0	0	-2 1/2	-5	= -750
minus 3 ×	rândul 13	x_1	3	0	6	0	0	- 11/2	0	= 300
Rezultă un nou rând		Z	0*	0	-6	0	0	-4	-5	= -1050

Noile rânduri obținute pot să fie introduse acum într-un al cincilea tabel (tabelul 18.6).

Tabelul 18.6

Al cincilea tabel al metodei simplex

Rândul nr.	Variabila soluției	Produse			Variabile de stagnare				Soluția
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
16 (rândul 11 - 1 1/2 × rândul 18)	x_4	0	0	-3	1	0	-1	-3	50
17 (rândul 12 - 1/2 × rândul 18)	x_5	0	0	-1	0	1	-1/2	0	50
18 (rând pivot 2 × rândul 13)	x_1	1	0	2	0	0	1/2	0	100
19 (ca rândul 14)	x_2	0	1	0	0	0	0	1	50
20 (rândul 15 - 3 × rândul 13)	Z	0	0	-6	0	0	-4	-5	-1050

Cum în rândul lui Z nu mai apare nici o valoare pozitivă, înseamnă că s-a ajuns la soluția optimă.

Pasul 10. Tot ceea ce a mai rămas de făcut este să se culeagă un maximum de informații din acest al cincilea tabel.

Combinația optimă de produse:

x_1 = 100, respectiv se produc100 de unități din produsul A;

x_2 = 50, respectiv se produc 50 de unități din produsul B.

Valorile variabilelor de stagnare:

$$x_6 = 4£, \quad x_7 = 5£.$$

Evaluarea variabilelor de stagnare poate fi confirmată, iar venitul total poate să fie verificat prin înmulțirea valorilor obținute pentru variabilele de stagnare (4£ și 5£) cu valoarea constrângerilor inițiale, după cum urmează:

$$\begin{array}{lrcr} x_6 & 4£ \times 200 & = & 800£ \\ x_7 & 5£ \times 50 & = & 250 \\ & & & \hline & & & 1050£ \end{array}$$

Evaluările pentru celelalte două variabile de stagnare sunt:

$$x_4 = 0 \quad \text{și} \quad x_5 = 0.$$

Aceasta înseamnă că nu se câștigă nimic prin modificarea numărului de ore de prelucrare mecanică și a constrângerilor referitoare la resursele de materiale. S-a ajuns la acest rezultat deoarece există încă resurse neutilizate, atât în ceea ce privește orele de prelucrare mecanică, cât și în ceea ce privește resursele materiale (câte 50 din fiecare). Ca regulă generală, pentru constrângeri se obține o evaluare numai în măsura în care sunt utilizate la maximum.

Aceste evaluări sunt cunoscute sub denumirea de *prețuri din umbră* sau *prețuri duale* sau *multiplicatori simplex*. O constrângere nu poate să aibă preț din umbră sau dual decât în cazul în care este asociată, respectiv atunci când este utilizată pe deplin, prețul din umbră arătând valoarea cu care ar crește funcția-obiectiv dacă constrângerea ar fi mărită cu o unitate. În exemplul prezentat, dacă ar fi mai fost disponibil încă un kilogram de aliaj acesta ar fi adus un venit suplimentar de 4£.

La rezolvarea problemelor de programare liniară prin mijloace grafice, prețurile din umbră trebuie calculate separat. Însă în cazul aplicării metodei Simplex, ele reprezintă un produs secundar care rezultă din algoritmul de rezolvare.

Note:

a) Fiecare variabilă din coloana de variabile care reprezintă soluția finală are o semnificație specială, care a fost detaliată mai înainte.

b) Utilizând pasul 10 drept ghid, se pot interpreta semnificațiile variabilelor reprezentând soluțiile și evaluările din rândul Z al tablourilor intermediare.

c) Învățați pe de rost. Rezolvarea unei probleme simplex obișnuite cu trei necunoscute este un proces foarte rapid din momentul în care stăpâniți pașii intermediari.

5. Limitări mixte

Exemplul de maximizare anterior conținea constrângeri care erau, toate, de tipul „mai mic sau egal" (≤). Aceasta este o situație frecvent întâlnită, dar există și anumite situații în care apare o combinație de constrângeri de tipul „mai mic sau egal" și „mai mare sau egal". Cauza cea mai frecventă a apariției limitărilor de genul „mai mare sau egal" este reprezentată de cerința producerii cel puțin a unui anumit

număr de unități din diverse produse. În asemenea situații, cea mai simplă abordare constă în reducerea valorii celorlalte constrângeri cu valorile respective. După aceasta problema se rezolvă ca orice problemă de maximizare, adăugându-se la sfârșit valorile care în prima fază au fost scăzute la soluțiile optime obținute prin metoda simplex normală. Această metodă este detaliată în următorul exemplu.

6. Exemplu conținând constrângeri mixte

Să presupunem că o problemă de programare liniară a fost adusă în următoarea formă standard:

Exemplul 2

Funcția-obiectiv

Să se maximizeze		$5x_1$	+	$3x_2$	+	$4x_3$			
Sub	a	$3x_1$	+	$12x_2$	+	$6x_3$	≤	660	Constrângere de prelucrare mecanică
constrângerile	b	$6x_1$	+	$6x_2$	+	$3x_3$	≤	1230	Constrângere de prelucrare manuală
	c	$6x_1$	+	$9x_2$	+	$9x_3$	≤	990	Constrângere de componente
	d					x_3	≥	10	Constrângere de vânzări

unde x_1, x_2 *și* x_3 *reprezintă unități din produsele A, B și C.*

Numai una dintre contrângeri, d este de tipul ≥ *astfel încât vom lua decizia de a produce cea mai mică cantitate posibilă pentru a satisface constrângerea d, respectiv 10 unități de* x_3. *Necesarul de resurse pentru producerea de 10 unități din* x_3 *trebuie scăzut din totalul disponibil în constrângerile a, b, și c, după cum urmează:*

Constrângeri:	a)	$3x_1$	+	$12x_2$	+	$6x_3$	≤	660	–	(6 x 10).
	b)	$6x_1$	+	$6x_2$	+	$3x_3$	≤	1230	–	(3 x 10).
	c)	$6x_1$	+	$9x_2$	+	$9x_3$	≤	990	–	(9 x 10).

Note:

a) În fiecare dintre cazuri expresia dintre paranteze reprezintă coeficientul lui x_3 pentru fiecare constrângere înmulțită cu cele 10 unități care trebuie produse.

b) O metodă alternativă de lucru cu constrângerea de tipul ≥ constă în înmulțirea ambilor termeni cu –1, schimbând și semnul inegalității, respectiv:

$$(x_3 \geq 10) \times -1$$

$$-x_3 \leq -10$$

Această constrângere poate, după aceasta, să fie prelucrată în modul cunoscut.

După eliminarea constrângerii d, și operarea reducerilor celorlalte constrângeri, poate fi realizat tabelul inițial simplex (tabelul 18.7).

Tabelul 18.7

Tabelul simplex inițial pentru exemplul 2

Constrângerea modificată	Variabila soluției	Produse			Variabile de stagnare			Soluția
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
a)	x_4	3	12	6	1	0	0	600
b)	x_5	6	6	3	0	1	0	1200
c)	x_6	6	9	9	0	0	1	900
	Z	5	3	4	0	0	0	0

Notă. Avem un model normal de problemă de maximizare simplex cu câte o variabilă de stagnare pentru fiecare constrângere, care se rezolvă în continuare prin exact același procedeu care a fost prezentat în prima parte a capitolului.

După parcurgerea procedurii simplex obișnuite se obține tabelul 18.8.

Tabelul 18.8

Tabelul simplex final pentru exemplul 2

Variabila soluției	Produse			Variabile de stagnare			Soluția
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	0	7 1/2	1 1/2	1	0	-1/2	150
x_5	0	-3	-6	0	1	-1	300
x_1	1	1 1/2	1 1/2	0	0	1/6	150
Z	0	-4 1/2	-3 1/2	0	0	-5/6	750

Soluția rezultată din tabelul 18.8: 150 unități din x_1 cu care se obține un venit de 750£.

La acesta se adaugă producția necesară de a fi realizată pentru satisfacerea constrângerii d 20 unități din x_2, care aduc un venit de 40£.

∴Soluția totală este 150 unități din x_1 plus 10 unități din x_2, aduce un venit total de 790£.

Așa cum am arătat și anterior în cursul pasului 10, tabelul 18.8 al metodei simplex poate să fie interpretat după cum urmează:

Capacitatea neutilizată: $x_4 = 150$ (150 ore prelucrare mecanică neutilizate).
$x_5 = 300$ (300 ore prelucrare manuală neutilizate).

Produse care nu se realizează

Din tabelul 18.8 se observă că valorile x_2 și x_3 nu apar în soluția simplex, având valori pe rândul Z de -4 1/2 și -31/2. Știm deja că se produc 10 unități de x_3, iar din tabel observăm că 10 unități din x_3 costă 35£, sumă care se reduce din venit. Orice unitate din x_2 care se produce ar reduce în mod similar veniturile cu 4,50£ pe unitatea produsă.

Evaluarea variabilei de stagnare

O singură constrângere (respectiv constrângerea c) este utilizată complet, căpătând astfel o evaluare. Tabelul 18.8 arată că pentru fiecare unitate suplimentară care poate să fie produsă, veniturile cresc cu 5/6£.

La o metodă alternativă de rezolvare a limitărilor mixte se utilizează ceea ce se numește *variabilă artificială* alături de variabilele de stagnare. Dar această metodă depășește scopurile acestei lucrări.

7. Compararea soluțiilor grafică și simplex

Metoda simplex poate să fie aplicată în rezolvarea problemelor care au un număr oarecare de necunoscute, deci chiar și a celor care au două necunoscute și pot fi rezolvate cu ajutorul metodei grafice. Pentru ilustrarea ambelor metode de obținere a soluțiilor acestor probleme, vom apela la exemplul 1 de la capitolul 17 care a fost rezolvat grafic și căruia îi vom da acum o rezolvare aplicând metoda simplex.

Exemplul 1 reprodus din capitolul 17

Să se maximizeze $3x_1 + 4x_2$

$4x_1$	+	$2x_2$	$\leq$	100	A
$4x_1$	+	$6x_2$	$\leq$	180	B
x_1	+	x_2	$\leq$	40	C
x_1			$\leq$	20	D
		x_2	$\geq$	10	E

Această problemă este introdusă în tabelul 18.9 împreună cu o variabilă de stagnare pentru fiecare dintre cele cinci constrângeri, iar constrângerii E i se aplică înmulțirea cu -1 pentru a inversa semnul inegalității.

Tabelul 18.9

Echivalentul punctului 0 din fig. 18.1

Variabila soluției	Produse		Variabile de stagnare					Soluția
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_3	4	2	1	0	0	0	0	100
x_4	4	6	0	1	0	0	0	180
x_5	1	1	0	0	1	0	0	40
x_6	1	0	0	0	0	1	0	20
x_7	0	-1	0	0	0	0	1	-10
Z	3	4	0	0	0	0	0	0

Problema este rezolvată în continuare prin procedeul simplex standard. Fiecare pas duce la îmbunătățirea rezultatului oferit de pasul anterior și se continuă procesul acesta până la obținerea soluției optime. Următoarele tabele (tabelul 18.10-18.12) arată situația după fiecare modificare a tabelului 18.9, fiecare găsindu-și referința încrucișată în fig. 18.1 care este o reproducere a rezolvării grafice.

Tabelul 18.10

Echivalentul punctului 1 din fig. 18.1

Variabila soluției	Produse		Variabile de stagnare					Soluția
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_2	0	1	0	0	0	0	-1	10
x_3	4	0	1	0	0	0	2	80
x_4	4	0	0	1	0	0	6	120
x_5	1	0	0	0	1	0	1	30
x_6	1	0	0	0	0	1	0	20
Z	0	0	0	0	0	0	4	-40

Din tabelul 18.10 se observă că ar trebui produse $10x_2$ la un venit de 40£. Primele patru constrângeri prezintă surplusuri de 80, 120, 30 și respectiv 20. *Nu* este o soluție optimă, având în vedere că în rândul Z mai există valori pozitive.

Tabelul 18.11

Echivalentul punctului 2 din fig. 18.1

Variabila soluției	Produse		Variabile de stagnare					Soluția
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_2	0,667	1	0	0,167	0	0	0	30
x_3	2,667	0	1	-0,333	0	0	0	40
x_4	-0,333	0	0	-0,167	0	0	0	10
x_5	1	0	0	0	1	1	0	20
x_6	0,333	0	0	0,167	0	0	1	20
Z	0,333	0	0	-0,667	0	0	0	-120

Din tabelul 18.11 se observă că ar trebui produse $30x_2$ cu un venit de 120£. Toate constrângerile prezintă surplusuri, cu excepția orelor de prelucrare manuală. Nu este soluția optimă pentru că mai avem o valoare pozitivă în rândul Z.

Tabelul 18.12

Echivalentul punctului 3 din fig. 18.1

Variabila soluției	Produse		Variabile de stagnare					Soluția
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	1	0	0,375	0,125	0	0	0	15
x_2	0	1	-0,25	0,25	0	0	0	20
x_5	0	0	-0,125	-0,125	1	0	0	5
x_6	0	0	-0,375	0,125	0	1	0	5
x_7	0	0	-0,25	0,25	0	0	1	10
Z	0	0	-0,125	-0,625	0	0	0	-125

Tabelul 18.12 conține soluția optimă și conține toată informația obținută anterior. Soluția optimă $15x_1$ și $20x_2$, aducând un venit de 125£.

Prețurile din umbră: $x_1 = 0{,}125$£ și

$x_2 = 0{,}625$£.

Constrângerile neasociate C, D și E au surplusuri de 5, 5 și respectiv 10 unități.

Notă. Observând cum interacțiunile metodei simplex se deplasează de la un vârf la altul, superior, al ariei de fezabilitate este posibil să se obțină o imagine și o înțelegere mai bună a procesului.

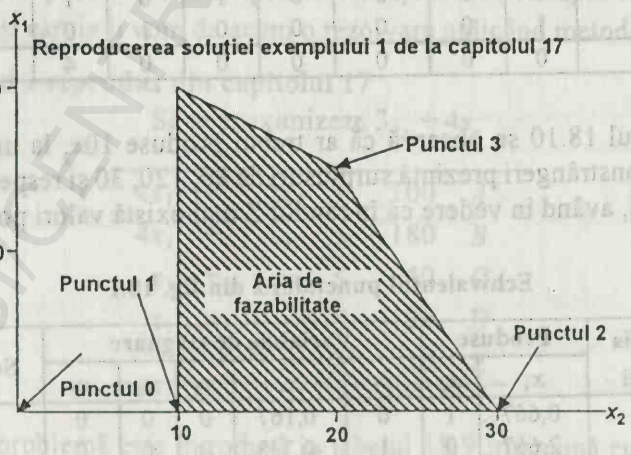


Fig. 18.1. Comparația dintre metoda grafică și metoda simplex.

8. Rezumatul metodei simplex

Schema1 (v. pag. următoare) ne oferă un rezumat concis al metodei simplex, pe ea fiind făcute o serie de notații care facilitează referința la anumite puncte cheie din cuprinsul acestui capitol.

9. Analiza sensibilității și metoda simplex

În practică, aproape toate problemele de programare liniară sunt rezolvate cu ajutorul unor programe speciale de calculator, care cuprind numeroase facilități pentru testarea sensibilității soluției la modificările survenite în datele problemei. În mod curent, aceste programe includ enunțarea modificărilor în cazul schimbării următoarelor elemente:

a) Nivelul resurselor și al constrângerilor.

b) Coeficienții funcției-obiectiv și ai constrângerilor.

Cea mai mare parte a acestor forme de analiză a sensibilității nu intră în scopurile acestei lucrări și materiei cu care este ea corelată. Cu toate acestea, o anumită formă a analizei sensibilității este totuși acoperită, constituind un punct de interes în cadrul examenelor și al concursurilor. Este vorba despre aspectele referitoare la variațiile nivelurilor totale ale resurselor/constrângerilor.

Ilustrarea se va face pornind tot de la exemplul 1 de la capitolul 17, care a fost rezolvat și prin metoda simplex în cadrul paragrafului 7 de mai înainte.

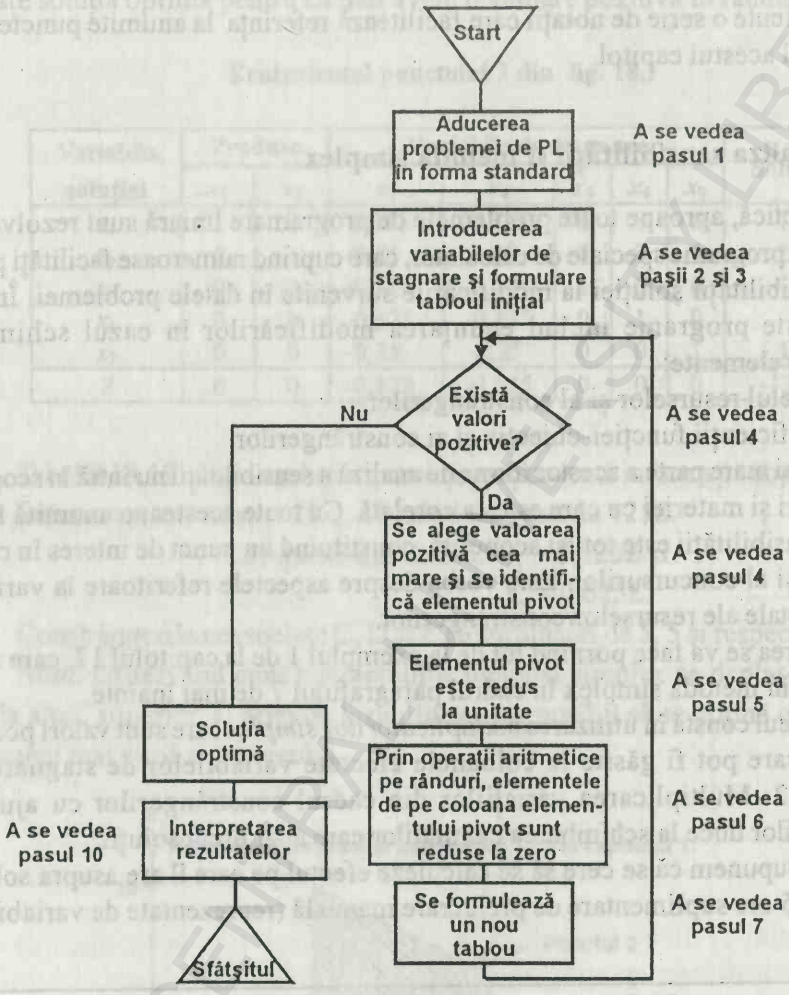
Procedeul constă în utilizarea *multiplicatorilor simplex* care sunt valori pozitive și negative care pot fi găsite în coloanele afectate variabilelor de stagnare din tabelul 18.12. Multiplicarea variațiilor din cadrul constrângerilor cu ajutorul multiplicatorilor duce la schimbarea cantităților care apar drept soluții.

Să presupunem că se cere să se calculeze efectul pe care îl are asupra soluției un număr de 5 ore suplimentare de prelucrare manuală (reprezentate de variabila de stagnare x_3).

Multiplicatori pentru x_3	×	Modificarea constrângerii	=	Modificarea soluției	+	Soluția originală	=	Noile soluții
0,375	×	5	=	1,875	+	15	=	16,875
-0,25	×	5	=	-1,25	+	20	=	18,75
-0,125	×	5	=	-0,625	+	5	=	4,375
-0,375	×	5	=	-1,875	+	5	=	3,125
-0,25	×	5	=	-1,25	+	10	=	8,75
-0,125	×	5	=	-0,625	+	(-125)	=	-125,625

Astfel, dacă am avea la dispoziție încă 5 ore de prelucrare manuală, rezultatul va fi 16,875 unități din x_1 și 18,75 unități din x_2, cu un venit suplimentar de 125,625£.

Celelalte valori din coloana soluțiilor sunt, ca și anterior, nivelurile neutilizate ale constrângerilor C, D și E, reprezentate de variabilele de stagnare x_5, x_6 și x_7.



Schema 1 a metodei simplex.

10. De reținut

a) Metoda simplex nu este capabilă să opereze cu mai multe necunoscute decât metoda grafică, dar produce în mod automat un volum mai mare de informații.

b) În fiecare tabel se va observa că, în coloana soluțiilor, există un singur rezultat unitar (1), în rest valorile fiind nule (0).

c) Evaluările de pe rândul lui Z din tabelul 18.8 sunt cunoscute sub denumirea de prețuri din umbră sau costuri din umbră. Aceste evaluări pot avea o importanță foarte mare în evaluarea veniturilor realizate de pe urma resurselor limitate.

d) În anumite situații, întrebările de examen cer numai realizarea tabelului inițial (tabelul 18.2) al metodei simplex. În acest scop, trebuie să vă asigurați o practică suficientă în definirea problemelor în maniera standard și în realizarea tabelelor inițiale ale metodei simplex.

e) Există și situații în care este dat tabelul simplex final, cerându-se interpretarea rezultatelor. Utilizând informațiile conținute în acest capitol, asigurați-vă că ați înțeles foarte bine semnificația fiecărei cifre care apare pe tabelul final al metodei simplex.

Întrebări de autoevaluare. *Numerele dintre paranteze se referă la numerotarea paragrafelor.*

1. Poate fi aplicată metoda simplex în cazul problemelor cu mai mult de două necunoscute? (1)
2. Să se definească metoda simplex. (2)
3. De ce este necesară folosirea variabilelor de stagnare? (3).
4. Ce ne arată tabloul inițial al metodei simplex? (4, pasul 3)
5. Ce este un element pivot? (4, pasul 4)
6. Cum se identifică soluția optimă pe tabelul final al metodei simplex? (tabelul 6)
7. Ce informații pot fi obținute din tabloul final al metodei simplex? (4, pasul 10)
8. Cum se rezolvă problemele în care apar limitări mixte? (5)
9. Se pot face asociații între diferitele tablouri simplex și stadiile de trasare a graficului? (7)
10. Care sunt pașii principali în rezolvarea unei probleme prin metoda simplex? (8)
11. Care este una dintre metodele de analiză a sensibilității în cazul metodei simplex? (9)

Exerciții cu răspunsuri

1. O firmă realizează trei produse X, Y și Z, fiecare aducând un venit de 20£, 18£ și respectiv 16£. Datele de producție sunt următoarele:

	Ore de prelucrare mecanizată	Ore de prelucrare manuală	Materiale
X	5	2	8
Y	3	5	10
Z	6	3	3
Disponibil	3000	2500	10 000

Să se realizeze tabelul inițial pentru metoda simplex, cuprinzând și numărul necesar de variabile de stagnare.

2. Să se realizeze prima modificare a tabelului inițial de la exemplul 1.

3. Să se interpreteze tabelul final al metodei simplex care este prezentat în continuare.

	A	*B*	*C*	*S1*	*S2*	*S3*	*S4*	
S2	0	0	0	1 1/4	1	2	-1,5	520
A	1	0	0	3/4	0	1 3/4	3,0	276
B	0	1	0	0	0	3	1	68
C	0	0	1	-1,5	0	-1 1/4	1,5	127
	0	0	0	-6	0	-12,5	-25	-48 600

în care *A* este produsul A

B – produsul B

C – produsul C

*S*1 – ore de prelucrare manuală pentru variabila de stagnare

*S*2 – materiale pentru variabila de stagnare

*S*3 – ore de prelucrare mecanică pentru variabila de stagnare

*S*4 – restricția de vânzare *A* pentru variabila de stagnare.

Răspunsuri la exerciții

1. **Tabelul simplex inițial**

Variabila de soluție	*X*	*Y*	*Z*	S_1	S_2	S_3	
S_1	5	3	6	1	0	0	3000
S_2	2	5	3	0	1	0	2500
S_3	8	10	3	0	0	1	10 000
	20	18	16	0	0	0	0

2. **Prima trecere în revistă**

Variabila de soluție	*X*	*Y*	*Z*	S_1	S_2	S_3	
X	1	3/5	6/5	1/5	0	0	600
S_2	0	3 4/5	3/5	-1/5	1	0	1300
S_3	0	5 1/5	-6 3/5	-1 3/5	0	1	5200
	0	6	-8	-4	0	0	12 000

3. Se vor produce 276A, 68B și 127C aducând o contribuție de 48 600£.
520 de unități de material neutilizate și un preț din umbră de:
– ore de prelucrare mecanică = 12,5£;
– restricții de vânzări = 25£.

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

19. PROGRAMAREA LINIARĂ – METODA SIMPLEX DE MINIMIZARE

1. Obiective

După studierea acestui capitol:

- veți ști cum să folosiți metoda simplex pentru rezolvarea problemelor de minimizare în cadrul programelor lineare;
- veți înțelege cum se inversează o formulă standard de program linear;
- veți fi capabil să interpretați tabelul final al unei probleme de minimizare.

2. Exemplu de minimalizare

Vom folosi următorul exemplu simplu ca bază pentru explicarea metodelor care se aplică.

Exemplul 1

Un producător de substanțe chimice fabrică doi compuși chimici, arkon și zenon în diverse proporții, necesare pentru prepararea ulterioară a trei produse: A, B și C. El dorește să producă cel puțin 150 de unități din A, 200 unități din B și 60 unități din C. Din fiecare tonă de arkon pot fi produse 3 tone de A, 5 tone de B și 3 tone de C. Din fiecare tonă de zenon poate produce 5 tone de A, 5 tone de B și 1 tonă de C.

Știind că arkonul costă 40£/tonă și zenonul 50£/tonă, spuneți ce metodă îi veți recomanda producătorului pentru minimizarea costurilor de producție.

Pasul 1. Exact așa cum s-a arătat mai înainte, formulați problema în maniera standard, după cum urmează:

Funcția obiectivă		
Să se minimizeze	$40x_1 + 50x_2$	
Sub constrângerile	$3x_1 + 5x_2 \geq 150$	Constrângerea impusă de produsul A
	$5x_1 + 5x_2 \geq 200$	Constrângerea impusă de produsul B
	$3x_1 + x_2 \geq 60$	Constrângerea impusă de produsul C

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,$$

unde: x_1 este numărul de tone de arkon

x_2 – numărul de tone de zenon.

Notă. Vom reduce exemplul de mai sus la o simplă problemă de minimizare, toate constrângerile fiind de tipul „≥".

Pasul 2. Formulați *inversul* sau *dualul* exemplului de mai înainte. Cu alte cuvinte, transformați problema de minimizare într-o problemă de maximizare, prin crearea unei *coloane* separate pentru fiecare *limitare* și a unui *rând de constrângere* pentru fiecare *element* din funcția-obiectiv, după cum urmează:

Să se minimizeze	150*A*	+	200*B*	+	60*C*		
Sub constrângerile	3*A*	+	5*B*	+	3*C*	≤	40
	5*A*	+	5*B*	+	*C*	≤	50

Note:

a) În pasul 1 sunt două coloane (x_1 și x_2) și trei constrângeri (produsele A, B și C). Acum sunt trei coloane (câte una pentru fiecare constrângere originală) și două rânduri pentru constrângeri (câte unul pentru fiecare element al funcției obiective originale, x_1 și x_2).

b) Există un invers sau un dual pentru fiecare problemă de programare liniară, ceea ce înseamnă că fiecărei probleme de maximizare îi corespunde o problemă duală de minimizare, iar fiecărei probleme de minimizare îi corespunde o problemă duală de maximizare. Datorită faptului că rezolvarea unei probleme de maximizare prin metoda simplex este simplă și lipsită de complicații, rezultă în mod firesc posibilitatea transformării problemelor de minimizare în probleme de maximizare.

c) Trebuie să acordați o atenție deosebită faptului că în cazul inversiunii, coloana orginală a cantităților (150, 200 și 60) a devenit funcția-obiectiv, iar costurile originale (40 și 50) au devenit niveluri ale constrângerilor.

d) În noua situație, constrângerile sunt de genul „mai mic sau egal decât", după cum este și normal în cazul unei probleme de maximizare.

e) Problema principală este cunoscută sub denumirea de *primară* iar inversul ei este cunoscut sub denumirea de *dual*ă.

f) Maximizarea unui proces $C(x)$ este același lucru cu minimizarea procesului $-C(x)$, de unde rezultă că minimizarea procesului $C(x)$ este același lucru cu maximizarea procesului $-C(x)$, iar constrângerile $F(x) \geq B$ au aceeași semnificație cu $-F(x) \leq -B$.

Pasul 3. Avem de rezolvat o problemă de maxim și pentru aceasta vom realiza un tabel simplex inițial (tabelul 19.1), cuprinzând și variabilele pasive după cum urmează:

Tabelul 19.1

Tabelul simplex inițial

Rândul	*A*	*B*	*C*	Variabila de stagnare		Costul
				S_1	S_2	
S_1	3	5	3	1	0	40
S_2	5	5	1	0	1	50
Cantitate	150	200	60	0	0	0

Pasul 4. Aplicați pas cu pas metoda care v-a fost prezentată anterior până când obțineți tabelul final (tabelul 19.2) care constituie, de fapt, soluția de optimizare, ceea ce înseamnă că pe rândul de jos nu mai apar valori pozitive.

Tabelul 19.2

Tabelul simplex final

Rândul	*A*	*B*	*C*	Variabila de stagnare		Costul
				S_1	S_2	
B	0	1	6/5	-3/10	-3/10	5
A	1	0	-1	-1/2	+1/2	5
Cantitate	0	0	-30	-25	-15	-1750

Pasul 5. Tabelul 19.2 este rezultatul firesc al algoritmului simplex de maximizare. Pentru a obține soluțiile problemei orginale de minimizare, este necesar să se facă anumite diferențieri față de interpretarea standard după cum urmează.

Soluția optimă

Cantitățile care trebuie achiziționate

Numerele de sub coloanele corespunzând rubricii variabilelor pasive reprezintă cantitățile de materii prime ce trebuie achiziționate,

adică: $S_1 = -25$ Se achiziționează 25 de tone de arkon.

$S_2 = -15$ Se achiziționează 15 tone de zenon.

Costuri totale

Numărul de la baza coloanei costurilor reprezintă costul total,

adică: –1750 reprezintă un cost de 1750£

$(25 \times 40£ + 15 \times 50£ = 1750£)$.

Evaluarea constrângerilor

Rândurile B și A indică costurile corespunzătoare schimbării limitărilor de 200B și 150A. Dacă oricare dintre aceste limitări este modificată cu o singură unitate, costul total va varia cu 5£. Cu alte cuvinte, acestea sunt prețurile din umbră, deci

$200 \times 5 + 150 \times 5 = 1750£$.

Supraproducția. Valoarea –30 care apare sub coloana C indică o supraproducție de 30 de unități.

De exemplu:

	A	*B*	*C*
25 tone arkon	$25 \times 3 = 75$	$25 \times 5 = 125$	$25 \times 3 = 75$
15 tone zenon	$15 \times 5 = 75$	$15 \times 5 = 75$	$15 \times 1 = 15$
	150	200	90
	= minim necesar	= minim necesar	= supraproducție de 30 de unități

Note:

a) Odată înțelese procesul de inversare și metoda de interpretare, problemele de minimizare nu vor părea mai dificile decât cele de maximizare.

b) În exemplul pe care l-am folosit au apărut numai două necunoscute (și anume numărul de tone de arkon și zenon), deci problema putea fi rezolvată și prin mijloace grafice. Metoda simplex însă este valabilă indiferent care ar fi numărul de necunoscute.

3. Rezumat

a) Transformarea simplă prezentată în acest capitol poate fi aplicată în cazul tuturor problemelor de minimizare în care constrângerile sunt de genul „mai mare sau egal". Metoda simplex poate fi aplicată tuturor combinațiilor, dar am acoperit numai o categorie restrânsă de probleme.

b) După formularea problemei în maniera standard, această formulare trebuie *inversată*, ceea ce înseamnă că: coloanele vor fi transformate în rânduri, iar rândurile cu constrângeri vor fi transformate în coloane. În acest fel, am obținut o problemă de maximizare.

c) Problema de maximizare este rezolvată urmând pașii obișnuiți ai metodei simplex.

d) Se consideră că s-a obținut optimizarea procesului în mod similar și anume când pe rândul de jos apar numai valori negative.

e) Soluția problemei de minimizare poate fi citită direct din tabelul final. Cantitățile de materii prime pot fi găsite la baza coloanelor corespunzătoare variabilelor pasive, iar costul total la baza coloanei costurilor.

4. De reținut

a) Majoritare sunt problemele de maximizare, dar studenții trebuie să fie capabili să rezolve și probleme de minimizare de genul celor prezentate în acest capitol.

b) Limitările nonnegative care apar în cazul problemelor de maximizare nu sunt necesare în acest caz, deoarece se face precizarea că constrângerile sunt de genul „mai mare sau egal".

c) În cazul în care puteți opta și aveți o problemă de minimizare cu numai două variabile, rezolvați-o prin metoda grafică prezentată anterior.

d) Procesul de transformare a unei probleme primare într-una duală poate conduce, în anumite cazuri, și la simplificarea obținerii rezultatului. De exemplu, dacă o problemă primară conține trei variabile decizionale și două constrângeri, nu poate fi rezolvată grafic. Dacă aplicați totuși metoda grafică, vă recomandăm să interpretați cu atenție soluția grafică. Rețineți că ceea ce urmăriți este obținerea soluției problemei primare originale.

Întrebări de autocontrol. *Numerele din paranteze se referă la numerotarea paragrafelor.*

1. Ce este dualul unei probleme de minimizare în domeniul programării liniare? (2, pasul 2)

2. De ce se practică în mod uzual transformarea unei probleme de minimizare într-o problemă de maximizare? (2)

3. Cum se interpretează tabelul simplex final? (2, pasul 5)

Exerciții și rezolvări

1. Găsiți dualul următoarei probleme:

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{Să se minimizeze} & 30A & + & 60B & + & 20C & & \\
\text{Sub constrângerile} & 5A & + & 10B & + & 15C & \geq & 2000 \\
 & 2A & + & 3B & + & 1C & \geq & 300 \\
 & 8A & + & 6B & + & 4C & \geq & 650
\end{array}
$$

2. Găsiți dualul următoarei probleme:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\text{Să se minimizeze} & 200X & + & 250Y & - & 100Z & + & 50W & & \\
\text{Sub constrângerile} & 6X & + & 10Y & - & 3Z & & & \geq & 55 \\
 & 9X & + & 7Y & & & + & 3W & \geq & 40
\end{array}
$$

$$X, Y, Z, W \geq 0$$

BCU "ȘTIINȚA" UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvarea exercițiilor

1. Să se maximizeze $2000L + 300M + 650N$
   Sub constrângerile
   $$\begin{aligned} 5L + 2M + 8N &\leq 30 \\ 10L + 3M + 6N &\leq 60 \\ 15L + 1M + 4N &\leq 20 \end{aligned}$$
   $$L, M, N \geq 0$$

2. Să se maximizeze $55R + 40S$
   Sub constrângerile
   $$\begin{aligned} 6R + 9S &\leq 200 \\ 10R + 7S &\leq 250 \\ 3R + &\geq 100 \\ (\text{sau } -3R &\leq -100) \\ 3S &\leq 50 \\ S &\geq 0 \end{aligned}$$

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

20. TRANSPORTUL

1. Obiective

După parcurgerea acestui capitol:

- veți putea recunoaște problemele de transport;
- veți ști să realizați tabelul inițial de transport;
- veți putea realiza alocațiile inițiale fezabile;
- veți ști cum se poate îmbunătăți alocarea inițială prin calcularea prețurilor din umbră;
- veți ști când să introduceți o destinație falsă;
- veți ști cum se aplică tehnica transportului pentru problemele de maximizare.

2. Definirea problemelor de transport

Problema tipică de transport include un număr de surse de aprovizionare (de exemplu depozite) și un număr de destinații (de exemplu magazine de vânzare detaliată). Obiectivul obișnuit constă în minimizarea costurilor de transport de la diverse depozite până la magazinele de vânzare în detaliu. Cererea majoră este aceea că trebuie să existe un preț constant de transport pentru unitatea de produs, respectiv dacă transportul unei unități de la depozitul A la magazinul X costă 10£, atunci transportul a 5 unități va costa 50£. Această cerință este cerința de liniaritate fundamentală pentru toate formele de programare liniară.

3. Tehnica de transport

Deși metoda de rezolvare a problemelor de transport care este descrisă în continuare diferă aparent de metoda simplex, există și o serie de similarități fundamentale:

a) Este un proces gradual, pas-cu-pas.

b) Pornește de la o soluție fezabilă și fiecare soluție care decurge din aceasta este de asemenea fezabilă.

c) În fiecare stadiu se realizează teste pentru a se stabili dacă nu s-ar putea reduce costurile de transport.

d) Optimul este atins atunci când nu se mai pot face nici un fel de reduceri ale costurilor.

4. Exemplu de transport

Voi folosi următorul exemplu simplu ca bază pentru explicarea pas-cu-pas a tehnicii de transport.

Exemplul 1

O firmă care livrează echipament de birotică are trei depozite localizate în orașe diferite. Firma primește comenzi pentru un total de 15 birouri complet echipate de la un număr de 4 clienți. În total, în cele trei depozite există 15 dotări complete pentru birouri, iar managerialul dorește să limiteze costurile de livrare, furnizând fiecărui client dotările stocate în cel mai apropiat depozit.

Detalii referitoare la disponibilități, cerințe și costuri de transport pentru fiecare dotare sunt date în tabelul 20.1:

Notă. În cadrul tabelului 20.1 sunt cuprinse prețurile de transport pentru o singură dotare completă, de la depozit la client. De exemplu, costul este de £14 pentru transportul unei dotări de la depozitul Y la clientul B (și 28£ pentru 2 dotări, 42£ pentru 3 dotări etc.).

Tabelul 20.1

		Dotări	Clienți *A*	Clienți *B*	Clienți *C*	Clienți *D*	Total
		3	3	4	5	15	
Disponibil	Depozitul *X*	2	13£	11	15	20	Costul de trasport pe dotare
	Depozitul *Y*	6	17£	14	12	13	
	Depozitul *Z*	7	18£	18	15	12	
	Total	15					

Pasul 1. Se realizează o alocare inițială fezabilă pentru livrări. Metoda utilizată pentru această soluție inițială nu afectează valoarea soluției optime, dar o atenție specială acordată acestei faze inițiale poate să reducă numărul trecerilor în revistă. Metoda care va fi prezentată în această lucrare constă în alegerea celei mai ieftine rute în primă fază, după care se alocă un număr maxim posibil și apoi se trece la căutarea următoarei rute mai ieftine și așa mai departe. Rezultatul unei asemenea alocări este prezentat în tabelul 20.2.

Tabelul 20.2

			Cererea			
			A	*B*	*C*	*D*
			3	3	4	5
Disponibil	*X*	2 unități		2(1)		
	Y	6 unități	1(4)	1(3)	4(2)	
	Z	7 unități	2(5)			5(2)

Notă. Numerele din tabel reprezintă livrările de dotări, iar numerele dintre paranteze reprezintă succesiunea în care sunt efectuate, pornind de la costul cel mai redus, respectiv:

			£
1.	2 unități $X \rightarrow B$ 11£/unitate	Costul total	22
2.	4 unități $Y \rightarrow C$ 12£/unitate	Costul total	48
	5 unități $Z \rightarrow D$ 12£/unitate	Costul total	60
3.	Următorul cost minim care se poate obține, respectiv nu depășește totalul rândului sau coloanei este 1 unitate Y→ B 14£/unitate		14
4.	Similar, următoarea alocare cu cost minim este 1 unitate $Y \rightarrow$ A 17£/unitate		17
5.	În final, pentru completarea totalurilor pe rând/coloană 2 unități Z → A 18£/unitate		36
			197

Pasul 2. Se verifică soluția obținută, pentru a se vedea dacă reprezintă costul minim posibil. Aceasta se realizează prin calcularea a ceea ce se numește „costul din umbră" (respectiv costul plătit pentru a nu se urma o altă rută) și se compară aceste costuri cu costurile reale de transport, pentru a se vedea dacă este de dorit o schimbare a alocării.

Aceasta se realizează după cum este prezentat în continuare:

Se calculează un cost nominal de „livrare" și „recepție" pentru fiecare celulă ocupată, pornind de la presupunerea că este posibil ca costul de transport al unității de produs să fie împărțit între costurile de livrare și de recepție, după cum urmează:

$$
\begin{aligned}
D(X) + R(B) &= 11 \\
D(Y) + R(A) &= 17 \\
D(Y) + R(B) &= 14 \\
D(Y) + R(C) &= 12 \\
D(Z) + R(A) &= 18 \\
D(Z) + R(D) &= 12
\end{aligned}
$$

unde: $D(X)$, $D(Y)$ și $D(Z)$ reprezintă costurile de livrare de la depozitele X, Y și Z, iar $R(A)$, $R(B)$ și $R(C)$ reprezintă costurile de recepție la clienții A, B, C și D.

Prin convenție, primului depozit i se dă valoarea zero, respectiv D(X)=0, iar această valoare este înlocuită în prima ecuație (v.ag. 360, jos), după care toate valorile se calculează după cum urmează:

R(A)	= 14	D(X)	= 0
R(B)	= 11	D(Y)	= 3
R(C)	= 9	D(Z)	= 4
R(D)	= 8		

Pornind de la aceste valori pot fi calculate costurile din umbră ale pozițiilor albe. Pozițiile albe sunt: X:A, X:C, X:D, Y:D, Z:B. Z:C.

								Costurile din umbră
∴	D(X)	+	R(A)	=	0	+	14	= 14
	D(X)	+	R(C)	=	0	+	9	= 9
	D(X)	+	R(D)	=	0	+	8	= 8
	D(Y)	+	R(D)	=	3	+	8	= 11
	D(Z)	+	R(B)	=	4	+	11	= 15
	D(Z)	+	R(C)	=	4	+	9	= 13

Costurile din umbră calculate sunt comparate apoi cu costurile actuale de transport (din tabelul 20.1). În pozițiile în care *costurile actuale* sunt *mai reduse decât costurile din umbră*, costurile totale pot fi reduse printr-o operație de adunare a valorilor costurilor din umbră, pentru fiecare dotare, respectiv:

		Costul actual	–	Costul din umbră		+ Creșterea costului – Scăderea costului
Poziția	X:A	13	–	14	=	–1
	X:C	15	–	9	=	+6
	X:D	20	–	8	=	+12
	Y:D	13	–	11	=	+2
	Z:B	18	–	15	=	+3
	Z:C	15	–	13	=	+2

Semnificația acestei liste este aceea că costurile totale ar putea fi reduse cu 1£ pentru fiecare dotare care poate să fie transferată în celula X:A. Cum există o reducere a costului care poate să fie adusă soluției din tabelul 20.2, rezultă că aceasta nu este optimă.

Pasul 3. Se fac alocări maximum posibile de livrări în pozițiile pentru care costurile actuale sunt mai reduse comparativ cu costurile din umbră din pozițiile ocupate, după cum rezultă în continuare.

Poziția *X*:*A* de la pasul 2 arată că numărul care poate să fie alocat este influențat de nevoia de a menține totalurile de pe fiecare rând și coloană. Aceasta se realizează după cum rezultă din:

Tabelul 20.3

			Cererea			
			A	*B*	*C*	*D*
			3	3	4	5
Disponibil	*X*	2 unități	+	–2		
	Y	6 unități	–1	1+	4	
	Z	7 unități	2			5

Tabelul 20.3 constituie o reproducere a tabelului 20.2 cu un număr de semne + și - inserate. Aceste inserții s-au realizat pentru următoarele motive:

Poziția *X*:*A* + indică o includere, așa cum am arătat la pasul 2.

Poziția *X*:*B* – indică o excludere pentru a menține totalul de pe rândul *X*.

Poziția *Y*:*B* + indică o includere pentru menținerea totalului pe coloana *B*.

Poziția *Y*:*A* – indică o excludere pentrru menținerea totalurilor de pe rândul *Y* și coloana *A*.

Numărul maxim care poate fi transferat în poziția *X*:*A* este numărul cel mai mic din pozițiile cu minus, respectiv pozițiile *Y*:*A* și *X*:*B*, care este egal cu o unitate.

∴ 1 unitate este inclusă în succesiunea + și – descrisă mai înainte, rezultând tabelul 20.4.

Tabelul 20.4

			Cererea			
			A	*B*	*C*	*D*
			3	3	4	5
Disponibil	*X*	2 unități	1	1		
	Y	6 unități		2	4	
	Z	7 unități	2			5

Costul total al acestei soluții este:

			£
Poziția *X*:*A*	1 unitate @ 13£	=	13
Poziția *X*:*B*	1 unitate @ 11£	=	11
Poziția *Y*:*B*	2 unități @ 14£	=	28
Poziția *Y*:*C*	4 unități @ 12£	=	48
Poziția *Z*:*A*	2 unități @ 18£	=	36
Poziția *Z*:*D*	5 unități @ 12£	=	60
			196£

BCU IASI CENTRAL LIBRARY

Noul cost total este cu 1£ mai mic decât costul total stabilit la pasul 1. Este un rezultat care era de așteptat, deoarece la pasul 2 s-a calculat că s-ar putea economisi 1£ pentru fiecare unitate (numai una) pe care am fi transferat-o în poziția *X:A* .

Notă. Întotdeauna se va începe completarea tabelului cu semnele + și – prin includerea unui semn + în poziția indicată de scăderea costului din umbră din poziția actual. După aceasta se va putea include un semn – în poziția ocupată de pe același rând care are o poziție ocupată pe coloană. Se continuă până se include un semn – în aceeași coloană în care s-a inclus inițial semnul +.

Pasul 4. Se repetă pasul 2, respectiv se verifică dacă soluția obținută reprezintă cu adevărat costul minim. Fiecare dintre operațiunile de la pasul 2 va fi repetată pornindu-se de la valorile din tabelul 20.4, după cum urmează:

$$
\begin{aligned}
D(X) + R(A) &= 13\\
D(X) + R(B) &= 11\\
D(Y) + R(B) &= 14\\
D(Y) + R(C) &= 12\\
D(Z) + R(A) &= 18\\
D(Z) + R(D) &= 12
\end{aligned}
$$

Se aduce D(*X*) la zero și se obțin următoarele valori:

$$
\begin{aligned}
R(A) &= 13 \qquad & D(X) &= 0\\
R(B) &= 11 \qquad & D(Y) &= 3\\
R(C) &= 9 \qquad & D(Z) &= 5\\
R(D) &= 7
\end{aligned}
$$

Pornind de la aceste valori se calculează prețurile din umbră pentru pozițiile *neocupate*. Pozițiile neocupate sunt: *X:C*, *X:D*, *Y:A*, *Y:D*, *Z:B* și *Z:C*.

$$
\begin{aligned}
\therefore\ D(X) + R(C) &= 9\\
D(X) + R(D) &= 7\\
D(Y) + R(A) &= 16\\
D(Y) + R(D) &= 10\\
D(Z) + R(B) &= 16\\
D(Z) + R(C) &= 14
\end{aligned}
$$

Costurile din umbră calculate sunt comparate apoi cu costurile actuale, pentru a se vedea dacă mai este posibilă încă o reducere a costurilor.

		Costul actual	–	Costul din umbră		+ Creșterea costului – Scăderea costului
Poziția	*X:C*	15	–	9	=	+6
	X:D	20	–	7	=	+13
	Y:A	17	–	16	=	+1
	Y:D	13	–	10	=	+3
	Z:B	18	–	16	=	+2
	Z:C	15	–	14	=	+1

Se observă că toate rezultatele sunt pozitive, ceea ce înseamnă că nici o reducere nu mai este posibilă, atingându-se costul optim.

Soluția optimă

1 unitate $X \rightarrow A$
1 unitate $X \rightarrow B$
2 unități $Y \rightarrow B$
4 unități $Y \rightarrow C$
2 unități $Z \rightarrow A$
5 unități $Z \rightarrow D$
cu un cost total de 196£

Această soluție este reprodusă în următorul tabel:

	A	*B*	*C*	*D*
X	1	1		
Y		2	4	
Z	2			5

Notă. În acest exemplu a fost necesară o singură trecere în revistă pentru a se ajunge la soluția optimă și aceasta în principal deoarece a fost aleasă de la început o soluție bună. Principiile explicate mai înainte rămân, bineînțeles, valabile pentru orice număr de treceri în revistă.

5. Disponibilități inegale privind cererea și oferta

În exemplul 1 a existat o egalitate între cantitățile cerute și cele disponibile pentru a fi oferite. În mod evident, nu așa stau lucrurile întotdeauna și cea mai obișnuită situație este aceea în care este disponibilă o cantitate mai mare decât cea cerută. Tehnica de transport poate să fie utilizată în asemenea cazuri cu o singură modificare

a tabelului inițial. O destinație falsă, cu costuri de transport zero, este introdusă în tabel pentru absorbirea surplului disponibil. În continuare se aplică același algoritm de lucru. Următorul exemplu detaliază această procedură.

6. Exemplu de transport cu o destinație falsă

Exemplul 2

O firmă de vânzări en-gros de echipamente electrocasnice, care are 3 depozite, a primit o comandă totală de 100 congelatoare care trebuie livrate la 4 magazine. În total, în cele 4 depozite se află 110 congelatoare, iar manageriatul dorește să reducă la minimum costurile de transport, livrând congelatoarele solicitate de la depozitele cele mai apropiate. Detaliile referitoare la disponibilități, cereri și costurile de transport sunt date în tabelul 20.5.

Tabelul 20.5

			Cererea				
		Congela-toare	Mag. A	Mag. B	Mag. C	Mag. D	Total
			25	25	42	8	100
Disponibil	Depozitul I	40	3£	16	9	2	Costul de
	Depozitul II	20	1£	9	3	8	transport
	Depozit ul III	50	4£	5	2	5	pe bucată
	Total	110					

Pasul 1. Se adaugă o destinație falsă în tabelul 20.5, cu costuri de transport zero, cu o cerere egală cu surplusul disponibil.

∴Cererea falsă = 110 – 100 = 10 congelatoare (tabelul 20.6).

Tabelul 20.6

			Cererea					
		Conge-latoare	Mag. A	Mag. B	Mag. C	Mag.D	Cererea falsă	Total
			25	25	42	8	10	100
Dispo-nibil	Depozitul I	40	3£	16	9	2	0	Costul de
	Depozitul II	20	1£	9	3	8	0	transport
	Depozit ul III	50	4£	5	2	5	0	pe bucată
	Total	110						

Pasul 2. În acest moment, cantitatea cerută este egală cu cantitatea disponibilă (ca urmare a introducerii destinației false) și soluționarea problemei poate să înceapă exact în maniera descrisă în paragraful 4. Primul pas este soluția fezabilă inițială.

Tabelul 20.7

			Cererea				
			A	*B*	*C*	*D*	Cererea falsă
			25	25	42	8	10
Disponibil	I	40	5(4)	17(6)		8(3)	10(7)
	II	20	20(1)				
	III	50		8(5)	42(2)		

Numerele din tabelul 20.7 reprezintă alocările realizate, iar numerele dintre paranteze reprezintă succesiunea introducerii lor, pe baza celui mai scăzut cost și a necesității de menținere constantă a totalului pe rânduri și coloane. Restul de 10 unități au fost alocate destinației false.

Costul alocării este:

		£		£
I → A	5 unități @ 3		=	15
I → B	17 unități @ 16		=	272
I → D	8 unități @ 2		=	16
I → Cererea falsă	10 unități @ cost zero			
II → A	20 unități @ 1		=	20
III → B	8 unități @ 5		=	40
III → C	42 unități @ 2			84
				447£

Pasul 3. Se verifică soluția pentru a se vedea dacă reprezintă costul minim posibil, la fel cum am arătat anterior.

Costurile de livrare și de recepție:

				£
D(I)	+	R(A)	=	3
D(I)	+	R(B)	=	16
D(I)	+	R(D)	=	2
D(I)	+	R (cerere falsă)	=	0
D(II)	+	R(A)	=	1
D(III)	+	R(B)	=	5
D(III)	+	R(C)	=	2

Se aduce D(I) la zero și se obțin următoarele valori:

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

R(*A*)	=	3	D(I)	=	0
R(*B*)	=	16	D(II)	=	–2
R(*C*)	=	13	D(III)	=	–11
R(*D*)	=	2			
R(cerere falsă)	=	0			

Utilizând aceste valori se calculează costurile din umbră ale rutelor neutilizate. Rutele neutilizate sunt: I:*C*, II:*B*, II:*C*, II:*D*, II:Destinația falsă, III:*A*, III:*D*, III:Destinația falsă.

					Prețurile din umbră				
					£				
∴	D(I)	+	R(*C*)	=	0	+	13	=	13
	D(II)	+	R(*B*)	=	–2	+	16	=	14
	D(II)	+	R(*C*)	=	–2	+	13	=	11
	D(II)	+	R(*D*)	=	–2	+	2	=	0
	D(II)	+	R(cerere falsă)	=	–2	+	0	=	–2
	D(III)	+	R(*A*)	=	–11	+	3	=	–8
	D(III)	+	R(*D*)	=	–11	+	2	=	–9
	D(III)	+	R(cerere falsă)	=	–11	+	0	=	–11

Costurile din umbră se deduc din costurile actuale.

		Costul actual	–	Costul din umbră		+ Creșterea costului – Scăderea costului
Poziția	I:*C*	9	–	13	=	–4
	II:*B*	9	–	14	=	–5
	II:*C*	3	–	11	=	–8
	II:*D*	8	–	0	=	+8
	II:cerere falsă	0	–	(–2)	=	+2
	III:*A*	4	–	(–8)	=	+12
	III:*D*	5	–	(–9)	=	+14
	III: cerere falsă	0	–	(–11)	=	+11

Se observă că costul total poate să fie redus cu 8£ pe unitate pentru fiecare unitate transferată în celula **II:C**.

Pasul 4. Se face numărul maxim de alocări de livrări în celula **II:C**. Aceasta se realizează prin introducerea unei succesiuni de semne + și -, păstrându-se totalul pe rânduri și coloane.

Tabelul 20.8

			Cererea				
			A	*B*	*C*	*D*	Cererea falsă
			25	25	42	8	10
	I	40	5+	17–		8	10
Disponibil	II	20	20–		+		
	III	50		8+	42–		

Notă. Tabelul 20.8 reprezintă o reproducere a tabelului 20.7 cu o succesiune de semne + și - introduse, începând cu semnul + în poziția II:*C*, apoi semnele - și + după necesități, pentru menținerea echilibrului pe coloane și rânduri. Numărul maxim care poate să fie transferat este reprezentat de numărul cel mai mic din pozițiile cu semnul - respectiv 17 unități în poziția I:*B*.

După efectuarea transferului rezultă tabelul 20.9.

Tabelul 20.9

			Cererea				
			A	*B*	*C*	*D*	Cererea falsă
			25	25	42	8	10
	I	40	22			8	10
Disponibil	II	20	3		17		
	III	50		25	25		

Costul acestei alocări este:

$(22\times3) + (8\times2) + (10\times0) + (3\times1) + (17\times3) + (25\times5) + (25\times2) = 311£.$

Rezultatul poate să fie verificat prin deducerea din costul alocării inițiale (tabelul 20.7) a economiilor de 8£ pe unitate pentru cele 17 unități transferate, respectiv:

$$447£ - (17\times8) = 311£$$

Pasul 5. Se repetă pasul 3 pentru a se verifica dacă costurile au fost reduse la minimum. După ce se face D(I)=0, se obțin următoarele valori:

R(*A*)	=	3	D(I)	= 0
R(*B*)	=	8	D(II)	= –2
R(*C*)	=	5	D(III)	= –3
R(*D*)	=	2		
R(cerere falsă)	=	0		

Aceste valori sunt utilizate în continuare pentru calcularea costurilor din umbră ale rutelor neutilizate.

			Costul din umbră £
Poziția	I:*B*	=	8
	II:*C*	=	5
	II:*B*	=	6
	II:*D*	=	0
	II:cerere falsă	=	–2
	III:*A*	=	0
	III:*D*	=	–1
	III: cerere falsă	=	–3

Când aceste costuri sunt deduse din costurile actuale, nu se mai obține nici o valoare negativă: rezultă că alocarea realizată în tabelul 20.9 este optimă, cu un cost minim de transport, de 311£.

Note:

a) Se observă că, în afara introducerii destinației false în tabelul 20.9, metoda de rezolvare a exemplului 2 este identică cu cea a exemplului 1.

b) O metodă adeseori aplicată de realizare a alocării inițiale fezabile este ceea ce se numește, în mod curent, metoda colțului de nord-vest. Aceasta înseamnă completarea tabelului începând din colțul din stânga sus, independent de costuri. Se ajunge la aceeași soluție optimă, dar de obicei sunt necesare mai multe treceri în revistă ale soluțiilor intermediare. Pentru exemplul 2, de pildă, ar fi necesare cinci treceri în revistă pentru a se ajunge la soluția optimă dacă s-ar începe de la alocarea inițială după metoda colțului de nord-vest, în locul celor 2 treceri în revistă necesare în cazul în care se face o alegere mai rațională.

c) În mod frecvent se descoperă că există și alte soluții alternative, respectiv pot fi descoperite serii diferite de alocări pentru care costurile totale sunt aceleași.

7. Maximizarea și tehnica transportului

Deși problemele de transport sunt în general probleme de minimizare, există și situații în care problemele sunt astfel formulate încât obiectivul constă în realizarea unor alocări între surse și destinații astfel încât profitul sau venitul să fie maximizat. Și aceste probleme pot fi rezolvate cu relativă ușurință, după cum voi arăta în continuare.

8. Pașii implicați în problemele de maximizare

Folosind exemplul 1, paragraful 4, voi face o comparație a algoritmului care trebuie respectat pentru rezolvare.

A se vedea	Tehnica de minimizare	Tehnica de maximizare
Pasul 1	Se face alocarea inițială fezabilă începând cu costurile cele mai reduse	Se realizează alocarea inițială fezabilă, pornindu-se de la venitul maxim și continuându-se descrescător
Pasul 2	Se testează diferențele existente între costurile actuale și costurile din umbră pentru rutele neutilizate, pentru depistarea soluției optime, respectiv se caută ca toate valorile să fie pozitive. Dacă această cerință nu este îndeplinită, se face alocarea în poziția cu cea mai mare diferență negativă	Pentru depistarea soluției optime, diferențele dintre costurile actuale și cele din umbră corespunzătoare rutelor neutilizate trebuie să fie *toate negative*. În afara acestor deosebiri, tehnica transportului poate fi aplicată așa cum am arătat la începutul capitolului

9. Maximizarea și destinațiile false

Vă amintiți de la paragraful 5 că, în cazurile în care nu există semnul de egalitate între nivelul cererii și cel al disponibilului, se introduce în calcul o destinație falsă, pentru care costurile de transport sunt zero, după care se aplică algoritmul cunoscut. În cazul unei probleme de maximizare, în care se precizează că există un disponibil mai mare decât cererea, în calcule se introduce de asemeni o destinație falsă, pentru care costurile de transport sunt nule, după care se aplică algoritmul de la paragraful 8.

10. Degenerescența și tehnica de transport

La o examinare a tabelelor 20.2–20.9 se va observa că în fiecare caz numărul alocărilor este mai mic cu o unitate decât totalul numărului rândurilor și al coloanelor. De exemplu, tabelul 20.9 (3 rânduri și 5 coloane)are un total de 7 alocări. Pentru a putea calcula livrările false și costurile de recepție, această condiție este esențială, dar în anumite ocazii se poate întâmpla ca numărul alocărilor să fie mai mic decât suma numărului de coloane și rânduri minus o unitate. Această situație este cunoscută sub denumirea de degenerescență.

11. Rezolvarea degenerescențelor

Dacă un număr de alocări este mai mic decât totalul numărului de rânduri și de coloane din care se scade o unitate, este necesar să se mai realizeze una sau mai multe alocări zero pe rutele actuale, pentru ca numărul alocărilor să devină egal cu totalul numărului coloanelor și al rândurilor minus o unitate. Aceasta înseamnă că, în privința calculării costurilor din umbră, una sau mai multe celule cu alocare zero sunt tratate ca și cum ar fi ocupate. De exemplu, în cazul unui tabel cu 3 rânduri și 5 coloane, dacă se fac 7 alocări, condiția este satisfăcută. Dar dacă pentru același tabel s-au făcut 6 alocări, satisfăcându-se astfel cererile, oricărei celule neocupate i se va acorda valoarea zero, fiind tratată ca și când ar fi ocupată. În privința deplasărilor care decurg din această alocare zero, celula respectivă este tratată ca și cum ar avea valoare pozitivă și poate fi deplasată la fel ca oricare altă alocare. Alocația respectivă trebuie făcută, însă, într-o celulă independentă.

12. Rezumat

a) Fig. 20.1 vă oferă o imagine a aplicării tehnicii de transport pentru problemele de minimizare, fiind însoțită de referințe încrucișate la paragrafele capitolului.

b) Problemele de maximizare urmează același tablou general de rezolvare, cu excepția faptului că soluția inițială fezabilă este concepută pornind de la venitul maxim iar soluția optimă este recunoscută atunci când toate valorile sunt negative după deducerea costurilor din umbră din veniturile actuale.

c) Numărul de alocări care trebuie realizate este mai mic cu o unitate față de totalul numărului coloanelor și al rândurilor. Dacă această relație nu este satisfăcută, după realizarea alocărilor reale, una sau mai multe celule libere sunt considerate ca având o alocare zero și sunt tratate ca fiind ocupate.

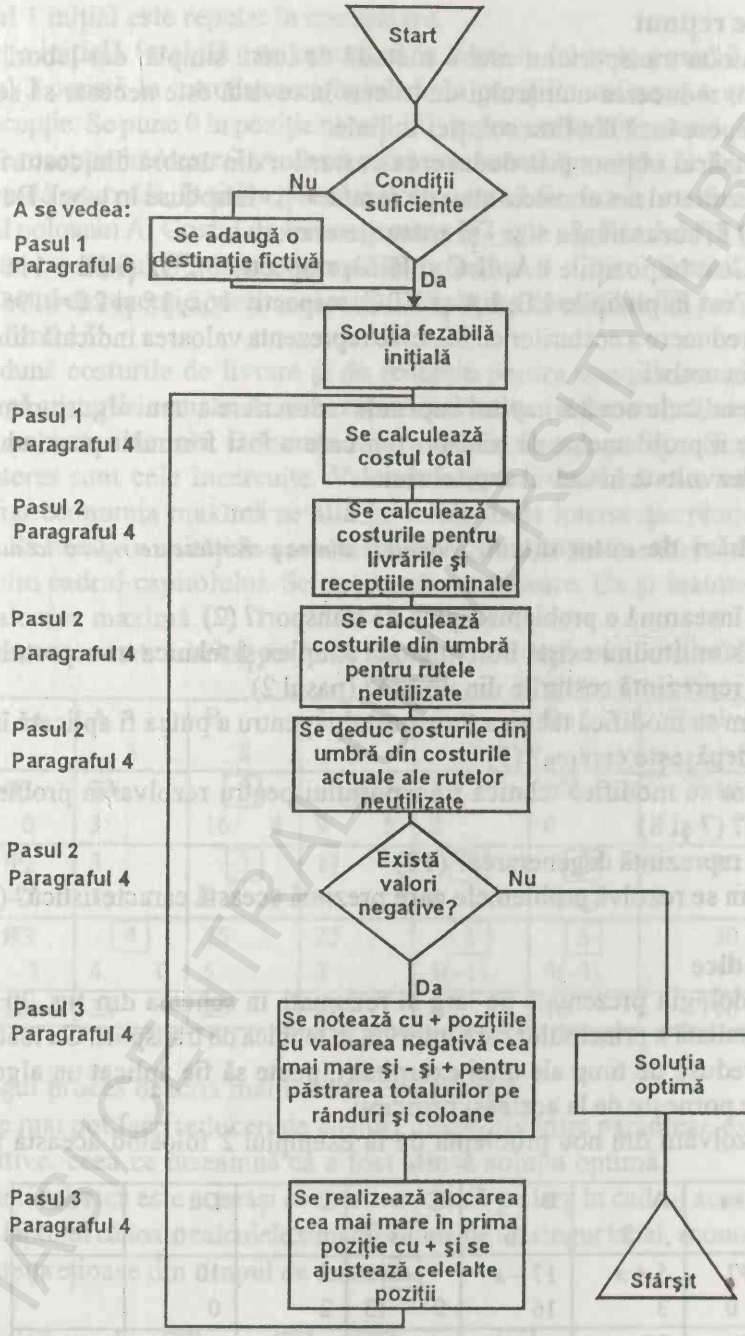


Fig. 20.1. Diagrama etapelor metodei transportului.

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

13. De reținut

a) Metoda transportului este o metodă de lucru simplă, dar laborioasă și de aceea, pentru reducerea numărului de treceri în revistă este necesar să se facă cea mai bună alegere încă din faza soluției inițiale.

b) Numărul obținut prin deducerea costurilor din umbră din costurile actuale reprezintă rezultatul net al succesiunii de semne + și - introduse în tabel. De exemplu, în tabelul 20.8, succesiunea + și - și costurile erau:

+ Cost în pozițiile I:A, II:C și III:B, respectiv 3£, 3£ și 5£ = 11£

– Cost în pozițiile I:B, I:A și III:C, respectiv 16£, 1£ și 2£ = 19£

ducând la o reducere a costurilor cu 8£, care reprezenta valoarea indicată din calculele costurilor din umbră.

c) Apendicele acestui capitol cuprinde o descriere a unui algoritm mai simplu de rezolvare a problemelor de transport și care a fost formulat pornindu-se de la principiile dezvoltate în cadrul capitolului.

Întrebări de autocontrol. *Numerele dintre paranteze se referă la numerotarea paragrafelor.*

1. Ce înseamnă o problemă tipică de transport? (2)
2. Ce similitudini există între metoda simplex și tehnica transportului? (3)
3. Ce reprezintă costurile din umbră? (pasul 2)
4. Cum se modifică tehnica transportului pentru a putea fi aplicată în cazul în care oferta depășește cererea? (5)
5. Cum se modifică tehnica transportului pentru rezolvarea problemelor de maximizare? (7 și 8)
6. Ce reprezintă degenerarea? (10)
7. Cum se rezolvă problemele care prezintă această caracteristică? (11)

Apendice

Metodologia prezentată pe larg și rezumată în schema din fig. 20.1 oferă o descriere detaliată a principiilor care intervin în tehnica de transport. Cu toate acestea, în limitele reduse de timp ale unei examinări, poate să fie aplicat un algoritm mai simplu, care pornește de la aceleași principii.

Să rezolvăm din nou problema de la exemplul 2 folosind această tehnică.

→	A	B	C	D	Du	Total
	3	16	13	2	0	
W1	5 + x	17 – x	[–4]	8	10	40
0	3	16	9 13	2	0	
W2	20 – x	[–5]	x [–8]	[8]	[2]	20
–2	1	9 14	3 11	8 0	0(–2)	
W3	[12]	8 + x	42 – x	[–4]	[11]	50
–11	4(–8)	5	2	5 9	0(–11)	
Total	25	25	42	8	10	110

Pasul 1 inițial este repetat în continuare.

Soluția inițială fezabilă este introdusă în tabel la fel ca la **pasul 2.**

Pasul 3 constă în introducerea în tabel, în pozițiile utilizate, a costurilor de livrare și recepție. Se pune 0 în poziția notată *W*1, reprezentând livrarea de la depozitul 1. Costul de recepție în A este 3. Această cifră este notată în poziția A. Se repetă apoi această metodă pentru B, D și Du. Rândul W1 poate să fie asociat cu rândul *W*2 prin intermediul coloanei A. Costul de livrare pentru *W*2 este –2. Rândul *W*1 poate să fie asociat acum cu rândul *W*3 prin intermediul coloanei B. Costul livrării pentru *W*3 este –11. Costul de recepție pentru coloana C se obține din rândul *W*3 prin intersecția (*W*3 și C), fiind 13.

Se adună costurile de livrare și de recepție pentru pozițiile neutilizate și se notează lângă costurile actuale. Acestea reprezintă costurile din umbră, care trebuiesc comparate cu costurile reale. Diferența este notată în fiecare poziție. Singurele care prezintă interes sunt cele încercuite. Valorile negative arată că este vorba despre economii, iar economia maximă se află în celula de la intersecția rândului *W*2 cu coloane C. Să notăm x unități în această poziție. Situația devine identică cu cea de la Pasul 4 din cadrul capitolului. Se operează o realocare. Ca și înainte, se obține pentru x valoarea maximă 17.

În acest moment, tabelul poate să fie întocmit după cum urmează:

→	A 3	B 8	C 5	D 2	Du 0	Total
*W*1 0	22 3	[8] 16 8	[4] 9 5	8 2	10 0	40
*W*2 –2	3 1	[3] 9 9	17 3	[8] 8 0	[2] 0(–2)	20
*W*3 –3	[4] 4 0	25 5	25 2	[1] 5(–1)	[3] 0(–3)	50
Total	25	25	42	8	10	110

Întregul proces descris mai înainte este repetat.

Nu se mai pot face reduceri de costuri, respectiv între paranteze există numai valori negative, ceea ce înseamnă că a fost atinsă soluția optimă.

Această tehnică este aceeași cu cea dezvoltată pe larg în cadrul acestui capitol, cu excepția faptului că toate calculele sunt efectuate pe un singur tabel, economisindu-se astfel minute prețioase din timpul de examen.

Exerciții cu răspunsuri

1. O firmă are un număr de 3 magazine în care se află în total 80 de televizoare. Se primește o comandă de livrare a 70 de aparate la un număr de 4 școli. Costurile de transport de la magazine la școli sunt prezentate în continuare, împreună cu disponibilul si cererea.

			Școli				
			A	*B*	*C*	*D*	
		Aparate	20	30	15	5	Cererea
	Magazinul I	40	2	4	1	6	Costuri
Disponibil	Magazinul II	20	4	3	3	3	
	Magazinul III	20	1	2	5	2	

Se cere să se realizeze cea mai economică livrare a comenzii.
Să se realizeze tabelul inițial și să se noteze livrările inițiale fezabile.
2. Să se calculeze prețurile din umbră pentru punctul 1.
3. Să se rezolve problema de la punctul 1.

Răspunsuri la exerciții

1.

		A	*B*	*C*	*D*	Cerere falsă
		20	30	15	5	10
I	40		15(5)	15(1)		10(6)
II	20		15(4)		5(3)	
III	20	20(2)				

Soluția NB este degenerată.
∴ Se tratează DIIIB ca fiind ocupat

2.

DI	→	*B*	=	4
DI	→	*C*	=	1
DI	→	Cerere falsă	=	0
DII	→	*B*	=	3
DII	→	*D*	=	3
DIII	→	*A*	=	1
DIII	→	*B*	=	2 (alocare zero)
∴ Dacă		DI	=	0
		B	=	4
		DII	=	–1
		D	=	4
		DIII	=	–2
		A	=	3
		C	=	1
		Cerere falsă	=	0

BCU IASI CENTRALA UNIVERSITARA

Costurile din umbră ale rutelor neutilizate

I	+	A	=	4
I	+	D	=	3
II	+	A	=	2
II	+	C	=	0
II	+	cerere falsă	=	–1
III	+	C	=	–1
III	+	D	=	3
III	+	cerere falsă	=	–2

Umbra actuală

I	+	A	=	2 – 4	=	–2
I	+	D	=	6 – 3	=	3
II	+	A	=	4 – 2	=	2
II	+	C	=	3 – 0	=	3
II	+	cerere falsă	=	0 – (–1)	=	1
III	+	C	=	5 – (–1)	=	6
III	+	D	=	2 – 3	=	–1
III	+	cerere falsă	=	0 – (–2)	=	2

3.

Noua alocație

	A	*B*	*C*	*D*	Cerere falsă
I	15		15		10
II		15		5	
III	5	15			

DI	→	*A*	=	2
DI	→	*C*	=	1
DI	→	cerere falsă	=	0
DII	→	*B*	=	3
DII	→	*D*	=	3
DIII	→	*A*	=	1
DIII	→	*B*	=	2
∴ Dacă		DI	=	0
		A	=	2
		B	=	3
		C	=	1
		DII	=	0
		DIII	=	–1
		cerere falsă	=	0
		D	=	3

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rute neutilizate

			Actual	–	Umbră	
I	+	*B*	4	–	3	= 1
I	+	*D*	6	–	3	= 3
II	+	*A*	4	–	2	= 2
II	+	*C*	3	–	1	= 2
II	+	cerere falsă	0	–	0	= 0
III	+	*C*	5	–	0	= 0
III	+	*D*	2	–	2	= 0
III	+	cerere falsă	0	–	0	= 0

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

21. DISTRIBUIREA

1. Obiective

După parcurgerea acestui capitol:

- veți înțelege în ce condiții se poate folosi tehnica distribuirii;
- veți ști cum se realizează tabloul inițial de distribuire;
- veți putea face trecerea la următorul tabel, îmbunătățit, de distribuire;
- veți ști cum se recunoaște soluția optimă;
- veți înțelege în ce mod poate să fie aplicată tehnica distribuirii în problemele de maximizare;
- veți putea rezolva situațiile de inegalitate între disponibilități și destinații.

2. Tehnica de distribuire pentru minimizare

Voi folosi următorul exemplu ca bază pentru explicarea pas-cu-pas a acestei tehnici.

Exemplul 1

O companie angajează ingineri de sistem în diferite localități situate pe întreg cuprinsul țării pentru a asigura serviciile de reparații și întreținere pentru echipamentele proprii instalate la clienți. Se primesc patru cereri de service și compania stabilește că există patru ingineri disponibili pentru onorarea lor. Distanțele la care se află fiecare dintre cei patru ingineri de adresele clienților care au solicitat service sunt date în următorul tabelul 21.1, iar compania dorește ca distribuirea inginerilor la clienți să fie făcută astfel încât să fie minimizată distanța totală pe care aceștia trebuie să o străbată.

Tabelul 21.1

		Clienți			
		W	*X*	*Y*	*Z*
Ingineri de service	Alf	25	18	23	14
	Bill	38	15	53	23
	Charlie	15	17	41	30
	Dave	26	28	36	29

Distanțele de la ingineri la clienți, în mile

Pasul 1. Din numerele de pe fiecare coloană se scade cel mai mic număr de pe coloana respectivă. Cele mai mici numere de pe coloane sunt 15, 15, 23 și 14. Se obține tabelul 21.2.

Tabelul 21.2

	W	*X*	*Y*	*Z*
A	10	3	0	0
B	23	0	30	9
C	0	2	18	16
D	11	13	13	15

Pasul 2. Din numerele de pe fiecare rând se scade cel mai mic număr de pe rândul respectiv. Cele mai mici numere sunt: 0, 0, 0 și 11; se obține tabelul 21.3.

Tabelul 21.3

	W	*X*	*Y*	*Z*
A	10	3	0	0
B	23	0	30	9
C	0	2	18	16
D	0	2	2	4

Notă. În cazul în care cel mai mic număr de pe un rând este zero (ca de exemplu în rândurile A, B și C ale tabelului 21.3) rândul respectiv va rămâne nemodificat.

Pasul 3. Se acoperă zerourile din tabelul 21.3 cu numărul minim posibil de drepte orizontale sau verticale (tabelul 21.4).

Tabelul 21.4

	W	*X*	*Y*	*Z*	
A	~~10~~	~~3~~	~~0~~	~~0~~	Linia 2
B	~~23~~	~~0~~	~~30~~	~~9~~	Linia 3
C	0	2	18	16	
D	0	2	2	4	Linia 1

Notă. Linia 3 care acoperă rândul B putea la fel de bine să fie trasată deasupra coloanei X.

Pasul 4. Se compară numărul de linii cu numărul de distribuiri care trebuie efectuate (în acest caz este vorba despre 4 distribuiri și 3 linii). Dacă numărul de linii este *egal* cu numărul de distribuiri, se trece la pasul 6.

Dacă numărul de linii este mai mic decât numărul de distribuiri care trebuie făcute (așa cum este cazul în exemplul de față), atunci:

a) se caută cel mai mic element care a rămas neacoperit la pasul 3, notat X (în tabelul 21.4, valoarea sa este 2).

b) se scade X din fiecare element din matrice.

c) se adună X la fiecare element acoperit de o linie. Dacă un element este acoperit de două linii, ca de exemplu în celula $A:W$ sau $B:W$, X va fi adunat de două ori.

Notă. Efectul acestor pași este reprezentat de faptul că X este scăzut din elementele neacoperite, elementele acoperite de o singură linie rămân neschimbate și elementele acoperite de două linii cresc cu valoarea lui X.

După efectuarea acestor calcule (în tabelul 21.4 cel mai mic element era 2), tabelul 21.4 devine 21.5.

Tabelul 21.5

	W	*X*	*Y*	*Z*
A	12	3	0	0
B	25	0	30	9
C	0	0	16	14
D	0	0	0	2

Notă. Se observă că pozițiile $A:W$ și $B:W$ au crescut cu 2 unități; pozițiile $A:X$, $A:Y$, $A:Z$, $B:X$, $B:Z$, $C:W$, $D:W$ au rămas nemodificate, iar toate celelalte poziții au fost reduse cu două unități.

Pasul 5. Se repetă pașii 3 și 4 până când numărul de drepte care acoperă zerourile devine egal cu numărul distribuțiilor care trebuie făcute.

În acest exemplu, acoperind zerourile din tabelul 21.5 cu un număr minim de drepte egal cu numărul de distribuiri care trebuie realizate și nu mai este necesară repetarea procedurii, după cum se poate vedea în tabelul 21.6.

Tabelul 21.6

	W	*X*	*Y*	*Z*	
A	~~12~~	~~3~~	~~0~~	~~0~~	Linia 1
B	~~25~~	~~0~~	~~30~~	~~9~~	Linia 2
C	~~0~~	~~0~~	~~16~~	~~14~~	Linia 3
D	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~2~~	Linia 4

Pasul 6. Când numărul de drepte devine egal cu numărul de distribuiri care trebuie realizate, se poate trece la distribuirea propriu-zisă, respectând următoarele reguli:

a) Se distribuie o linie fiecărui zero care este singurul zero de pe coloana și rândul din care face parte.

b) Se distribuie o linie fiecărui zero care este singurul zero fie pe coloana, fie pe rândul din care face parte.

c) Făcându-se abstracție de distribuirile făcute deja, se repetă punctul b până când se realizează toate distribuirile necesare.

În cazul exemplului nostru, aplicarea acestei proceduri duce la următoarele rezultate:

a) (Un singur zero atât pe coloana cât și pe rândul din care face parte) Nici unul.

b) (Un singur zero pe coloană, sau pe rândul din care face parte) Se distribuie B lui X și A lui Z. Situația se prezintă în acest moment, ca în tabelul 21.7.

Tabelul 21.7

	W	*X*	*Y*	Z
A	Rând	Satisfăcut ↔		Coloană satisfăcută
B	Rând	Satisfăcut ↔		Coloană satisfăcută
C	0	Coloană satisfăcută	16	Coloană satisfăcută
D	0	Coloană satisfăcută	0	Coloană satisfăcută

c) Se repetă regula b având ca rezultat distribuirea lui D lui Y și a lui C lui W.

Note:

a) Dacă distribuirea finală nu este zero, rezultă că au fost utilizate mai multe drepte decât erau necesare, în cadrul pasului 3.

b) Dacă pentru distribuirea finală rămâne un grup de 4 sau mai multe zerouri, înseamnă că trebuie făcută o alegere a distribuirii pentru aceleași distanțe.

Pasul 7. Se face calculul total al distanțelor pentru distribuirea finală.

A la *Z*	Distanțe	14
B la *X*		15
C la *W*		15
D la *Y*		36
		80 kilometri

3. Tehnica de distribuire în cazul problemelor de maximizare

O problemă de maximizare a distribuirii implică realizarea distribuirii cu condiția obținerii unor venituri maxime. În acest caz, numai pasul 1 de mai înainte diferă - coloanele sunt reduse cu cel mai mare număr din fiecare coloană. Din acest moment se aplică aceleași reguli ca și în cazul minimizării.

4. Exemplu de maximizare

Exemplul 2

Voi folosi tot exemplul 1 anterior, cu o singură modificare: presupunem că numerele din tabel se referă la venituri și nu la distanțe și se cere să se maximizeze veniturile. Rezolvarea va

fi realizată după cum urmează (în fiecare caz numărul pasului corespunde rezolvării de la exemplul 1).

Datele originale (fig. 21.8)

Tabelul 21.8

	W	*X*	*Y*	*Z*	
A	25	18	23	14	
B	38	15	53	23	Câştiguri care
C	15	17	41	30	pot fi obținute
D	26	28	36	29	

Pasul 1. Se scade numărul de pe fiecare coloană cu numărul cel mai mare de pe coloana respectivă, fără a ține seama de rezultatele negative care apar (tabelul 21.9).

Tabelul 21.9

	W	*X*	*Y*	*Z*
A	13	10	30	16
B	0	13	0	7
C	23	11	12	0
D	12	0	17	1

Pasul 2. Se scade numărul de pe fiecare rând cu cel mai mic număr de pe rândul respectiv (tabelul 21.10).

Tabelul 21.10

	W	*X*	*Y*	*Z*
A	3	0	20	6
B	0	13	0	7
C	23	11	12	0
D	12	0	17	1

Pasul 3. Se acoperă zerourile cu un număr minim de drepte (tabelul 21.11).

Tabelul 21.11

	W	*X*	*Y*	*Z*
A	3	0	20	6
B	~~0~~	~~13~~	~~0~~	~~7~~
C	23	11	12	0
D	12	0	17	1

Pasul 4. Dacă numărul de drepte este egal cu numărul de distribuiri care trebuie realizate se trece la pasul 6. Dacă acesta este mai mic, cum este cazul și în acest exemplu, se va aplica procedeul „elementelor neacoperite" care a fost descris anterior. Va rezulta tabelul 21.12.

Tabelul 21.12

	W	*X*	*Y*	*Z*
A	0	0	17	6
B	0	16	0	10
C	20	11	9	0
D	9	0	14	1

Pasul 5. Se repetă pașii 3 și 4 până când numărul de linii este egal cu numărul de distribuiri care trebuie realizate. În cazul de față, situația aceasta apare fără o repetare a procedurii, respectiv (tabelul 21.13):

Tabelul 21.13

	W	*X*	*Y*	*Z*
A	~~0~~	~~0~~	~~17~~	~~6~~
B	~~0~~	~~16~~	~~0~~	~~10~~
C	~~20~~	~~11~~	~~9~~	~~0~~
D	~~9~~	~~0~~	~~14~~	~~1~~

Pasul 6. Se realizează distribuirile în funcție de regulile enunțate anterior, rezultând următoarele perechi:

C în *Z*
D în *X*
S în *W*
B în *Y*

Pasul 7. Se calculează câștigul care poate fi realizat în urma distribuțiilor.

	£
C în Z	30
D în X	28
S în W	25
B în Y	53
	136

Note:

a) Este evident că problemele de maximizare a distribuirii pot fi rezolvate practic în aceeași manieră ca și problemele de minimizare.

b) Metodele de rezolvare care sunt date sunt valabile pentru orice dimensiune a matricei. Dacă problema este de dimensiuni reduse, cum a fost exemplul pe care l-am ales spre ilustrare, poate să fie rezolvată și numai printr-o analiză atentă.

BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

5. Inegalitatea disponibilităților și a destinațiilor

Pentru rezolvarea unei probleme de distribuire în maniera descrisă mai înainte, matricea ar trebui să fie pătrată, respectiv disponibilitățile trebuie să fie egale cu destinațiile. Atunci când acestea nu sunt egale, se creează o disponibilitate sau o destinație falsă, pentru a obține o matrice pătrată. Costurile, distanțele, veniturile pentru coloanele sau rândurile false vor fi nule.

6. Metoda de rezolvare

După ce numărul disponibilităților a fost făcut egal cu cel al destinațiilor, metoda de rezolvare este cea obișnuită, normală, elementele false fiind tratate ca și când ar fi reale. Metoda de rezovare va distribui în mod automat o disponibilitate sau o destinație rândului sau coloanei fictive, iar distribuirea respectivă va aduce costuri zero sau venituri zero.

7. Rezumat

a) Schema din fig. 21.1 ilustrează metoda de distribuție și pe ea sunt notate numerele paragrafelor care conțin detalierea fiecărui pas.

b) Datorită similitudinilor în abordarea problemelor de maximizare și de minimizare, schema 21.1 poate să fie aplicată în ambele cazuri.

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

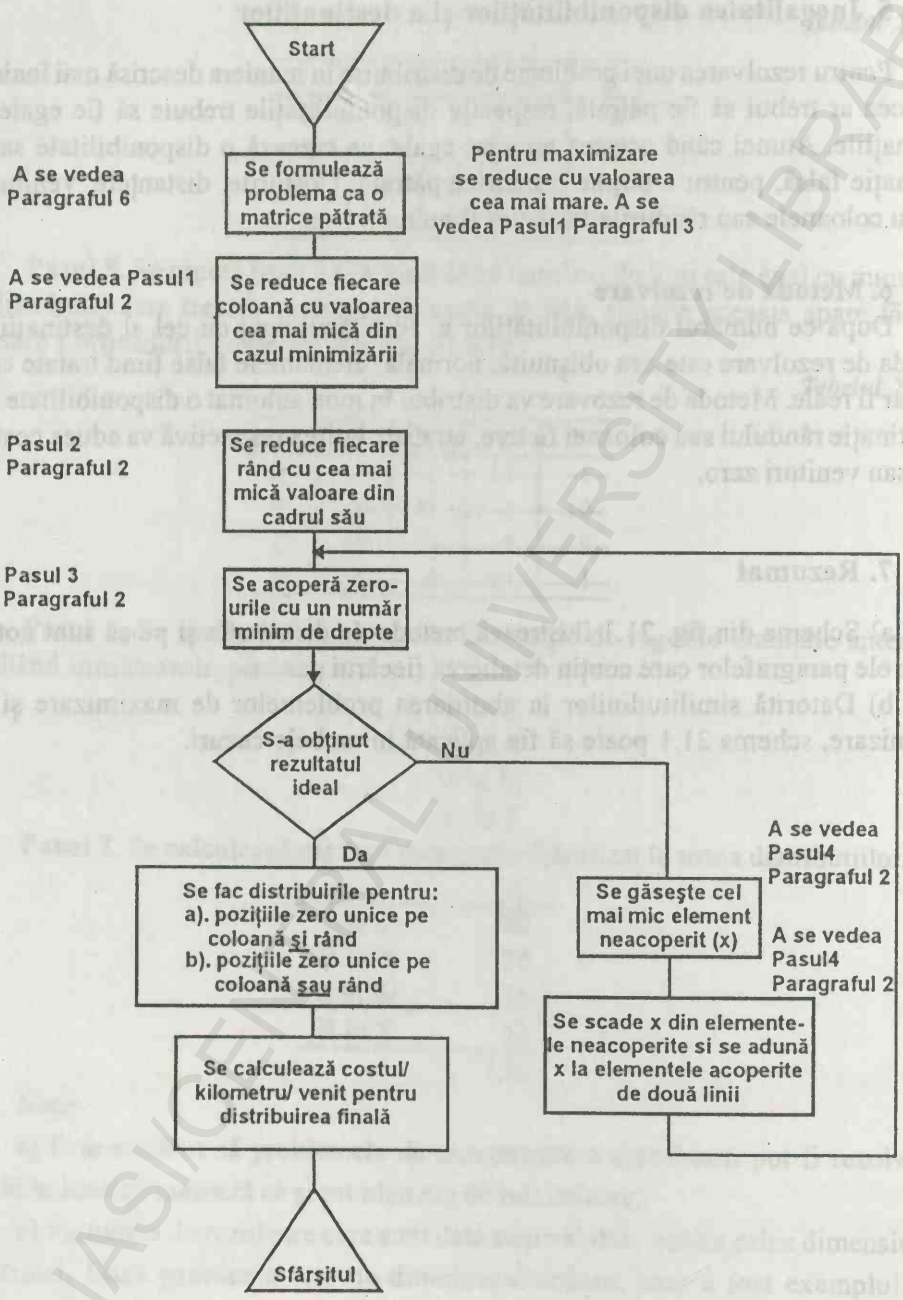


Fig. 21.1. Schema tehnicii de distribuire.

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

8. De reținut

a) Tehnica de distribuire poate să fie aplicată pentru orice tip de problemă în care se lucrează cu perechi, respectiv taxiuri pentru clienți, slujbe pentru șomeri etc.

b) Majoritatea problemelor practice de dimensiunile ilustrate mai sus pot fi rezolvate practic bazându-ne exclusiv pe bunul simț. Există și cazuri în care tehnica ilustrată trebuie aplicată pentru rezolvarea unor probleme mult mai ample.

Întrebări de autocontrol. *Numerele dintre paranteze se referă la numerotarea paragrafelor.*

1. Ce este o problemă de distribuire? (1)
2. Care este baza metodei de rezolvare? (2)
3. Prin ce anume diferă metoda de rezolvare a problemelor de maximizare de cea a problemelor de minimizare? (3)
4. Cum sunt rezolvate situațiile în care apar inegalități între numărul disponibilităților și cel al destinațiilor? (5)

Exerciții cu răspunsuri

1. Un maistru are în subordine patru muncitori și i s-a cerut să îndeplinească cinci sarcini. Timpii necesari pentru rezolvarea fiecăreia sunt estimați după cum urmează:

	Muncitori			
	Alf	Bill	Charlie	Dave
Sarcina 1	6	12	20	12
2	22	18	15	20
3	12	16	18	15
4	16	8	12	20
5	18	14	10	17

Distribuiți oamenii pentru îndeplinirea acestor sarcini astfel încât timpul total să fie redus la minimum și identificați sarcina care nu va putea fi îndeplinită.

2. O companie are patru comis-voiajori, care trebuie să viziteze patru clienți. Înregistrările profiturilor (în £) pentru vizitele anterioare sunt prezentate în tabel și se cere să se maximizeze profitul printr-o mai eficientă distribuire a personalului.

	A	*B*	*C*	*D*
Client 1	6	12	20	12
2	22	18	15	20
3	12	16	18	15
4	16	8	12	20

BCU MIRCEA CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvarea exercițiilor

1.Se introduce în tabel un muncitor fictiv, astfel încât să avem o matrice pătrată.

	A	*B*	*C*	*D*	Cerere falsă
1	6	12	20	12	0
2	22	18	15	20	0
3	12	16	18	15	0
4	16	8	12	20	0
5	18	14	10	17	0

Se scad numerele de pe coloane cu cel mai mic număr și apoi se acoperă zerourile cu drepte.

~~0~~	~~4~~	~~10~~	~~0~~	~~0~~
16	10	5	8	0
6	8	8	3	0
~~10~~	~~0~~	~~2~~	~~8~~	~~0~~
~~12~~	~~6~~	~~0~~	~~5~~	~~0~~

Se obțin 4 drepte, ceea ce înseamnă că nu este soluția optimă; cel mai mic element este 3.

∴Se scad elementele neacoperite cu 3 unități și se adună elementele acoperite de câte două drepte cu 3 unități:

~~0~~	~~4~~	~~10~~	~~0~~	~~3~~
~~13~~	~~7~~	~~2~~	~~5~~	~~0~~
~~3~~	~~5~~	~~5~~	~~0~~	~~0~~
~~10~~	~~0~~	~~2~~	~~8~~	~~3~~
~~12~~	~~6~~	~~0~~	~~5~~	~~3~~

Am obținut 5 linii, deci aceasta este varianta optimă.

Distribuțiile
B la 4
C la 5
A la 1
Cererea falsă la 2
D la 3
Sarcina 2 nerealizată

2. Scăzând din fiecare valoare 22 de unități, cea mai mare valoare, obținem:

16	10	2	10
0	4	7	2
10	6	4	7
6	14	10	2

BCU IASI/CEITAL UNIVERSITY LIBRARY

Pasul 1

14	8	0	8
0	4	7	2
6	2	0	3
4	12	8	0

Pasul 2

14	6	0	8
0	2	7	2
6	0	0	3
4	10	8	0

Sunt necesare cel puțin 4 drepte, ceea ce înseamnă că am obținut varianta optimă.

Distribuiri	Profit
C la clientul 1	20
A la clientul 2	22
B la clientul 3	16
D la clientul 4	20
	£78

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

EVALUARE ŞI RECAPITULARE

PARTEA 4

Întrebări de examinare cu răspunsuri

Puteți găsi răspunsurile începând cu pagina 570

A1. O companie este pe cale să achiziționeze mașini de făcut cutii și are de ales între tipul X și tipul Y. Pentru această achiziție a fost alocată suma de 160 000£. Mașinile de tipul X costă 5000£ bucata, necesită un număr de 25 de ore de întreținere și reparații săptămânal și are o capacitate de 1500 de cutii pe săptămână. Mașinile de tipul Y costă 10 000£ bucata, necesitând un număr de 10 ore de întreținere și reparații săptămânal și au o capacitate de 2000 de cutii pe săptămână.

Fiecare mașină, fie X, fie Y, necesită o suprafață de 50 metri pătrați pentru amplasare. Compania are disponibilă o suprafață de 1000 de metri pătrați și o disponibilitate de 400 de ore de întreținere și reparații săptămânal. Având în vedere că întreaga producție poate să fie vândută, manageriatul companiei dorește să maximizeze veniturile.

Se cere:

a) să formulați funcția-obiectiv și constrângerile;

b) să reprezentați grafic constrângerile, hașurând aria de fezabilitate;

c) să formulați combinația ideală de mașini care trebuie cumpărate, motivând alegerea;

d) să formulați comentariile care ar putea interesa compania.

CIMA Metode cantitative

A2. O companie are două produse, X și Y. Fiecare dintre aceste produse include trei materiale, în următoarele cantități pe unitatea de produs:

	Materii prime, kg		
Produsul	Materialul A	Materialul B	Materialul C
X	0,4	0,2	0,6
Y	0,3	0,5	0,2

Aprovizionarea cu materialele A și B în perioada imediat următoare este limitată la un maximum de 2200 de kilograme și 2500 de kilograme. Aceste cantități sunt insuficiente pentru satisfacerea integrală a cererilor pentru cele două produse. Nu există nici o limită pentru cantitățile din materialul C care se află la dispoziție.

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Prețurile de vânzare și variabilele de cost sunt următoarele:

Produsul	Prețuri de vânzare £ pe unitate	Costurile variabile £ pe unitate
X	10,00	4,50
Y	13,50	7,00

Nu se stochează produsele realizate.

Se cere:

a) Să formulați modelul de programare liniară care poate să fie aplicat pentru determinarea cantităților care pot fi realizate din fiecare produs, în următoarea perioadă, astfel încât veniturile să se maximizeze.

b) Să folosiți sistemul de ecuații pentru a determina planul optim de producție în perioada următoare.

ACCA Managementul informației

A3. O companie fabrică diverse produse chimice pentru uz agricol. Într-un anumit proces de fabricație, din patru materii prime se realizează trei produse, X, Y și Z.Fiecare tonă de X este o combinație de 0,3 tone A, 0,2 tone B și 0,5 tone de C. Fiecare tonă de Y este o combinație de 0,5 tone de B, 0,1tone de C și 0,4 tone de D. Fiecare tonă de Z este o combinație de 0,2 tone de A, 0,4 tone de B, 0,1 tone de C și 0,3 tone de D.

Cantitatea maximă din fiecare dintre aceste materii prime (exprimată în tone pe săptămână) și costurile lor de producție sunt prezentate în tabelul următor:

Materialul	Maximum disponibil, tonă	Costul, £ / tonă
A	500	10
B	1000	12
C	800	8
D	600	10

Prețurile pe piață pentru fiecare dintre aceste produse chimice sunt următoarele:

Xtragrow	25£ pe tonă
Youngrow	20£ pe tonă
Zupergrow	24£ pe tonă

Se cere:

a) Să formulați această problemă pentru maximizarea venitului săptămânal. Formulați ipotezele relevante pentru model.

b) Tabloul final pentru rezolvarea prin metoda simplex este următorul:

Bază	X	Y	Z	S_1	S_2	S_3	S_4	Valoare
Z	0	0	1	5,35	0,70	–3,49	0	581,4
Y	0	1	0	–4,19	1,63	1,86	0	1023,3
X	1	0	0	–0,23	–0,47	2,33	0	1279,1
S_4	0	0	0	0,07	–0,86	0,30	1	16,3
	0	0	0	29,54	17,07	6,65	0	37 158,1

unde X,Y și Z sunt nivelurile săptămânale de producție pentru cele trei produse, și S1, S2, S3 și S4 sunt cantitățile (exprimate în tone) cu care sunt depășite consumurile de materii prime A, B, C și respectiv D față de disponibilitățile maxime săptămânale.

b_1) Să se găsească nivelurile de producție optime săptămânale pentru cele trei produse.

b_2) Să se determine venitul săptămânal și cantitățile neutilizate din materiile prime.

b_3) Să se calculeze valoarea duală pentru fiecare dintre cele patru materiale, explicându-se semnificațiile lor.

b_4) Compania are ocazia de a vinde numai produsul A la un preț de 15£ tona. Ar trebui să accepte oferta?

ACCA Tehnici decizionale

A4. Explicați valoarea analizei de sensibilitate pentru problemele de programare liniară și arătați în ce fel valorile duale sunt utile pentru identificarea prețului care merită să fie plătit pentru relaxarea constrângerilor.

Compania Venus Computers produce calculatoare personale.Producția sa este concentrată pe trei modele – desktop-386, desktop-286 și laptop-286, fiecare conținând câte un cip CPU. Datorită capacităților limitate de producție, compania nu poate să producă mai mult de 500 de bucăți din modelele desktop și 250 de bucăți din modelul laptop pe lună. Compania are în stoc 120 de cipuri 80 386 (care intră în componența modelului desktop-386) și 400 de cipuri 80 286 (care intră în componența modelului desktop-286 și laptop) pentru o lună. Pentru realizarea unui computer desktop-386 sunt necesare 5 ore de lucru, pentru realizarea unui computer desktop-286 sunt necesare patru ore de lucru iar pentru realizarea unui laptop sunt necesare trei ore de lucru. Compania Venus are o disponibilitate de 2000 de ore de lucru pe luna care urmează. Compania estimează că profitul pentru un calculator desktop-386 este de 250£, pentru un calculator desktop-286 este de 170£ și pentru un laptop este de 150£.

Se cere:

a) Să se formuleze aceste date ca pentru o problemă de maximizare.

b) Datele unui lot de computere realizate de această firmă sunt următoarele:

Venitul

Soluția:

X1 = 120, X2 = 200, X3 = 200

Valoare duală

Constrângerea 3 150, Constrângerea 4 90, Constrângerea 5 20,

unde variabilele X1, X2 și X3 reprezintă producțiile lunare pentru modelele desktop-386, desktop-286 și respectiv laptop-286 iar constrângerile 1-5 reprezintă limitările în privința numărului de modele Desktop, Laptop, cipuri CPU 80386, cipuri CPU 80286 și ore de lucru disponibile.

b_1) Să se interpreteze datele de producție, inclusiv combinația optimă de produse, profitul lunar, resursele neutilizate și valorile duale.

b_2) În datele de producție mai sunt cuprinse și următoarele informații:

Analiza de sensibilitate a coeficienților funcției obiective

Variabila	Limita inferioară	Valoarea originală	Limita superioară
X1	100	250	Fără limită
X2	150	170	200
X3	127,5	150	170

Analiza de sensibilitate a valorilor din partea dreaptă

Constrângerea	Limita inferioară	Valoarea originală	Limita superioară
1	320	500	Fără limită
2	200	250	Fără limită
3	80	120	130
4	350	400	412,5
5	1950	2000	2180

Să se dea o interpretare exhaustivă acestor informații. Să se calculeze creșterea profitului în condițiile în care compania ar fi capabilă să-și asigure un stoc suplimentar de 10 cipuri CPU 80386.

ACCA Tehnici decizionale

A5. Compania Computico Ltd asamblează componente electronice în două fabrici, situate în Londra și Manchester și vinde aceste componente unui număr de trei clienți principali. Comenzile acestor clienți pentru următoarea lună (în unități de produs) sunt: 3000 pentru clientul A, 4200 pentru clientul B și 5300 pentru clientul C.

Deoarece clienții firmei Computico LTD lucrează în domenii diferite, prețurile de desfacere sunt diferite de la un client la altul (se practică modificări în privința componentelor utilizate, la costuri suplimentare nesemnificative). Pentru fiecare unitate de produs, clientul A plătește 108£, clientul B plătește 105£ și clientul C plătește 116£. Costurile variabile de asamblare a componentelor variază de la o fabrică la alta, datorită diferențelor de costuri de salarizare și a prețului diferit al energiei electrice; aceste costuri totale sunt de 28£ pe unitate la Manchester și 36£ pe unitate la Londra.

Costurile de transport pentru fiecare unitate între fabrică și client sunt date în următorul tabel:

De la	Pentru clienți	Costul, £
Manchester	A	45
Manchester	B	40
Manchester	C	55
Londra	A	42
Londra	B	43
Londra	C	44

Directorul financiar de la Computico Ltd trebuie să ia o decizie în privința alocării comenzilor pentru luna următoare între cele două fabrici.

Se cere:

a) Realizați un tabel care să arate veniturile care s-ar realiza dacă s-ar livra câte o unitate de la fiecare fabrică fiecărui client.

b) Presupunând că nu există nici o limitare a capacității de producție la cele două fabrici, să se calculeze venitul maxim total care se poate realiza din comenzile pe luna care urmează și capacitățile asociate pentru cele două fabrici.

c) Comenzile pentru luna următoare venite din partea celor trei clienți depășesc capacitatea de producție combinată a celor două fabrici. Producția maximă pentru fabrica din Manchester este de 4000 de unități, iar pentru fabrica din Londra este de 6000 de unități.

c_1) Utilizând algoritmul tehnicii de transport, să se determine numărul de unități pe care Computico ar putea să le furnizeze fiecăreia dintre cele două fabrici, fiecăruia dintre cei trei clienți dacă dorește să-și maximizeze veniturile.

c_2) Să se calculeze venitul total și să se precizeze care dintre clienți nu va primi întreaga comandă.

c_3) Să se determine reducerea veniturilor totale în comparație cu c_2 dacă Computico dorește să satisfacă complet două din comenzile celor trei clienți.

ACCA Tehnici decizionale

Probleme de examene fără răspunsuri

B1. O companie posedă două fabrici, A și B, ambele fabricând același produs. S-a luat, la nivel managerial decizia de stabilire a numărului de ore de lucru în fiecare dintre cele două fabrici pentru săptămâna care urmează. Fabrica A poate să funcționeze un număr de 75 de ore săptămânal, producând 45 de kilograme pe oră, iar fabrica B poate funcționa un număr de 50 de ore săptămânal, producând 30 de kilograme pe oră. Pentru satisfacerea cererilor clienților, în fiecare săptămână trebuie produse cel puțin 2700 de kilograme. Costul de funcționare pentru o oră a fabricii A este de 2000£ iar pentru fabrica B este de 1000£. Scopul companiei este acela de a minimiza costurile de funcționare.

Se cere:

a) formulați funcția-obiectiv și constrângerile;

b) trasați graficul problemei, hașurând aria de fezabilitate;

c) recomandați o politică de producție,însoțită de motivație și comentarii.

CIMA Metode cantitative

B2. Lui John Frederickson i se oferă ocazia unei pensionări înainte de termen și se gândește cum să investească suma de 50 000£ pe care o va primi în compensație de la compania la care a lucrat. El a decis să investească în două fonduri de investiții, Harlequin și Prince, dar dorește și să depună o anumită sumă în contul companiei sale de construcții, de unde are de câștigat o dobândă anuală de 7%. Obiectivul lui

John este acela de a-și maximiza dobânzile totale realizate din aceste investiții într-un interval de cinci ani, după care plănuiește să-și schimbe în mod radical stilul de viață. Pentru moment, investițiile în fondul Harlequin au o dobândă estimată de circa 9% pe an pentru următoarea perioadă de cinci ani, la care se adaugă o creștere anuală de 2% a capitalului (practic o dobândă anuală de 11%) în timp ce fondul de investiții Prince are o dobândă anuală preconizată pentru următorii cinci ani de 10% și o creștere anuală a capitalului de 6% (practic o dobândă anuală de 16%). John s-a consultat cu contabilul său, care l-a sfătuit să investească în cele două fonduri, păstrând o anumită sumă și pentru compania sa de construcții. Conform opiniei contabilului, cel puțin 70% din suma totală ar trebui să fie investită fie în fondul de investiții Harlequin, fie în compania de construcții. Pentru mai multă siguranță, cel puțin 60% din suma investită în cele două fonduri de investiții ar trebui să fie acordată fondului Harlequin. Pentru a-și asigura o creștere bună a capitalului, cel puțin 30% din banii investiți în cele două fonduri de investiții ar trebui acordați fondului Prince. În continuare, contabilul i-a recomandat să nu investească mai mult de 20 000£ în fondul Harlequin și nici mai mult de 25 000£ în compania de construcții.

Se cere:

a) a_1) având în vedere obiectivul lui John Frederickson, să se formuleze un model de programare liniară cu trei variabile care să arate în ce fel trebuie să fie distribuită suma totală între cele trei destinații de investiții;

a_2) utilizând constrângerea de egalitate, să se reducă problema aceasta la un model cu două variabile, respectiv sumele investite în fondurile de investiții Harlequin și Prince.

b) Să se rezolve problema prin metoda grafică. Stabiliți nivelurile optime ale investițiilor și valoarea finală a fondurilor.

c) Dacă este ignorată recomandarea de a nu investi mai mult de 20 000£ în fondul Harlequin, să se calculeze creșterea de venit pe care ar putea să o înregistreze John Frederickson.

ACCA Tehnici decizionale

B3. O companie fabrică două tipuri de tubulaturi din aluminiu pentru construcții și instalații sanitare. Timpul de lucru pe an este de 48 de săptămâni (pentru o medie de patru săptămâni pe lună), pentru ca în restul timpului să poate avea loc operațiile de reparații, curățenie și alte activități de întreținere. Producerea țevilor implică trei procese fundamentale: încălzirea, formarea și rularea, fiecare dintre aceste trei procese necesitând mașini speciale. Țevile sunt produse la lungimea de 10 metri și ambele tipuri, X și Y, diferă numai în privința aliajului utilizat și acest fapt impune timpi diferiți pentru cele trei procese de bază.

Numărul mașinilor, numărul schimburilor săptămânale de opt ore și procentajul din timp în care mașinile se află în reparații sunt date pentru fiecare proces, în următorul tabel:

Procesul	Numărul de mașini	Numărul schimburilor de 8 ore pe mașină și săptămână	Timpi morți %
Încălzire	5	15	4
Formare	6	5	5
Rulare	3	20	10

Informațiile referitoare la rata producției pentru fiecare mașină, limitele lunare ale vânzărilor și venitul pe țeavă sunt prezentate în următorul tabel:

	Rata producției pe mașină (țevi)			Vânzări lunare maximum	Venitul pe țeavă £
	Încălzire	Formare	Rulare		
Aliajul X	25 pe oră	1 pe minut	25 pe oră	40 000	5
Aliajul Y	20 pe oră	1 pe minut	40 pe oră	30 000	7,5

Directorul de producție dorește să determine producția săptămânală din fiecare tip de aliaj, în cadrul limitelor vânzărilor și ale capacităților de producție ale mașinilor, cu scopul de a maximiza activitatea.

Se cere:

a) Să se arate că capacitatea săptămânală de prelucrare mecanică pentru fiecare dintre cele trei procese este de 576 ore pentru încălzire, 228 ore pentru formare și 432 ore pentru rulare.

b) Să se formuleze un model de programare liniară pentru determinarea nivelului săptămânal optim de producție pentru fiecare aliaj.

c) Să se rezolve problema prin mijloace grafice. Să se enunțe nivelurile săptămânale optime ale producției și veniturile care le corespund.

d) Directorul de producție poate să reducă timpii morți ai mașinilor pentru fiecare proces separat, prin introducerea unor metode noi de lucru. Nu intenționează însă să facă acest lucru decât dacă economiile care ar rezulta sunt semnificative.

Pentru care dintre cele trei procese merită să se reducă timpii morți? Pentru unul dintre aceste procese să se calculeze economia săptămânală realizată de companie dacă procentajul de timpi morți este redus la jumătate.

ACCA Tehnici decizionale

B4. O companie de vânzări en-gros are nouă depozite și dorește să-și raționalizeze activitatea. Patru depozite Q, R, S și T sunt extinse și cinci depozite A, B, C, D și E urmează să fie închise. Treizeci și șase de stivuitoare mecanice care vor fi disponibilizate de la depozitele ce vor fi închise vor fi utilizate în depozitele care vor fi extinse.

Stivuitoarele mecanice sunt dispersate după cum urmează în cele cinci depozite care urmează să fie închise:

A:5, B:7, C:11, D:8, E:9.

Necesarul de stivuitoare necesare în depozitele extinse este:

Q:8, R:9, S:11, T:8.

Costul transportului unui stivuitor mecanic, exprimat în sute de lire, între depozite, este dat în următorul tabel:

Depozite care urmează să fie închise	Depozite care urmează să fie extinse			
	Q	R	S	T
A	3	3	7	9
B	6	5	3	3
C	6	4	8	7
D	5	4	5	4
E	4	3	6	5

Se cere:

a) să demonstrați matematic planul de cost minim pentru satisfacerea cerințelor de raționalizare prin transferuri între depozite;

b) să stabiliți la care depozit va exista un excedent de stivuitoare;

c) să susțineți pe bază de argumente dacă soluția la care ați ajuns este sau nu este unică.

CIMA Tehnici cantitative

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

PARTEA 5

22. ANALIZA ÎN REȚEA – INTRODUCERE ȘI TERMINOLOGIE

1. Obiective

După parcurgerea acestui capitol:

- veți fi familiarizați cu tehnica de control și planificare denumită analiză în rețea;
- veți ști ce se înțelege prin activitate, eveniment și activitate fictivă;
- veți înțelege regulile cheie pentru crearea rețelelor;
- veți cunoște diferitele căi prin care se identifică activitățile;
- veți putea utiliza activitățile fictive în mod corect.

2. Definiție

Analiza de rețea este un termen generic utilizat pentru o familie de tehnici înrudite, concepute pentru a veni în ajutorul manageriatului în privința planificării și controlului proiectelor. Aceste tehnici pun în evidență interrelațiile dintre diferite locuri de muncă și însărcinări care intră în alcătuirea proiectului în ansamblul său, ajutând la identificarea corectă a punctelor critice ale acestuia. Aceste tehnici pot furniza informații în timpi reali în privința planificării și controlului, a costurilor și a resurselor cuprinse în proiectul respectiv. Analiza în rețea a fost concepută pentru a avea o maximă utilitate pentru:

a) proiectele complexe, respectiv acele proiecte care cuprind multe activități corelate și interdependente, și/sau

b) proiecte extinse, respectiv acele proiecte care cuprind o multitudine de tipuri de amenajări, investiții mari de capital, un personal numeros, și/sau

c) în cazurile în care există restricții, respectiv acolo unde proiectele trebuie realizate în cadrul unor limitări impuse de limite de timp sau costuri sau în cazurile în care toate sau majoritatea resurselor (materiale și forța de muncă) sunt limitate.

3. Fundamentarea

O formă elementară de analiză în sistem a fost utilizată în Marea Britanie și în Statele Unite ale Americii la jumătatea deceniului al cincilea al secolului XX, într-o încercare de reducere a timpilor necesari realizării proiectelor.

În 1958, Biroul pentru Proiecte Speciale al Marinei Statelor Unite a format o echipă de specialiști având sarcina de a pune la punct o tehnică de control al planificării proiectelor complexe. Realizarea acestei echipe a constituit-o dezvoltarea unei tehnici de rețea cunoscută sub denumirea de TERP, respectiv tehnica de evaluare și revizie a programelor (în engleză PERT – Programme Evaluation and Review Technique). TERP a fost folosită pentru planificarea și controlul dezvoltării proiectului rachetelor Polaris și s-a apreciat că a adus o economie de timp de 2 ani în finalizarea acestui program.

Din 1958, tehnica a suferit dezvoltări ulterioare, în prezent existând mai multe variante care operează, în afara factorilor de timp cu costuri, resurse, probabilități și diverse combinații ale acestor factori. Există o multitudine de denumiri, dintre care cele mai des folosite sunt:

Planificarea drumului critic	PCC
Analiza drumului critic	ACC
Regimul drumului critic	RCC
Metoda drumului critic	MCC
Tehnica de evaluare și revizie a programelor	TERP etc.

4. Terminologie de bază în domeniul rețelelor

Pentru început voi prezenta numai elementele de bază ale rețelelor, alte caracteristici mai complexe ale acestora urmând a fi prezentate ulterior, în cursul capitolelor ulterioare, pe măsură ce acest lucru se va impune.

Activitate. Reprezintă o însărcinare sau o muncă pentru a cărei realizare este nevoie de timp și de resurse, ca de exemplu: construirea unui zid, verificarea debitorilor din jurnalul de casă, săparea unei fundații etc. Activitatea este reprezentată în cadrul rețelei printr-o săgeată:

Vârful săgeții indică sfârșitul sarcinii iar capătul opus indică începutul său. Săgeata va fi orientată întotdeauna de la stânga la dreapta, dar nu respectă nici o scară de măsură. O serie de activități preliminare deosebit de importante pentru aplicarea analizei în rețea sunt reprezentate de stabilirea:

a) activităților care urmează să fie cuprinse în proiect;

b) relațiilor logice existente între ele, cum ar fi: activitatea de construcție a unei clădiri nu poate începe decât după activitatea de săpare a fundației.

c) unei estimări cu privire la durata în timp pe care se estimează că o va necesita activitatea respectivă. Rețineți că estimarea timpului este întotdeauna necesară, în afara sa fiind necesare și alte estimări de timp, costuri, resurse, probabilități și altele, care se dovedesc importante pe măsură ce se avansează. Vom discuta despre acești factori mai departe.

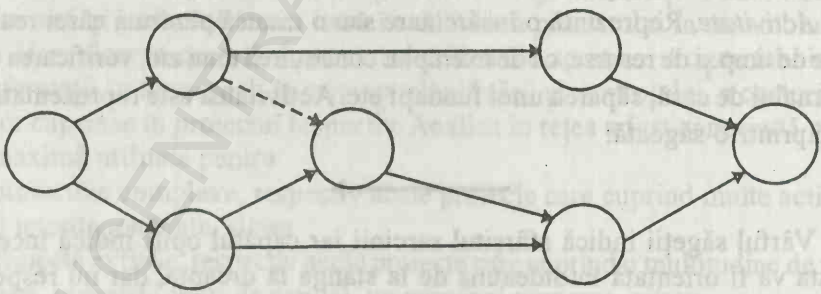
Evenimentul. Reprezintă un moment în timp și indică începutul sau sfârșitul unei activități, mai multor activități etc., așa cum ar fi ridicarea unui perete, verificarea debitorilor, săparea fundației etc. Evenimentul este reprezentat în rețea printr-un *cerc* sau nod, respectiv:

Rețineți că stabilirea activităților determină în mod automat evenimentele, deoarece acestea constituie începutul și sfârșitul activităților, reprezentând îndeplinirea unui anumit stadiu al proiectului.

Activitatea fictivă. Aceasta este o activitate care nu consumă timp sau resurse. Noțiunea este folosită numai pentru a exprima cu claritate dependențele logice dintre activități, pentru a evita încălcarea regulilor de proiectare a rețelelor. Se reprezintă în cadrul rețelelor printr-o *săgeată punctată*, respectiv:

Rețineți că activitățile fictive nu sunt de obicei trecute pe lista activităților reale, devenind necesare pe măsura proiectării rețelei. Voi da exemple de activitate fictivă după discutarea regulilor de proiectare a rețelelor.

Rețea. Reprezintă combinația de activități, activități fictive și evenimente într-o înlănțuire logică în funcție de regulile de proiectare a rețelelor. De exemplu, o rețea mică poate fi reprezentată după cum urmează:

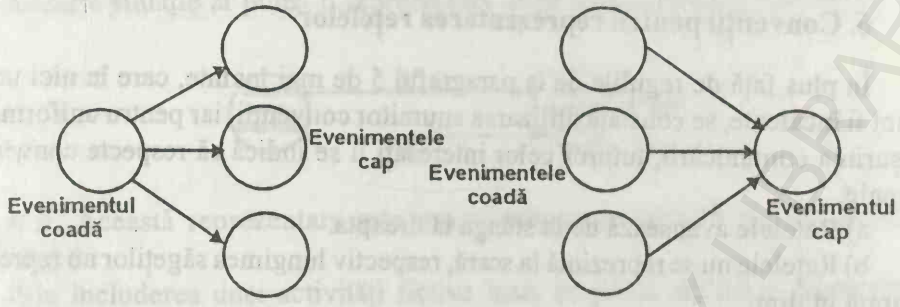


5. Reguli pentru proiectarea rețelelor

Așa cum veți vedea, toate aceste reguli au o bază logică și trebuie însușite foarte bine înainte de a încerca să proiectați rețele.

a) O rețea completă trebuie să aibă un singur punct de intrare – un eveniment de *început* și un singur punct de ieșire – un eveniment de *sfârșit*.

b) Toate activitățile trebuie să aibă un eveniment precedent sau o coadă și un eveniment ulterior sau un cap. Observați că multe activități pot avea comun aceeași coadă și, de asemeni, multe evenimente pot avea același cap, ca de exemplu:

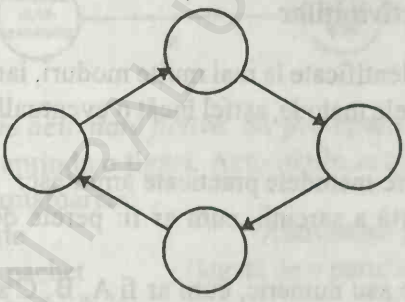


Cu toate acestea, nu trebuie ca o activitate să aibă aceeași coadă *și* în același timp, același cap cu alte activități (mă voi referi la acest aspect în detaliu în cadrul paragrafului 8 referitor la falsuri).

c) Nici o activitate nu poate să înceapă înainte ca evenimentul care constituie coada sa să se fi sfârșit.

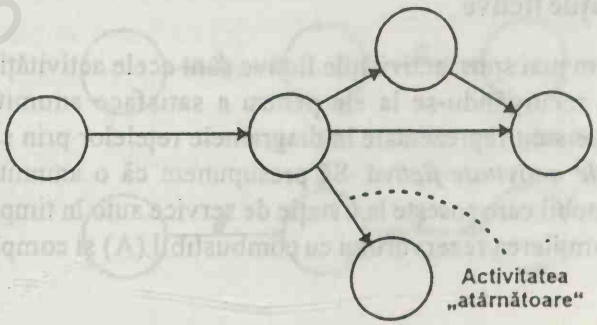
d) Un eveniment nu este complet până când toate activitățile care conduc la el nu se sfârșesc. Aceasta este o regulă foarte importantă și apare invariabil în subiectele de examene.

e) Ciclurile, respectiv o serie de activități care conduc la același eveniment de la care s-a plecat, nu sunt permise deoarece esența rețelelor este reprezentată de progresul activităților la care se referă, care trebuie să avanseze în timp.



Nu se pot folosi ciclurile

f) Toate activitățile trebuie să fie legate de rețea, respectiv trebuie să contribuie la progresul rețelei; în alte condiții se renunță la ele ca fiind irelevante pentru rețea. Activitățile care nu se conectează în proiectul de ansamblu au primit termenul „atârnătoare".



6. Convenții pentru reprezentarea rețelelor

În plus față de regulile de la paragraful 5 de mai înainte, care în nici un caz nu pot fi încălcate, se constată utilizarea anumitor convenții, iar pentru uniformizare și ușurința comunicării, tuturor celor interesați li se indică să respecte convențiile normale.

a) Rețelele avansează de la stânga la dreapta.

b) Rețelele nu se reprezintă la scară, respectiv lungimea săgeților nu reprezintă o durată în timp.

c) Săgețile nu trebuie trasate în planul orizontal decât dacă acest fapt este inevitabil și întotdeauna vor fi îndreptate de la stânga la dreapta.

d) Dacă nu au fost numerotate, evenimentele și nodurile trebuie numerotate progresiv, de la stânga la dreapta. Rețelele simple pot avea evenimente numerotate într-o progresie numerică simplă, de exemplu 1, 2, 3, 4, 5 etc., dar rețelele mari, mai apropiate de realitate, pot fi numerotate din cinci în cinci, respectiv 0, 5, 10, 15 etc., sau din zece în zece, ca de exemplu 0, 10, 20, 30 etc. În acest fel este posibilă numerotarea activităților adiționale care sunt incluse ulterior în rețea, fără a afecta numerotarea întregii rețele.

7. Identificarea activităților

Activitățile pot fi identificate în mai multe moduri, iar cei interesați trebuie să se familiarizeze cu diversele metode, astfel încât o eventuală prezentare nefamiliară să nu creeze confuzie.

În mod curent, dintre metodele practicate amintesc:

a) O descriere scurtă a sarcinii, cum ar fi: perete de gips-carton, comandă scândură etc.

b) Un cod alfabetic sau numeric, cum ar fi A, B, C sau 100, 101, 108 etc.

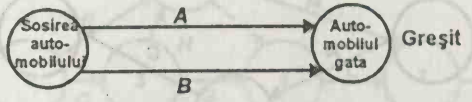
c) Identificarea pe baza numărului evenimentului coadă și cap, ca de exemplu: 1-2, 2-3, 2-5 etc.

8. Activitățile fictive

Așa cum am mai spus, activitățile fictive sunt acele activități care nu necesită timp și resurse, recurgându-se la ele pentru a satisface anumite relații logice. Activitățile fictive sunt reprezentate în diagramele rețelelor prin săgeți punctate.

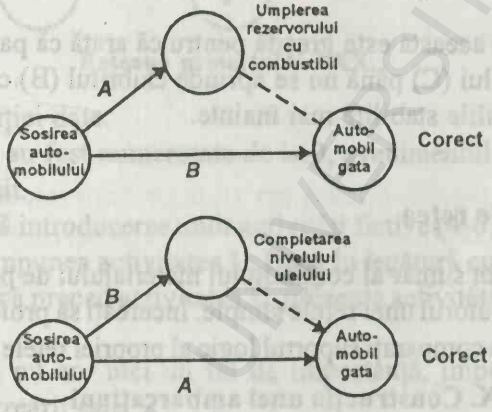
Exemplu de activitate fictivă. Să presupunem că o anumită parte a rețelei implică un automobil care sosește la o stație de service auto în timp ce se desfășoară două activități: umplerea rezervorului cu combustibil (A) și completarea nivelului uleiului (B).

Această situație ar putea fi reprezentată după cum urmează (incorect):



N.B. Această reprezentare este greșită deoarece încalcă regula (b) de la paragraful 5.

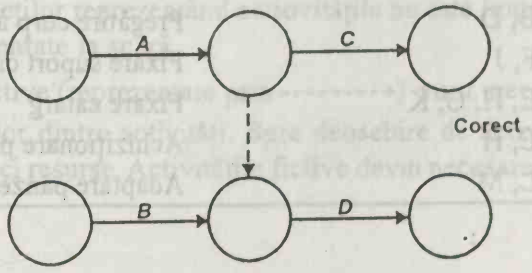
Prin includerea unei activități fictive însă, se poate realiza o reprezentare corectă:



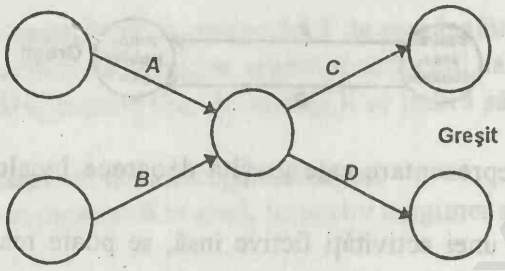
Un alt exemplu de activitate fictivă. Să presupunem că o parte a unei rețele implică un bărbat care aprinde o țigară. Activitățile implicate și relațiile dintre ele se presupune că ar fi următoarele:

Activitate	Activitatea premergătoare
A – Scoate țigarea din pachet	(legată de o parte anterioară a rețelei)
C – Pune pachetul de țigări la loc	A
B – Aprinde chibritul	(legată de o parte anterioară a rețelei)
D – Aprinde țigara	A, B

Rețeaua ar putea fi reprezentată după cum urmează:



Dacă rețeaua ar fi fost reprezentată ca în exemplul următor, ar fi fost greșit.



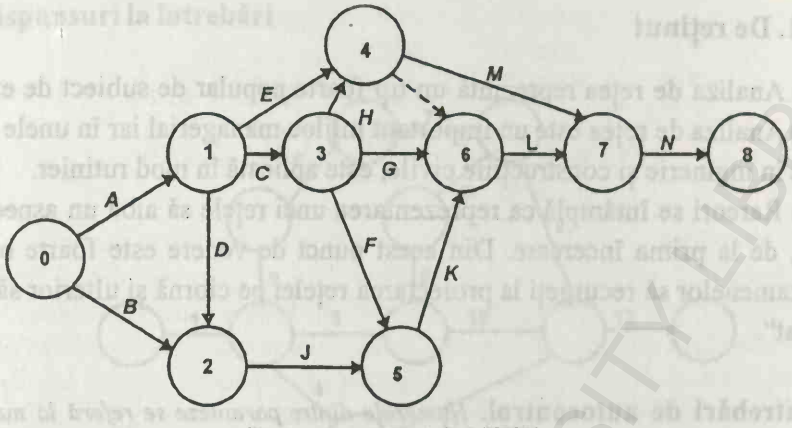
Reprezentarea aceasta este greșită pentru că arată că pachetul de țigări nu ar putea fi pus la locul lui (C) până nu se aprinde chibritul (B) ceea ce nu este corect având în vedere regulile stabilite mai înainte.

9. Exemplu de rețea

Pentru a face un sumar al conținutului materialului de până în acest moment, voi exemplifica cu ajutorul unei rețele simple. Încercați să proiectați dumneavoastră înșivă această rețea și comparați suportul logic al propriei rețele cu soluția următoare.

Proiectul XXX. Construcția unei ambarcațiuni

Activitate	Activitate premergătoare	Descrierea activității
A	–	Proiectare corp ambarcațiune
B	–	Pregătire hangar
C	A	Proiectare catarg și suport catarg
D	A	Realizare corp ambarcațiune
E	A	Proiectare pânze
F	C	Realizare suport catarg
G	C	Realizare catarg
H	C	Proiectare velatură
J	B, D	Pregătire corp ambarcațiune
K	F, J	Fixare suport catarg
L	E, H, G, K	Fixare catarg
M	E, H	Achiziționare pânze și velatură
N	L, M	Adaptare pânze și velatură.



Rețeaua proiectului XXX.

Note asupra soluției date.

a) Evenimentele au fost numerotate de la 0, evenimentul de început, până la 8 evenimentul de sfârșit.

b) A fost necesară introducerea unor activități fictive (4-6) datorită faptului că activitatea anterioară impunea activitatea L. Dacă în legătură cu activitățile E, H nu s-ar fi făcut precizarea că preced activitatea L, prezența activității fictive nu ar fi fost necesară.

c) Forma rețelei nu are nici un fel de importanță, important este suportul logic care stă la baza creării sale.

1. Rezumat

a) Analiza de rețea este utilizată în planificarea și controlul proiectelor mari, complexe.

b) Rețelele cuprind activități (reprezentate prin ——→) și evenimente (reprezentate prin ◯). Activitățile consumă timp și resurse, iar evenimentele sunt repere în timp.

c) Rețelele au un eveniment de pornire și un eveniment de sfârșit. Evenimentul nu este considerat încheiat până când nu se încheie toate activitățile care conduc la el.

d) Lungimea săgeților reprezentând actiovitățile nu este importantă deoarece rețelele nu sunt reprezentate la scară.

e) Activitățile fictive (reprezentate prin - - - - - - - - →) sunt necesare pentru a satisface logica relațiilor dintre activități. Spre deosebire de activitățile reale, nu consumă nici timp și nici resurse. Activitățile fictive devin necesare pe măsură ce se proiectează rețeaua.

11. De reținut

a) Analiza de rețea reprezintă un tip foarte popular de subiect de examen.

b) Analiza de rețea este un important mijloc managerial iar în unele domenii, mai ales în inginerie și construcțiile civile, este aplicată în mod rutinier.

c) Rareori se întâmplă ca reprezentarea unei rețele să aibă un aspect estetic, ordonat, de la prima încercare. Din acest punct de vedere este foarte bine ca în cazul examenelor să recurgeți la proiectarea rețelei pe ciornă și ulterior să o treceți pe „curat".

Întrebări de autocontrol. *Numerele dintre paranteze se referă la numerotarea paragrafelor.*

1.Ce reprezintă analiza de rețea? (2)

2. Ce sunt activitățile și evenimentele? (4)

3. Care sunt regulile de bază pentru proiectarea rețelelor? (5)

4. Lungimea săgeților sugerează în vreun fel durata în timp a activității? (6)

5. Ce este o activitate fictivă? (8)

Exerciții cu răspunsuri

1. Proiectați rețeaua pentru următoarea problemă.

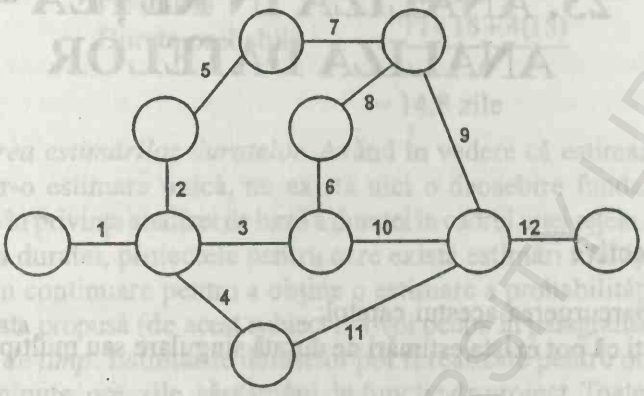
Activitatea	Activitatea premergătoare
1	-
2, 3, 4	1
5	2
6	3
7	5
8	6
9	7, 8
10	3
11	4
12	9, 10, 11

2. Proiectați rețeaua pentru datele de la întrebarea numărul 1, dar în condițiile în care activitatea 8 ar fi precedată de 6 și de 2.

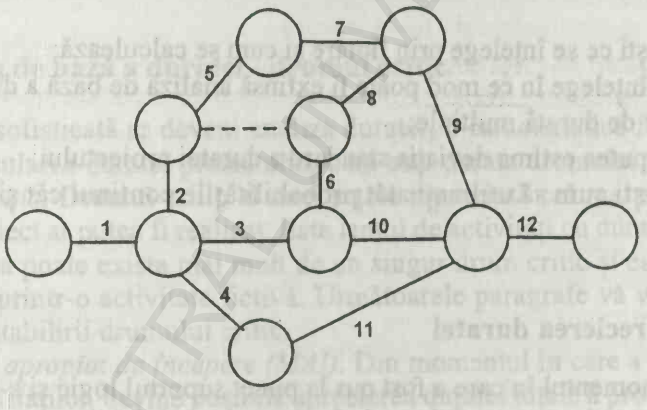
B.C.U. „M. EMINESCU" IAȘI

Răspunsuri la întrebări

1.



2.



BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

23. ANALIZA ÎN REȚEA – ANALIZA DATELOR

1. Obiective

După parcurgerea acestui capitol:

• veți ști că pot exista estimări de durată singulare sau multiple pentru fiecare analiză;

• veți putea defini drumul critic;

• veți înțelege cum se poate găsi drumul critic folosind metoda pasului înainte și înapoi;

• veți ști ce se înțelege prin flotare și cum se calculează;

• veți înțelege în ce mod poate fi extinsă analiza de bază a duratei pornind de la estimările de durată multiple;

• veți putea estima deviația standard a duratei proiectului;

• veți ști cum să utilizați atât probabilitățile continui cât și pe cele discrete în rețele.

2. Aprecierea duratei

Din momentul în care a fost pus la punct suportul logic și s-a schițat rețeaua, mai trebuie precizate numai duratele în timp ale activităților pentru ca proiectarea rețelei să poată fi considerată finalizată.

a_1) Estimarea duratelor. Analiza duratelor proiectului se poate realiza folosind:

a_2) estimările singulare ale duratelor pentru fiecare activitate. Aceste estimări se bazează pe judecata persoanei care proiectează rețeaua sau pe calcule tehnice în care se pot folosi datele unor proiecte similare;

ii) estimările multiple pentru fiecare activitate. Cel mai uzual tip de estimare multiplă a duratei unei activități este reprezentată de estimarea triplă: optimistă (O), cea mai probabilă (CMP) și pesimistă (P). Aceste trei estimări sunt combinate pentru a da durata probabilă iar formula acceptată pentru acest calcul este următoarea:

$$\text{Durata probabilă} = \frac{O + P + 4CMP}{6}.$$

De exemplu, să presupunem că estimarea triplă pentru o activitate oarecare este următoarea:

Optimistă 11 zile
Cea mai probabilă 15 zile
Pesimistă 18 zile
Durata probabilă $= \frac{11+18+4(15)}{6}$
$= 14{,}8$ zile

b) *Utilizarea estimărilor duratelor.* Având în vedere că estimarea triplă este transformată într-o estimare unică, nu există nici o deosebire fundamentală între cele două metode în privința analizei de bază a duratei în cadrul unei rețele. Aprofundând analiza de bază a duratei, proiectele pentru care există estimări multiple ale duratei pot fi analizate în continuare pentru a obține o estimare a probabilității de încheiere a proiectului la data propusă (de acest subiect mă voi ocupa în paragraful 8).

c) *Unități de timp.* Estimările duratelor pot fi realizate pentru orice unitate de timp, respectiv minute, ore, zile, săptămâni, în funcție de proiect. Toate estimările de durată ale unui proiect trebuie să fie realizate în aceeași unitate de timp, pentru a evita apariția confuziilor.

3. Analiza de bază a duratei - drumul critic

Oricât de sofisticată ar deveni analiza duratei, o caracteristică fundamentală a sa rămâne calcularea duratei proiectului, care este durata drumului critic.

Drumul critic. Drumul critic al unei rețele reprezintă cel mai scurt timp în care întregul proiect ar putea fi realizat. Este lanțul de activități cu duratele cele mai lungi. Într-o rețea poate exista mai mult de un singur drum critic și este posibil ca acesta să treacă printr-o activitate fictivă. Următoarele paragrafe vă vor arăta, pas cu pas, metoda stabilirii drumului critic.

Momentul apropiat de începere (MAI). Din momentul în care a fost stabilită succesiunea activităților, devine posibilă aprecierea duratei totale a proiectului, prin calcularea momentului apropiat de începere pentru fiecare activitate. *MAI* reprezintă cel mai apropiat moment în timp în care poate să înceapă o activitate și metoda de calcul va fi prezentată în următorul exemplu.

Să presupunem că a fost proiectată următoarea rețea (fig. 23.1), duratele activităților fiind estimate în zile.

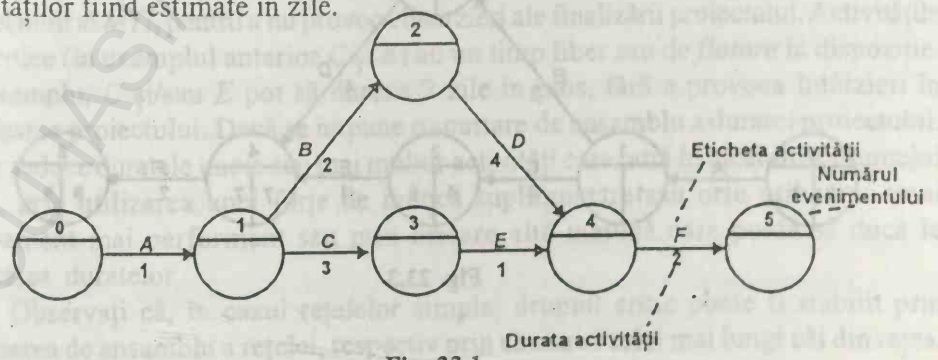


Fig. 23.1

MAI se va insera după cum rezultă din fig. 23.2

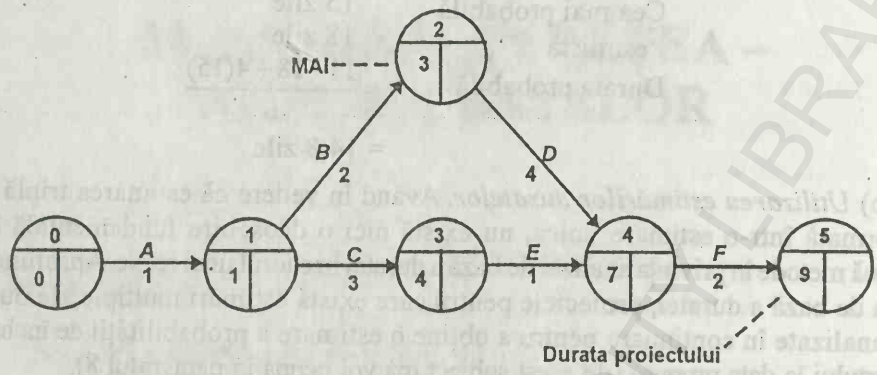


Fig. 23.2

Note privind calculul *MAI* (numită și metoda pasului înainte):

a) *MAI* pentru capul unui eveniment este obținut prin adunarea la *MAI* al cozii evenimentului a duratei activității din rețea, începând cu evenimentul 0, momentul 0 și continuând pe toată rețeaua.

b) În cazul în care două trasee ale rețelei trebuie să ajungă concomitent în același nod, se va alege cea mai lungă durată pentru fiecare traseu. De exemplu, activitatea *F* depinde de încheierea activităților *D* și *E*. *E* trebuie să fie încheiată până în ziua a 5-a, dar *D* nu va fi încheiată mai devreme de ziua a 7-a. ∴ Activitatea *F* nu poate să înceapă înaintea zilei a 7-a.

c) *MAI* pentru evenimentul 5, de sfârșit al proiectului, reprezintă totodată și durata cea mai scurtă în care poate să fie încheiat proiectul.

Momentul târziu de început (MTI). Pentru izolarea drumului critic, trebuie stabilit și *MTI* pentru fiecare activitate. *MTI* reprezintă momentul cel mai târziu la care o activitate se poate sfârși fără a mări durata totală a proiectului. Pornind de la exemplul de mai înainte, *MTI* rezultă din fig. 23.3.

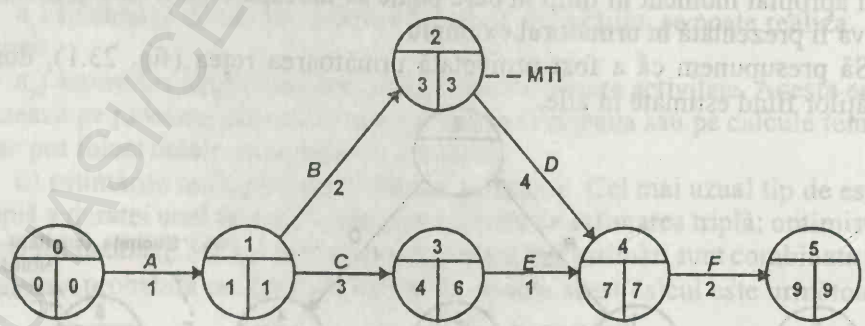


Fig. 23.3

Note privind calculul *MTI* (numită și pasul înapoi).

a) Începând cu evenimentul de sfârșit, evenimentul numărul 5, se inseră în nodurile rețelei *MTI*, respectiv ziua a 9-a și apoi se trece în revistă în sens opus rețeaua, scăzând durata fiecărei activități din *MTI*-ul calculat anterior.

b) Acolo unde cozile activităților *B* și *C* se unesc, la nivelul evenimentului 1, *MTI* pentru *C* este 3 zile și *MTI* pentru *B* este 1 zi. Se alege cel mai mic număr pentru *MTI*-ul evenimentului 1, deoarece dacă evenimentul 1 începe în ziua a 3-a, activitățile *B* și *D* nu ar putea fi încheiate până în ziua a 7-a așa cum s-a stabilit, provocând întârzierea finalizării proiectului.

4. Drumul critic

Examinând fig. 23.3 putem observa că un drum din rețea (*A*, *B*, *C*, *F*) are *MAI* și *MTI* identice. Acesta este *drumul critic* și trebuie remarcat faptul că este drumul cu duratele cele mai lungi din rețea. Drumul critic poate fi marcat pe rețea fie cu o culoare diferită, fie prin aplicarea unui semn egal perpendicular pe coada săgeților care aparțin drumului critic, după cum rezultă din fig. 23.4.

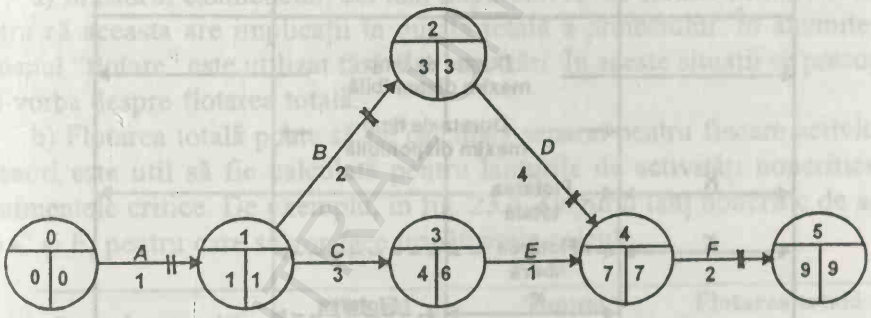


Fig. 23.4

Implicațiile drumului critic. Activitățile care alcătuiesc drumul critic sunt activități de importanță vitală pentru proiect și ele trebuie finalizate conform *MAI* sau cel mult al *MTI*, pentru a nu provoca întârzieri ale finalizării proiectului. Activitățile noncritice (în exemplul anterior *C* și *E*) au un timp liber sau de *flotare* la dispoziție. De exemplu, *C* și/sau *E* pot să dureze 2 zile în plus, fără a provoca întârzieri în finalizarea proiectului. Dacă se impune o scurtare de ansamblu a duratei proiectului, se vor reduce duratele uneia sau mai multor activități care intră în alcătuirea drumului critic, prin utilizarea unei forțe de muncă suplimentare sau prin utilizarea unui echipament mai performant sau prin oricare altă metodă care poate să ducă la reducerea duratelor.

Observați că, în cazul rețelelor simple, drumul critic poate fi stabilit prin aprecierea de ansamblu a rețelei, respectiv prin căutarea celei mai lungi căi din rețea.

Metoda prezentată anterior este indispensabilă însă în cazul proiectelor complexe, ample și trebuie însușită foarte bine. Această metodă este similară celor folosite de majoritatea programelor de computer cu aplicații în analize de sistem.

5. Flotarea

Flotarea sau timpul liber nu poate fi asociat decât activităților noncritice. Prin definiție, activitățile care aparțin drumului critic posedă această caracteristică. Există trei tipuri de flotare: flotarea totală, flotarea liberă și flotarea independentă. Pentru a ilustra aceste tipuri de flotări, să luăm o parte dintr-o rețea și o diagramă a duratelor (fig. 23.5).

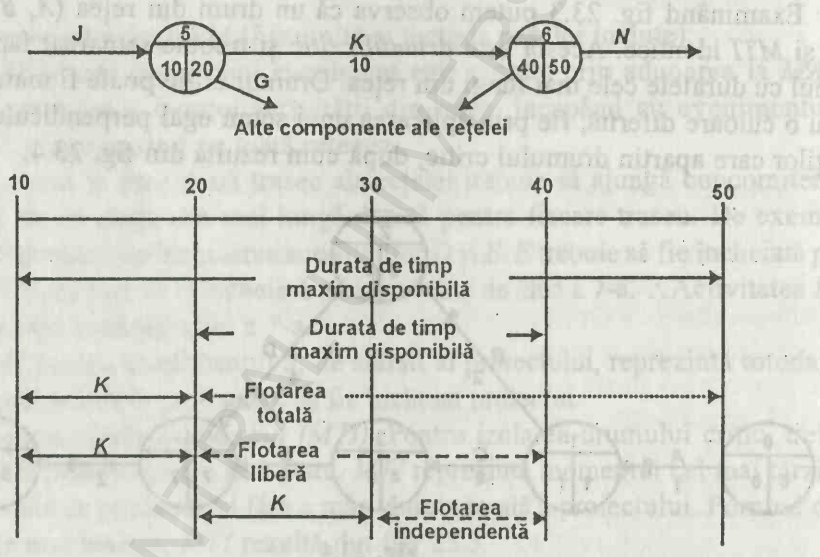


Fig. 23.5

a) *Flotarea totală*

Reprezintă timpul total cu care o cale de activități poate să întârzie fără a afecta durata totală a proiectului (pentru simplitate, calea aleasă în exemplu constă într-o singură activitate, respectiv activitatea *K*).

Flotarea totală = momentul târziu al capului – momentul apropiat al cozii – – durata activității.

Flotarea totală = 50 – 10 – 10

= 30 de zile.

b) *Flotarea liberă*

Reprezintă durata de timp cu care o activitate poate să fie întârziată fără a afecta începerea unei activități ulterioare la momentul apropiat de începere al acesteia, dar afectând flotarea unei activități anterioare.

Flotarea liberă = momentul apropiat al capului – momentul apropiat al cozii – – durata activității.

Flotarea liberă = 40 – 10 – 10
= 20 de zile.

c) *Flotarea independentă*

Reprezintă durata de timp cu care o activitate poate să fie întârziată atunci când activitățile anterioare sunt încheiate la limita târzie a termenului, iar celelalte activități premergătoare la limitele ce le mai apropiate posibile. Prin urmare, flotarea independentă nu afectează flotările activităților anterioare și ulterioare.

Flotarea independentă = momentul apropiat al capului – momentul târziu al cozii – durata activității.

Flotarea independentă = 40 – 20 – 10
= 10 zile.

Note:

a) În cadrul examenelor, cel mai important tip de flotare este flotarea totală, pentru că aceasta are implicații în durata totală a proiectului. În anumite ocazii, termenul "flotare" este utilizat fără alte precizări. În aceste situații se presupune că este vorba despre flotarea totală.

b) Flotarea totală poate să fie calculată separat pentru fiecare activitate, dar adeseori este util să fie calculată pentru lanțurile de activități noncritice dintre evenimentele critice. De exemplu, în fig. 23.4, singurul lanț noncritic de activități este C și E, pentru care se vor face următoarele calcule.

Lanțul non-critic	Timpul necesar	Timpul disponibil	Flotarea totală pe lanț
C, E	3 + 1 = 4 zile	7 – 1 = 6 zile	= 2 zile

Dacă flotarea lanțului este consumată într-una dintre activitățile acestuia, acest fapt reduce considerabil libertatea celorlalte activități din lanț de a înregistra întârzieri.

c) Termenii alternativi pentru momentul apropiat al capului și momentul târziu al capului sunt momentul apropiat al sfârșitului (*MAS*) și momentul târziu al sfârșitului (*MTS*).

6. Exemple de calcul pentru flotări

Exemplul folosit în capitolul precedent (§9) este reprodus în continuare, cu o completare: duratele activităților. Se cere să se găsească drumul critic și toate flotările.

Proiectul XXX. Construcția unei ambarcațiuni

Activitatea	Activitatea premergătoare	Descrierea activității	Durata activității zile
A	–	Proiectare corp ambarcațiune	9
B	–	Pregătire hangar	3
C	A	Proiectare catarg și suport	8
D	A	catarg	2
E	A	Realizare corp ambarcațiune	3
F	C	Proiectare pânze	2
G	C	Realizare suport catarg	6
H	C	Realizare catarg	1
J	B D	Proiectare velatură	4
K	F J	Pregătire corp ambarcațiune	1
L	E, H, G, K	Fixare suport catarg	2
M	E, H	Fixare catarg	3
N	L, M	Achiziționare pânze și velatură Adaptare pânze și velatură	4

Soluția

Rețeaua este reprezentată în maniera normală în fig. 23.6, din care se observă că drumul critic este reprezentat de activitățile *A*, *C*, *G*, *L*, *N* cu o durată de 29 de zile.

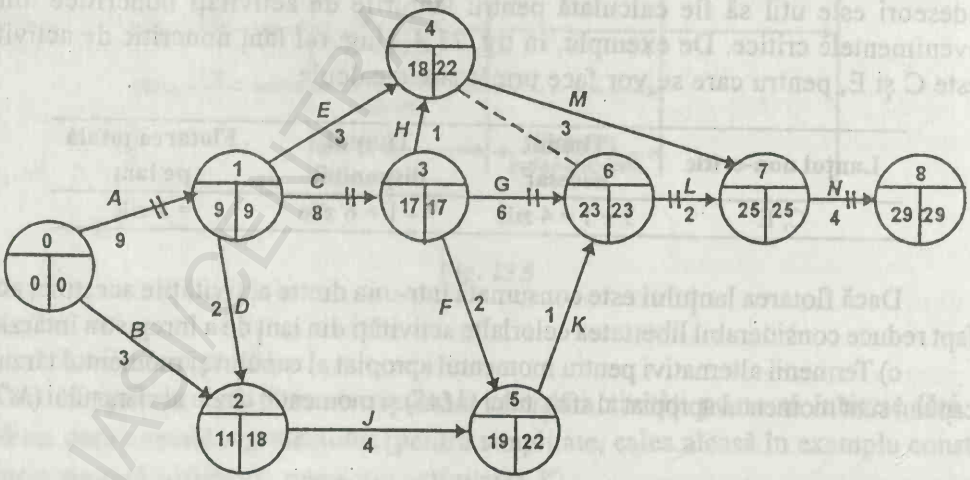


Fig. 23.6. Rețeaua proiectului XXX.

Calculele de flotare sunt prezentate în tabelul 23.1

Tabelul 23.1

Proiectul XXX

Activitatea		*MAI*	*MTI*	*MAS*	*MTS*	*D*	Flotarea totală (*MTS-MAI-D*)	Flotarea liberă (*MAS-MAI-D*)	Flotarea independentă (*MAS-MTI-D*)
A	*	0	0	9	9	9	–	–	–
B		0	0	11	18	3	15	8	8
C	*	9	9	17	17	8	–	–	–
D		9	9	11	18	2	7	–	–
E		9	9	18	22	3	10	6	6
F		17	17	19	22	2	3	–	–
G	*	17	17	23	23	6	–	–	–
H		17	17	18	22	1	4	–	–
J		11	18	19	22	4	7	4	–
K		19	22	23	23	1	3	1	–
L	*	23	23	25	25	2	–	–	–
M		18	22	25	25	3	4	4	–
N	*	25	25	29	29	4	–	–	–

* *Activități critice*

Calculele de flotare

Flotarea totală pe lanțurile noncritice poate de asemenea să fie calculată:

Lanțul noncritic	Timpul necesar	Timpul disponibil	Flotarea totală pe lanț
B, J, K	8	23	15
D, J, K	7	14	7
F, K	3	6	3
E, M	6	16	10
H, M	4	8	4
E, activitatea falsă	3	14	9
H, activitatea falsă	1	6	5

7. Stagnarea

Reprezintă diferența dintre momentul apropiat de începere și momentul târziu de începere pentru fiecare eveniment. În mod strict, nu se aplică activităților, dar în

anumite ocazii pot să apară confuzii de terminologie în cadrul întrebărilor de examinare și în afara situațiilor în care contextul face foarte clară necesitatea introducerii unei stagnări, este mai probabil să fie necesară o flotare a activității. Evenimentele de pe drumul critic au stagnarea zero.

8. Aprofundarea analizei de durată a proiectului

Metodele mai sofisticate de analiză a duratelor presupun disponibilitatea pentru o anumită formă de distribuție a duratei fiecărei activități, respectiv estimarea triplă descrisă în paragraful 2. Aceste modele mai sofisticate oferă posibilitatea evaluării probabilității de respectare a termenelor programate.

Exemplu probabilistic. Să presupunem că un proiect simplu este reprezentat de rețeaua din fig. 23.7. Duratele activităților sunt date în săptămâni și pentru fiecare dintre activități au fost date trei estimări. Durata estimată de realizare a proiectului poate fi calculată folosind ceea ce se numește formula PERT:

$$\frac{\text{Durata optimistă} + \text{durata pesimistă} + 4 \times \text{durata cea mai probabilă}}{6}.$$

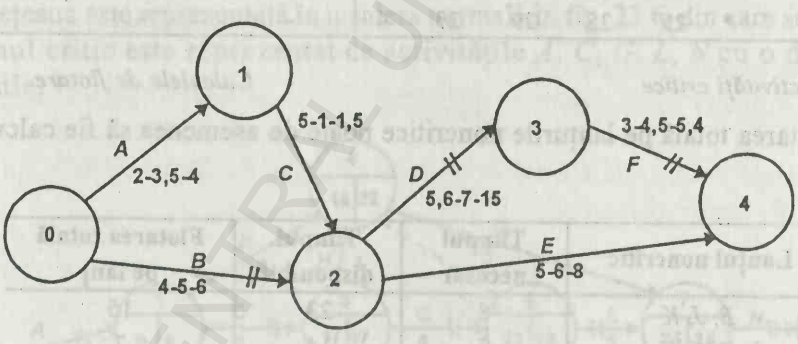


Fig. 23.7

Durata preconizată a căii critice *B*, *D*, *F*:

$$B = \frac{4+6+4\times5}{6} = 5 \text{ săptămâni},$$

$$D = \frac{5{,}6+15+4\times7}{6} = 8{,}1 \text{ săptămâni},$$

$$F = \frac{3+5{,}4+4\times4{,}5}{6} = 4{,}4 \text{ săptămâni},$$

$$= 17{,}5.$$

Dacă activitățile critice s-ar produce în momentele corespunzătoare estimării optimiste, evenimentul 4 ar putea să înceapă în 12,6 săptămâni, iar dacă acestea s-ar produce în momentele corespunzătoare estimărilor pesimiste, evenimentul 4 ar putea să înceapă în 26,4 săptămâni. Având în vedere că această durată depășește cu mult data programată pentru finalizarea proiectului - săptămâna a 19-a - trebuie făcută o estimare care să arate care este probabilitatea ca programul să fie respectat. Algoritmul pentru această operație este următorul:

a) Se estimează deviația standard pentru fiecare dintre activitățile critice. Dacă nu mai este disponibilă nici o altă infirmație adițională, se va aplica următoarea formulă PERT:

$$\frac{\text{Estimarea pesimistă} - \text{Estimarea optimistă}}{6}.$$

Pe baza acestei formule se obțin deviațiile standard la:

$$\text{Activitatea B} = \frac{6-4}{6} = 0{,}33,$$

$$\text{Activitatea D} = \frac{15-5{,}6}{6} = 1{,}57,$$

$$\text{Activitatea F} = \frac{5{,}4-3}{6} = 0{,}4.$$

b) Se află deviația standard a evenimentului 4 prin calcularea sumei statistice (rădăcina pătrată a sumei pătratelor) a deviațiilor standard ale tuturor activităților care aparțin drumului critic,

respectiv deviația standard a evenimentului 4 $= \sqrt{0{,}33^2 + 1{,}57^2 + 0{,}4^2}$

$= 1{,}65$ săptămâni.

c) Calculați numărul de deviații standard ale evenimentului cu care este depășită durata preconizată, respectiv

$$\frac{19-17{,}5}{1{,}65} = 0{,}91.$$

d) Căutați această valoare (0,91) în tabelul de arii subiacente curbei normale pentru a afla probabilitatea (tabelul I). În acest caz, probabilitatea de încheiere a proiectului în săptămâna a 19-a este de 82%.

Interpretarea probabilităților. Dacă manageriatul consideră că o probabilitate de 82% nu este suficient de mare, trebuie depuse în continuare eforturi pentru reducerea timpilor sau a alocării timpilor activităților aparținând drumului critic. A încerca să aduceți probabilitatea de încheiere a proiectului spre 100% sau să o faceți egală cu 100% ar însemna să utilizați resursele într-un mod ineficient. În acest caz,

manageriatul poate foarte bine să accepte o eventualitate de 18% de nerealizare a proiectului la data stabilită ca fiind foarte realistă.

Note:

a) Metodele de calculare a duratei preconizate și a deviației standard, așa cum am arătat mai înainte nu pot fi apreciate ca fiind strict valabile din punct de vedere matematic, dar sunt în mod sigur suficient de precise pentru marea parte a scopurilor propuse. Unii experți consideră că deviația standard, calculată așa cum am arătat mai înainte, subestimează „adevărata" deviație standard.

b)Atunci când duratele activităților înregistrează variații, drumul critic va suferi și el modificări pe măsura apariției acestor variații. Prin urmare, este necesar să examinați cu un ochi critic lanțurile de activități atunci când aveți în față un subiect care conține referiri la variații ale duratelor activităților din cadrul unei rețele, mai ales în cazul examenelor și concursurilor.

9. Probabilitățile discrete

În locul probabilităților continui, care au fost utilizate în exemplul de la paragraful 7 de mai înainte, în anumite situații probabilitățile sunt exprimate în termeni discreți. De exemplu, estimările duratei unei activități pot fi următoarele:

Activitatea	Estimări	
	Timpul	Probabilitatea
A	8 săptămâni	0,6
	11 săptămâni	0,4

Durata preconizată a activității A ar trebui să fie $(8\times0,6) + (11\times0,4) = 9,2$ săptămâni.

Exemplu de probabilitate discretă. Să presupunem că estimarea de durată anterioară a fost realizată pentru următoarea rețea (fig. 23.8), apelând la probabilități discrete după cum urmează:

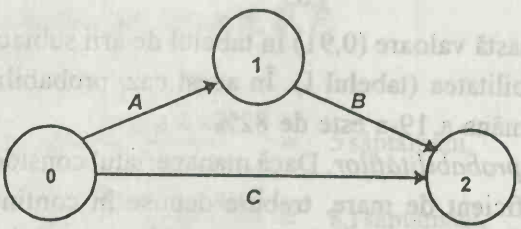


Fig. 23.8

Activitatea	Estimări	
	Timpul, săptămâni	Probabilitatea
A	6	0,5
	10	0,5
B	3	0,4
	5	0,6
C	12	0,6
	14	0,3
	17	0,1

Duratele preconizate ale acestor activități sunt:

$$A = (6 \times 0{,}5) + (10 \times 0{,}5) = 8,$$
$$B = (3 \times 0{,}4) + (5 \times 0{,}6) = 4{,}2,$$
$$C = (12 \times 0{,}6) + (14 \times 0{,}3) + (17 \times 0{,}1) = 13{,}1.$$

Pe baza duratelor preconizate, se observă că drumul critic este reprezentat de activitatea *C* care are o durată de 13,1 săptămâni. Cu toate acestea, mai există numeroase alte posibilități și probabilitățile respectării termenelor de execuție, deci a încheierii proiectului în cea de-a 14-a săptămână poate fi evaluată după cum rezultă în continuare.

Drumul *A*, *B* poate avea patru durate, fiecare cu câte o probabilitate asociată, după cum urmează:

Drumul *A*, *B*				
Durata, săptămâni	9	11	13	15
Probabilitatea	0,2	0,3	0,2	0,3

Aceste valori sunt calculate prin combinarea duratelor și probabilităților activităților *A* și *B*. De exemplu, durata activității *A* este de 6 săptămâni, cu o probabilitate de 0,5 și este combinată cu durata activității *B* care este de 3 săptămâni, cu o probabilitate de 0,2 (respectiv 0,5×0,4).

Drumul C			
Durata, săptămâni	12	14	17
Probabilitatea	0,6	0,3	0,1

Drumul *A*, *B* și drumul alternativ *C* alternează ca drum critic, în funcție de variațiile probabilităților, așa cum se arată în tabelul următor:

			Drumul *A, B*				
			9	11	13	15	Durata
			0,2	0,3	0,2	0,3	Probabilitatea
	Durata	Probabilitatea					
Drumul C	12	0,6	12 0,12	12 0,18	13* 0,12	15 0,18	
	14	0,3	14 0,06	14 0,09	14 0,06	15 0,09	
	17	0,1	17 0,02	17 0,03	17 0,02	17 0,03	

*Aceasta înseamnă că, dacă drumul A, B cu durata de 13 săptămâni şi probabilitatea de îndeplinire de 0,2, coincide ca perioadă cu drumul C care are durata de 12 săptămâni cu o probabilitate de îndeplinire de 0,6, drumul critic va fi reprezentat de drumul cu durata de 13 săptămâni şi cu probabilitatea de îndeplinire de 0,12 (0,6x0,2).

Totalul duratelor posibile

Probabilitatea pentru 12 săptămâni (0,12 + 0,18) = 0,30
Probabilitatea pentru 13 săptămâni (0,12) = 0,12
Probabilitatea pentru 14 săptămâni (0,06 + 0,09 + 0,06) = 0,21
Probabilitatea pentru 15 săptămâni (0,18 + 0,09) = 0,27
Probabilitatea pentru 17 săptămâni (0,02 + 0,03 + 0,02 + 0,03) = 0,10
= 1,00

Prin urmare, probabilitatea de îndeplinire a proiectului în 14 săptămâni sau mai puţin este de **0,63** (0,30+0,12+0,21) iar probabilitatea de depăşire a termenului programat este de **0,37**.

10. Rezumat

a) Analiza de bază a duratei într-o reţea implică calcularea drumului critic, respectiv cel mai scurt timp în care poate fi finalizat proiectul.

b) Drumul critic este stabilit prin calcularea momentului apropiat de începere şi a momentului târziu de începere pentru fiecare eveniment, după care valorile obţinute sunt comparate. Drumul critic reprezintă lanţul de activităţi pentru care momentul apropiat de începere şi momentul târziu de început sunt identice.

c) Flotarea reprezintă timpul liber care apare în activităţile noncritice. Există trei tipuri de flotări: flotarea totală, flotarea liberă şi flotarea independentă.

d) Pentru calcularea probabilităţii respectării datelor programate este necesar să se stabilească ce variabilitate este posibil să existe pentru fiecare activitate în parte.

e) Când sunt date estimările de durată ale activităților, valoarea prezumată a duratei proiectului poate să fie calculată și se poate realiza o estimare a deviațiilor standard ale activității.

f) Deviațiile standard ale activității sunt combinate pentru a da naștere deviației standard totale a întregului proiect, astfel încât să poată fi realizate estimări probabilistice pentru diferitele posibilități de durată ale proiectului.

11. De reținut

a) Situațiile în care ne confruntăm cu incertitudini apar în mod sistematic în domeniul tehnicilor cantitative. Prin urmare este foarte posibil ca întrebările de examinare și verificare a cunoștințelor să conțină și ele durate variabile ale activităților împreună cu probabilitățile corespunzătoare.

b) Atunci când se lucrează cu estimări variabile ale duratelor, este posibil ca drumurile apropiate de drumul critic să aibă o variabilitate mai mare decât drumul critic, astfel încât drumurile apropiate de cel critic pot influența estimările probabilistice.

c) Elementele fundamentale ale estimării deviației standard date în paragraful 8 reprezintă distribuția normală. Se știe că practic toate distribuțiile sunt cuprinse în limitele de $\pm 3\sigma$, de unde și formula:

$$\frac{\max - \min}{6} = \sigma .$$

Cu toate acestea, este foarte puțin probabil să apară foarte frecvent cozile distribuției, astfel încât conceptul de 95% să poată fi utilizat, caz în care media este cuprinsă între $\pm 2\sigma$. Dacă se consideră că acest lucru este realist, se poate folosi formula

$$\frac{\text{Durata pesimistă} - \text{durata optimistă}}{4} = \sigma.$$

Întrebări de autoevaluare. *Numerele dintre paranteze se referă la numerotarea paragrafelor.*

1. Ce tipuri de estimări se fac referitor la duratele activităților? (2)
2. Ce înseamnă drumul critic? (3)
3. Ce reprezintă MAI și MTI(3)
4. Cum se determină drumul critic? (4)
5. Ce reprezintă flotarea? (5)
6. Atunci când se cunosc estimările multiple ale duratelor activităților, cum se poate calcula probabilitatea realizării proiectului la termenul programat? (8)

Exerciții cu răspunsuri

1. Să se găsească drumul critic pentru următoarea rețea, folosind MAI și MTI.

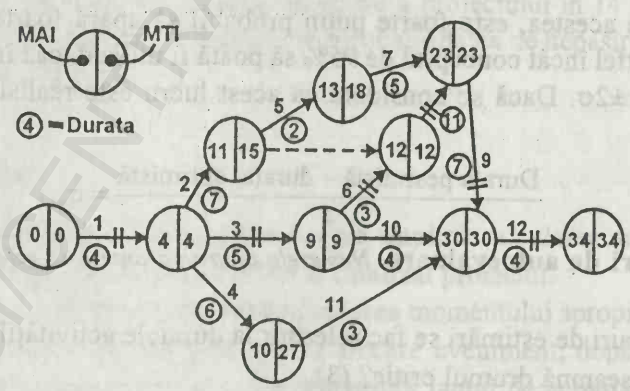
Activitatea	Activitatea precedentă	Durata, zile
1	–	4
2	1	7
3	1	5
4	1	6
5	2	2
6	3	3
7	5	5
8	2, 6	11
9	7, 8	7
10	3	4
11	4	3
12	9, 10, 11	4

2. Să se calculeze flotările rețelei de la punctul 1.

3. Deviațiile standard ale activităților care aparțin drumului critic de la punctul 1 sunt: 1, 2, 1,5, 3, 2,5 și respectiv 3. Pe baza acestor valori să se calculeze probabilitatea ca proiectul să fie realizat în limita termenului propus, de 40 de zile.

Răspunsuri la exerciții

1.



2.

Activitatea	*MAI*	*MTI*	*MAS*	*MTS*	*D*	Flotarea totală (*MTS-MAI-D*)	Flotarea liberă (*MAS-MAI-D*)	Flotarea independentă (*MAS-MTI-D*)
*1	0	0	4	4	4	–	–	–
2	4	4	11	15	7	4	–	–
*3	4	4	9	9	5	–	–	–
4	4	4	10	22	6	12	–	–
5	11	15	13	21	2	8	–	–
*6	9	9	15	15	3	–	–	–
7	13	21	23	23	5	5	5	–
*8	12	12	23	23	11	–	–	–
*9	23	23	30	30	7	–	–	–
10	9	9	30	30	4	17	17	17
11	10	22	30	30	3	17	17	5
*12	30	30	34	34	4	–	–	–

* Fără flotare (nota traducătorului)

3. Deviația standard a căii critice $= \sqrt{1^2 + 2^2 + 1{,}5^2 + 3^2 + 2{,}5^2 + 3^2} = 5{,}61$.

$$\therefore Z = \frac{40 - 34}{5{,}61} = 1{,}07.$$

Din tabelul I, probabilitatea este aproape 36%.

BCU "I.C. BRĂTIANU" UNIVERSITY LIBRARY

24. ANALIZA ÎN REȚEA – PLANIFICAREA COSTURILOR

1. Obiective

După parcurgerea acestui capitol:

- veți înțelege principiile planificării prețurilor minime sau ale reducerii rețelei;
- veți înțelege semnificațiile costurilor normale și intensive, duratelor normale și intensive și ale pantelor prețurilor;
- veți putea utiliza regulile planificării costului minim;
- veți ști cum se reduce o rețea.

2. Costurile și rețelele

O altă caracteristică importantă a analizei în rețea este reprezentată de costurile activităților și ale proiectului în ansamblul său. Această analiză este cunoscută în general sub denumirea PERT/COST.

Obiectivele analizei costurilor. Principalul obiectiv al analizei costurilor este reprezentat de necesitatea de a calcula costurile diferitelor durate ale proiectelor. *Durata normală* a unui proiect implică un cost dat, dar printr-un volum de muncă mai mare și prestarea unor ore suplimentare, precum și prin utilizarea unor echipamente suplimentare, este posibil ca durata executării proiectului să scadă, cu prețul creșterii costurilor. Unele modalități de reducere a duratei proiectului pot fi mai ieftine decât altele, iar analiza costurilor în rețea are ca obiectiv tocmai descoperirea modalităților celor mai ieftine de reducere a timpului de execuție a proiectului.

Penalități și bonusuri. O caracteristică comună a multor proiecte este clauza de întârziere a execuției și/sau specificare bonificațiilor pentru încheierea execuției înainte de termen. În întrebările de examene și de concursuri, analiza în rețea a costurilor este întotdeauna combinată cu situații de aplicare a unor penalități sau de acordare a unor bonificații, scopul fiind acela de a calcula dacă este economic să se plătească suplimentar pentru reducerea duratei proiectului sau pentru evitarea unei penalizări.

Costurile și rețelele – definiții elementare

a) *Costurile normale.* Reprezintă costurile asociate termenului normal estimat de execuție a unei activități. Adeseori estimarea duratei „normale" este realizată astfel

încât să permită utilizarea resurselor (umane, materiale etc.) în modul cel mai eficient.

b) *Costul de crah*. Reprezintă costurile asociate duratei minime posibile pentru execuția unei activități. Costurile de crah, datorită salariilor suplimentare, a plății orelor suplimentare, a dotărilor suplimentare, sunt întotdeauna mai mari decât costurile normale.

c) *Durata de crah*. Reprezintă durata minim posibilă pentru executarea unei activități. Această durată minimă este posibil de realizat numai prin consumul unor resurse suplimentare, ca de exemplu mai multe ore de muncă, mai mulți muncitori și utilizarea unor utilaje suplimentare.

d) *Panta costului*. Reprezintă costul mediu al scurtării unei activități cu o unitate de timp (oră, zi sau lună, după caz). Se presupune că, în general, panta costului este liniară și se calculează cu următoarea relație:

$$\text{Panta costului} = \frac{\text{Costul de crah} - \text{Costul normal}}{\text{Durata normală} - \text{Durata de crah}}.$$

De exemplu, datele activității A:

Normal		Crah	
Durata	Costul	Durata	Costul
12 zile	a 480£	8 zile	a 640£

$$\text{Panta costului} = \frac{640 - 480}{12 - 8} = 40\text{£/zi}$$

e) *Programarea costului minim sau de crah*. Reprezintă procesul prin care se stabilește metoda cea mai puțin costisitoare de reducere a duratei de ansamblu a proiectului, perioadă cu perioadă. Următorul exemplu va ilustra acest proces pas cu pas.

3. Regulile de programare a costului minim

Regula de bază a programării costului minim este foarte simplu formulată. Se reduce durata activității aparținând drumului critic și care are cea mai scăzută pantă a costului și se repetă acest proces până la obținerea reducerii de durată care se dorește. Complicațiile apar în momentul în care reducerea duratelor face ca mai multe drumuri să devină critice simultan, situație care impune ca mai multe activități să fie reduse în același timp. Aceste complicații sunt explicate în continuare pe măsură ce apar.

Exemplu de programare a costului minim

Un proiect (fig. 24.1) este alcătuit din cinci activități și se cere să se pregătească programe de costuri minime pentru toate duratele posibile, de la „durată normală ... cost normal" până la „durată de crah ... cost de crah".

Proiectul activității	Activitatea precedentă	Durata normală zile	Crah	Costurile normale £	Crah	Panta costului £
A	–	4	3	360	420	60
B	–	8	5	300	510	70
C	A	5	3	170	270	50
D	A	9	7	220	300	40
E	B, C	5	3	200	360	80

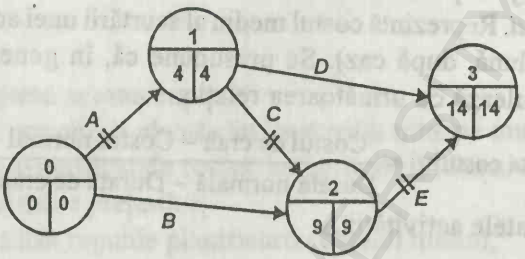


Fig. 24.1. Rețeaua proiectului.

Duratele proiectului și costurile:

a) Durata normală 14 zile.

Drumul critic A, C, E.

Costul proiectului (respectiv costul tuturor activităților pentru durata normală)= = 1250£ (respectiv 360£+300+170+220+200).

b) Se reduce cu o zi activitatea aparținând drumului critic și care are cea mai scăzută pantă a costului.

Se reduce activitatea C cu 50£.

Durata proiectului 13 zile.

Costul proiectului 1300£.

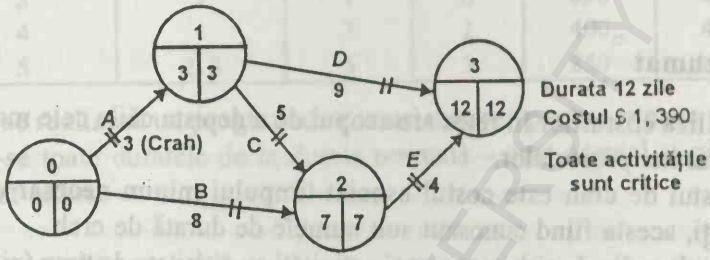
Notă. Toate activitățile sunt, în acest moment, critice.

c) Sunt posibile mai multe căi alternative de reducere a duratei proiectului cu încă o zi, dar există 2 sau 3 activități a căror durată trebuie redusă, deoarece există mai multe drumuri critice.

Posibilitățile disponibile

Se reduce cu o zi	Costuri suplimentare	Activitățile critice
A și B	60 + 70£ = 130£	Toate
D și E	40 + 80£ = 120£	Toate
B, C și D	70 + 50 + 40£ = 160£	Toate
A și E	60 + 80£ = 140£	A, D, B, E

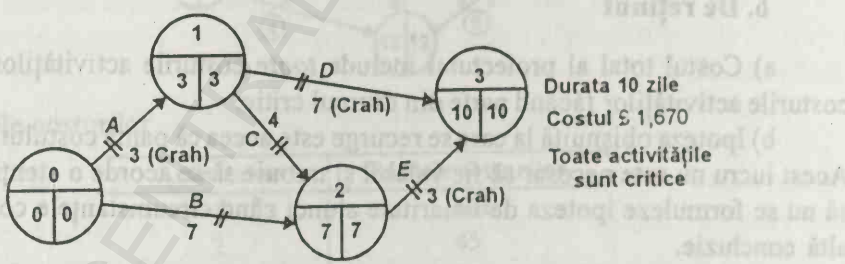
Indicatorul costurilor suplimentare sugerează că cea de-a doua alternativă (respectiv să se reducă *D* și *E*) este cea mai ieftină. Totuși, examinarea mai atentă a ultimei alternative (respectiv să se reducă *A* și *E*) relevă faptul că activitatea *C* este noncritică și are o flotație de o zi. Vă amintiți că activitatea *C* a fost redusă cu o zi mai înainte, la un cost suplimentar de 50£. Dacă concomitent cu reducerea duratei activităților *A* și *E* se extinde activitatea *C* cu o zi, se face economie de 50£ și toate activitățile devin critice. Prin urmare, durata proiectului pentru durata de 12 zile este de 1.300£+(140-50)=1390£. Rețeaua se prezintă în acest moment după cum urmează:



d) Următorul pas constă în reducerea lui D și E contra unei creșteri a costului de 120£, toate activitățile fiind din nou critice. Durata proiectului 11 zile.

Costul proiectului 1510£

e) Ultimul pas posibil constă în reducerea lui *B*, *C* și *D* la un cost suplimentar de 160£. În final rețeaua se va prezenta după cum urmează:



4. Reducerea rețelelor în cadrul examinărilor

Toate principiile necesare pentru a putea reduce o rețea au fost prezentate deja, dar următoarele indicații vă pot ajuta în cursul examenelor, economisindu-vă timpul.

a) Numai activitățile critice afectează durata proiectului – o mare atenție trebuie acordată pentru a nu reduce activități noncritice.

b) Durata minimă posibilă a unui proiect nu este în mod necesar cea mai profitabilă opțiune. Uneori poate să fie mai convenabil din punctul de vedere al costurilor să se plătească penalizări decât să se suporte costuri de crah mai ridicate.

c) Dacă există mai multe drumuri critice independente, atunci se va impune ca mai multe activități să fie reduse simultan. Dacă există mai multe drumuri critice care nu sunt independente, respectiv au în comun una sau mai multe activități, este posibil să fie mai eficient din punctul de vedere al costurilor să se reducă activitatea sau activitățile comune, chiar dacă acestea nu au cele mai reduse pante ale costurilor.

d) Căutați întotdeauna posibilitatea de mărire a duratei unei activități care anterior a fost redusă, în condițiile în care reducerea ar face-o noncritică, respectiv ar avea o flotare.

5. Rezumat

a) Analiza costurilor în rețea are scopul de a depista căile cele mai ieftine de reducere a duratei proiectelor.

b) Costul de crah este costul asociat timpului minim necesar desfășurării unei activități, acesta fiind cunoscut sub numele de durată de crah.

c) Costul mediu de reducere a unei activități cu o unitate de timp (zi, săptămână etc.) este cunoscut sub numele de pantă a costului.

d) Programarea costurilor minime reprezintă metoda de stabilire a celui mai ieftin mod de reducere a duratei de ansamblu a proiectului prin reducerea duratei activității care aparține drumului critic și are panta costului cea mai redusă.

6. De reținut

a) Costul total al proiectului include *toate* costurile activităților, nu numai costurile activităților făcând parte din drumul critic.

b) Ipoteza obișnuită la care se recurge este aceea că panta costului este liniară. Acest lucru nu este necesar să fie valabil și trebuie să se acorde o atenție deosebită să nu se formuleze ipoteza de liniaritate atunci când circumstanțele conduc spre o altă concluzie.

c) Exemplul folosit în acest capitol a inclus mărirea duratei unei activități subcritice, care fusese deja redusă, astfel încât a apărut o anumită reducere a costurilor suplimentare. Rețineți acest artificiu și căutați-l întotdeauna.

d) Activitățile fictive au pante nule și nu pot fi reduse.

Întrebări de autoevaluare. *Numerele dintre paranteze se referă la numerotarea paragrafelor.*

1. Care este obiectivul analizei costurilor în rețea? (2)
2. Ce se înțelege prin costuri „normale" și costuri „de crah"? (2)
3. Care sunt regulile de bază ale programării costurilor? (3)

Exerciții cu răspunsuri

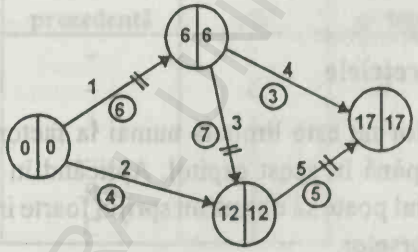
1. Să se calculeze pantele costurilor și drumul critic pentru următoarea rețea.

Activitatea	Activitatea precedentă	Timpul		Costul	
		Normal	Crah	Normal £	Crah £
1	–	6	4	500	60
2	–	4	2	300	390
3	1	7	6	650	680
4	1	3	2	400	450
5	2, 3	5	3	850	1000

2. Să se realizeze un program de costuri minime pentru rețeaua de la punctul 1, arătându-se toate duratele de la durata normală – cost normal și până la durata redusă – cost redus.

Răspunsuri la exerciții

1. Panta critică



Pantele costurilor

Activitatea	Pantele costurilor
1	60£
2	45
3	30
4	50
5	75

2. Costul normal total 3700£ pentru o durată de 17 zile.

	Costul £
Pentru o durată de 16 zile (activitatea 3)	2730
Pentru o durată de 15 zile (activitatea 1)	2790
Pentru o durată de 14 zile (activitatea 1)	2850
Pentru o durată de 13 zile (activitatea 5)	2925
Pentru o durată de 12 zile (activitatea 5)	3000

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

25. ANALIZA ÎN REȚEA – PROGRAMAREA RESURSELOR

1. Obiective

După parcurgerea acestui capitol:
- veți înțelege principiile programării resurselor;
- veți ști cum se realizează o diagramă Gantt;
- veți putea realiza un profil de centralizare a resurselor;
- veți ști cum se utilizează nivelarea resurselor;
- veți putea realiza un profil de alocare a resurselor.

2. Resursele și rețelele

Utilitatea rețelelor nu este limitată numai la factorii de durată și de costuri care au fost discutați până în acest capitol. Aplicând în mod adecvat tehnicile în rețea, nivelul managerial poate să obțină un sprijin foarte important în planificarea și controlul utilizării resurselor.

Resursele proiectului. Resursele (oameni cu diferite calificări, mașini de toate tipurile, materialele necesare, suportul financiar, spațiul) utilizate în cadrul unui proiect sunt supuse la diferite cerințe și presiuni pe măsură ce proiectul avansează. Manageriatul trebuie să știe care activități și resurse sunt critice pentru durata proiectului și dacă limitările resurselor (respectiv epuizarea materialelor, limitarea numărului de muncitori specialiști) pot întârzia realizarea proiectului. Se dorește, bineînțeles, să se asigure o rată constantă a activității, pentru a nu apărea necesitatea plății unor ore suplimentare în anumite momente sau a reducerii programului de muncă în alte perioade.

3. Cerințele programării resurselor

Pentru a putea programa cererea de materiale pentru un proiect, este necesară cunoașterea următoarelor detalii.

a) Duratele curente ale activităților, descrierea și succesiunea lor, așa cum am mai relatat.

b) Cerințele de materiale pentru fiecare activitate, în care să apară clasificarea resurselor și cantitățile necesare.

c) Resursele din fiecare clasă care sunt disponibile pentru realizarea proiectului. Dacă este posibilă apariția unor variații în disponibilizarea acestor resurse pe durata desfășurării proiectului, acestea trebuie de asemenea specificate.

d) Orice restricții cerute de manageriat care trebuie avute în vedere, cum ar fi activitățile care pot sau nu să fie defalcate și orice limitări în privința mobilității forței de muncă.

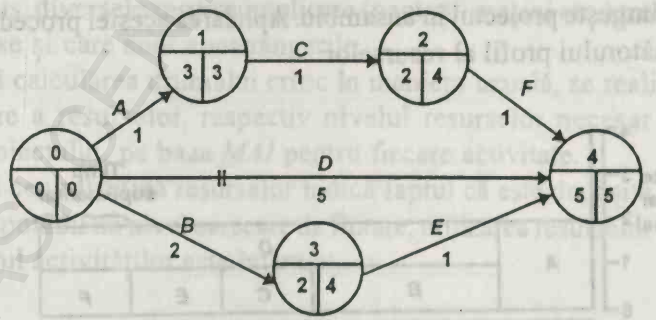
4. Exemplu de programare a resurselor prin utilizarea unei diagrame Gantt

Un proiect simplu are următoarele date de durată și de resurse (pentru simplitate, nu este luată în considerare decât o singură resursă de muncă iar principii similare se pot aplica și altor tipuri de resurse inter-schimbabile)

Datele proiectului

Activitatea	Activitatea precedentă	Durata zile	Necesarul de mână de lucru, muncitori
A	–	1	2
B	–	2	1
C	A	1	1
D	–	5	1
E	B	1	1
F	C	1	1

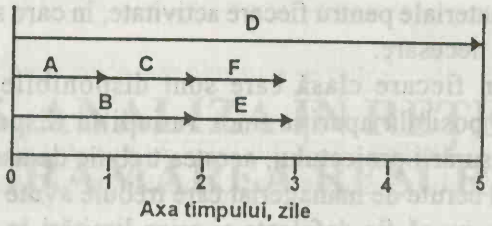
Constrângeri de resursă umană: numai 2 muncitori disponibili.



Drumul critic – Activitatea D – durata 5 zile
(fără a fi luate în considerare de constrângerea privitoare la resurse)

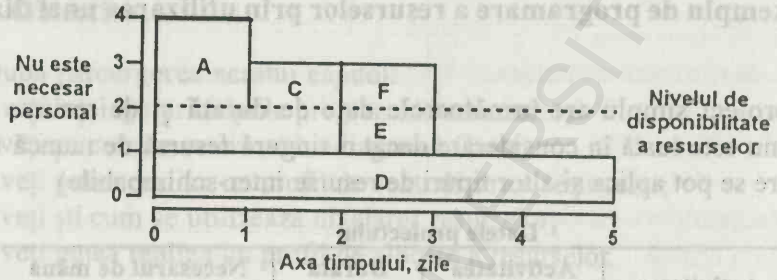
Pașii programării resurselor:

a) Se reprezintă activitatea pe o diagramă Gantt sau diagramă de bare, pe baza MAI:



Reprezentarea duratelor rețelei

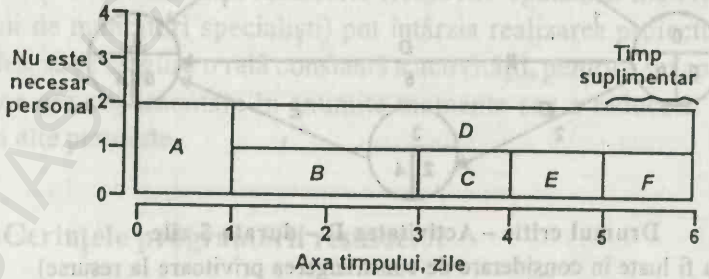
b) Pe baza diagramei duratelor se realizează un profil de centralizare a resurselor, respectiv necesarul total de resurse pentru fiecare perioadă de timp:



Profilul de centralizare a resurselor pe baza MAI

c) Examinarea acestui profil arată că există momente în care sunt necesare resurse superioare disponibilităților dacă activitățile încep la MAI.

Momentele apropiate de începere și momentele târzii de începere ale activităților rețelei arată că este posibilă o flotare pentru activitățile A, C, F, B și E. Din punctul de vedere al flotărilor este necesar să se „netezească" cererile de resurse, astfel încât nivelul acestora să nu depășească constrângerea respectivă, respectiv să se întârzie începerea activităților (în limitele permise de flotare), iar dacă nu este suficient, se prelungește proiectul în ansamblu. Aplicarea acestei proceduri conduce la obținerea următorului profil al resurselor:

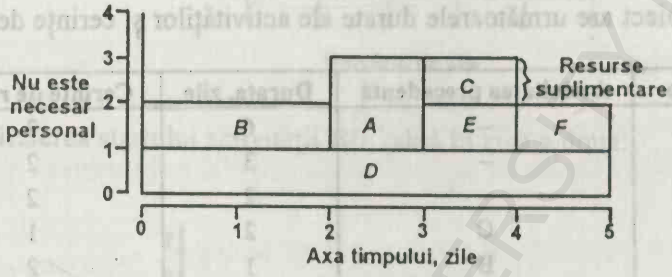


Alocarea resurselor – pentru limitarea la doi oameni

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Notă: Această procedură este denumită uneori *nivelarea resurselor.*

d) Datorită constrângerii resurselor – respectiv limitarea la un disponibil de numai 2 oameni – durata proiectului a !fost extinsă cu o zi. Să presupunem că manageriatul a decis că durata inițială proiectului (5 zile) nu poate fi extinsă și se cere îndeplinirea acestui obiectiv cu resurse suplimentare minime. În asemenea situații se aplică o procedură asemănătoare de modificare a momentelor de început ale activităților în limitele lor de flotare, rezultând următorul profil al resurselor:



Profil de alocare a resurselor – pentru limitarea la durata de 5 zile a proiectului

e) Profilul arată că pentru a se asigura o durată maximă de 5 zile pentru realizarea proiectului este necesar să fie alocați 3 oameni din ziua a 2-a până în ziua a 4-a.

5. Rezumat

a) Pentru a facilita realizarea programării resurselor, este necesară precizarea resurselor specifice pentru fiecare activitate.

b) În plus, diversele resurse implicate (oameni, mașini etc.) trebuie clasificate, specificându-se și care sunt constrângerile.

c) După calcularea drumului critic în maniera uzuală, se realizează un profil de centralizare a resurselor, respectiv nivelul resurselor necesar pentru fiecare perioadă a proiectului, pe baza *MAI* pentru fiecare activitate.

d) Dacă centralizarea resurselor indică faptul că este depășită o constrângere și dacă este disponibil un nivel oarecare de flotare, utilizarea resurselor este «netezită», respectiv startul activităților este întârziat.

6. De reținut

Netezirea profilurilor resurselor este în cea mai mare măsură o chestiune de experiență, dar dacă durata proiectului este fixată, concentrați-vă atenția asupra activităților caracterizate prin flotare liberă (descrise în capitolul 23).

Întrebări de autoevaluare. Numerele dintre paranteze se referă la numerotarea paragrafelor.

1. Care sunt datele necesare pentru a se putea realiza programarea resurselor într-o rețea? (3)
2. Ce reprezintă profilul de centralizare a resurselor? (4b)
3. Ce reprezintă nivelarea resurselor? (4c)

Exerciții cu răspunsuri

1. Un proiect are următoarele durate ale activităților și cerințe de resurse:

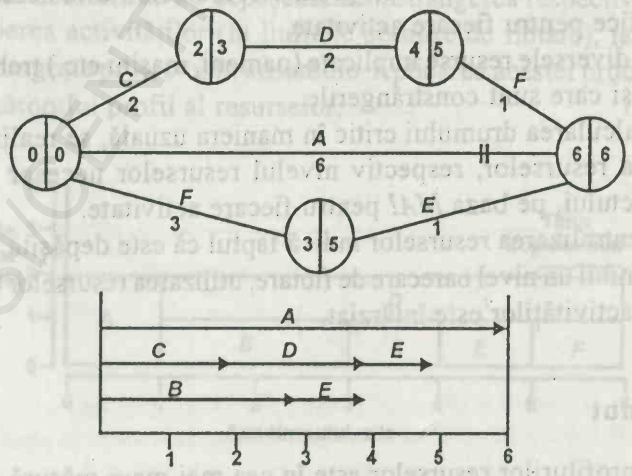
Activitatea	Activitatea precedentă	Durata, zile	Cerințe de resurse
A	–	6	3
B	–	3	2
C	–	2	2
D	C	2	1
E	B	1	2
F	D	1	1

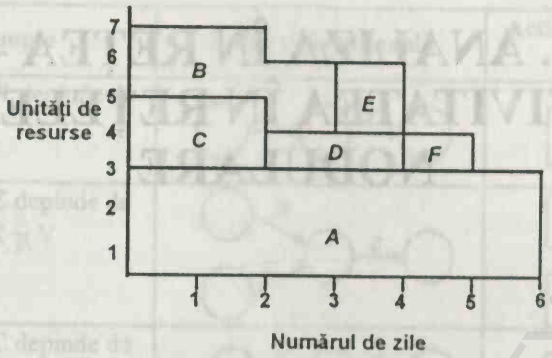
Presupunând că nu există nici un fel de restricții, să se reprezinte rețeaua, drumul critic și cerințele zilnice de resurse, presupunându-se că fiecare activitate începe în MAI.

2. Presupunând că există numai 6 unități de resurse care ar fi planul?

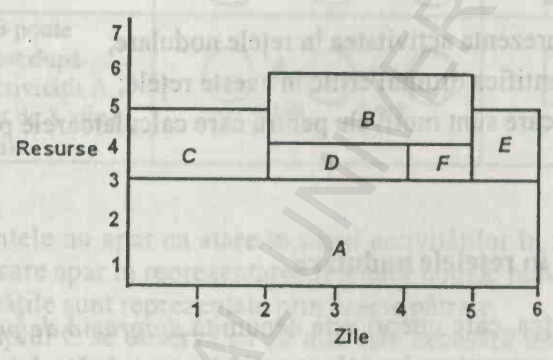
Răspunsurile la exerciții

1.





2. Întârzierea startului activității B/E până în ziua a doua:



BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

26. ANALIZA ÎN REȚEA – ACTIVITATEA ÎN REȚELELE NODULARE

1. Obiective

După parcurgerea acestui capitol:

• veți înțelege caracteristicile activității în rețele nodulare (sau în diagramele de precedență);

• veți putea reprezenta activitatea în rețele nodulare;

• veți putea identifica drumul critic în aceste rețele;

• veți înțelege care sunt motivele pentru care calculatoarele pot asista analiza în rețea.

2. Activitatea în rețelele nodulare

Acest tip de rețea, care uneori este denumită *diagramă de precedență* este o formă alternativă de prezentare bazată pe estimări asemănătoare celor prezentate anterior.

Caracteristicile activității în rețelele nodulare.

a) Activitățile sunt reprezentate prin casete, nu prin săgeți.

b) Nu există evenimente.

c) Casetele sunt reprezentate prin drepte, care au rolul de a ilustra succesiunea lor sau precedența.

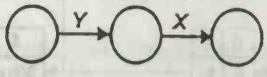
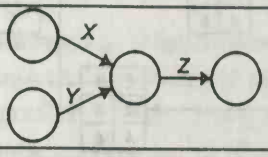
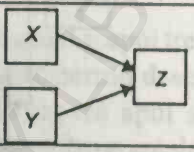
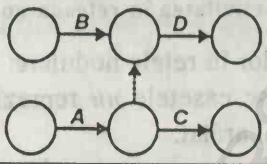
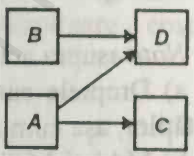
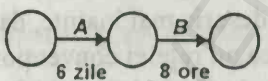
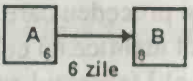
d) Pentru *început* și pentru *încheiere* există casete distincte.

e) Nu sunt necesare activitățile fictive.

3. Comparația cu rețelele convenționale

Din punctul de vedere al ilustrării, este mai ușor de reprezentat activitatea nodală comparativ cu reprezentarea rețelelor convenționale:

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

	Exemple	Rețea convențională	Activitatea în rețeaua nodulară
A	Activitatea X depinde de activitatea Y		
B	Activitatea Z depinde de activitățile X și Y		
C	Activitatea C depinde de activitatea A. Activitatea D depinde de activitățile A și B		
D	Activitatea B poate începe imediat după încheierea activității A. Duratele sunt de 8 zile și, respectiv 6 zile.		

Note:

a) Evenimentele nu apar ca atare în cazul activităților în rețele nodulare.

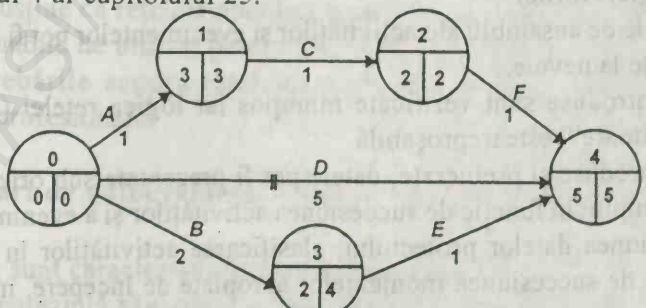
b) Dreptele care apar în reprezentarea rețelelor nodale indică precedența și nu activitățile. Activitățile sunt reprezentate prin casete pătrate.

c) Din exemplul C se observă că nu mai este necesară inserarea activităților fictive în cazul rețelelor nodulare.

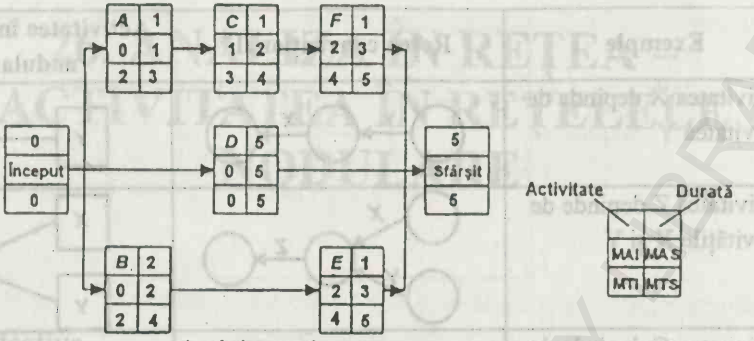
d) Durata (6 zile) care apare în rețeaua nodulară din exemplul D este cunoscută sub denumirea de *timp de dependență*.

4. Exemplu de activitate nodulară

Pe baza convențiilor descrise mai înainte, voi prezenta în continuare o rețea nodulară. Sunt reprezentate aceleași activități, durate și succesiuni ca în exemplul de la paragraful 4 al capitolului 25.



Rețeaua convențională (de la capitolul 25)



Activitatea în rețeaua nodulară

Note asupra activităților în rețele nodulare:

a) Dreptele care unesc casetele *nu* reprezintă activități, ci succesiuni ale activităților, așa cum am mai arătat.

b) MAI și MTI care sunt reprezentate în casete sunt calculate folosindu-se același procedeu care a fost descris mai înainte, dar trebuie să remarcați că valorile nu sunt identice cu cele din cazul rețelei convenționale.

c) Momentul apropiat al sfârșitului – MAS – și respectiv momentul târziu al sfârșitului – MTS – sunt calculate adunând durata activității la MAI și respectiv la MTI.

d) Drumul critic se găsește prin metoda obișnuită de comparare a valorilor MAI și MTI (sau a valorilor MAS și MTS).

5. Rețelele și computerele

Până acum am făcut referire numai la tratarea manuală, ca să zic așa, a rețelelor, dar în practică cea mai mare parte a analizei în rețea este realizată de către computere. Multe mărci de computere au softuri special concepute pentru această tehnică și există o serie de avantaje importante în utilizarea acestor facilități de calcul.

a) În virtutea vitezei lor, computerele pot realiza analiza unor rețele foarte mari cu ușurință. Dincolo de un anumit număr de activități (să spunem 50-100) rețelele devin cu mult prea complexe pentru a putea fi prelucrate manual și este foarte mare posibilitatea apariției erorilor.

b) Descrierile de ansamblu ale activităților și evenimentelor pot fi manipulate mai ușor și printate la nevoie.

c) Datele introduse sunt verificate minuțios iar logica rețelei (ciclurile și activitățile „atârnătoare") este ireproșabilă.

d) Odată introduse și prelucrate, datele pot fi prezentate sub orice formă se dorește, ca de exemplu: în funcție de succesiunea activităților și a evenimentelor, în funcție de succesiunea datelor proiectului, clasificarea activităților în funcție de flotație, în funcție de succesiunea momentelor apropiate de începere, momentelor târzii de începere, momentelor apropiate de sfârșit și momentelor târzii de sfârșit.

e) Atunci când apar modificări în datele referitoare la duratele activităților, resurse, datele programate, programul poate fi rulat rapid, dând noile rezultate, actualizate.

f) Realizează analize de durată mai complete și alocări de resurse mai precise și mai rapide.

g) A existat o perioadă în care rețelele trebuiau desenate manual și apoi trebuiau introduse datele în computer. Programele care există actualmente permit desenarea rețelei folosindu-se mijloacele grafice proprii. Programul realizează apoi singur diagrama rețelei, calculează durata proiectului și drumul critic. Programele cele mai sofisticate sunt capabile chiar să rezolve problemele de programare a costurilor și a resurselor.

6. Rezumat

a) Activitatea în rețelele nodulare reprezintă o metodă alternativă de prezentare a rețelelor convenționale.

b) Rețelele nodulare nu folosesc reprezentarea evenimentelor, ci a legăturilor (precedențelor) dintre activități.

c) Pașii înainte și în urmă sunt efectuați ca de obicei. Pasul înainte dă aceeași valoare pentru momentul apropiat de început ca și în cazul rețelelor convenționale, dar pasul înapoi dă mai curând valoarea momentului târziu al începutului pentru nod decât pentru activitatea respectivă, așa cum este cazul în rețelele convenționale.

d) Drumul critic este stabilit în maniera normală, prin comparația momentelor apropiat și târziu de început sau al momentelor apropiat și târziu de sfârșit.

e) Computerele sunt larg utilizate pentru rezolvarea problemelor practice datorită vitezei lor superioare, a abilității de a realiza calcule și mai ales datorită programelor specializate.

7. De reținut

a) Se susține că rețelele nodulare sunt mai ușor de reprezentat și de aceea ar fi mai convenabile de utilizat pentru mai mulți utilizatori.

b) Întrebările asupra rețelelor nodulare apar în mod regulat în testele examenelor profesionale.

Întrebări de autoevaluare. *Numerele dintre paranteze se referă la numerotarea paragrafelor.*

1. Care sunt caracteristicile rețelelor nodulare? (2)
2. Ce reprezintă săgețile din cadrul rețelelor nodulare? (3)
3. Cum se stabilește drumul critic în cazul rețelelor nodulare? (4)

4. De ce sunt utilizate în mod invariabil calculatoarele pentru rezolvarea problemelor practice de analiză în rețea? (5)

Exerciții cu răspunsuri

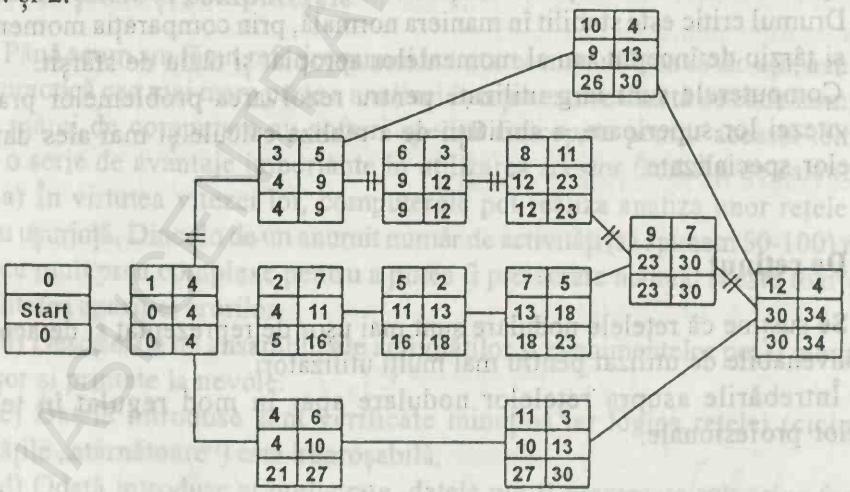
1. Să se reprezinte următorul proiect într-o diagramă nodulară.

Activitatea	Activitatea precedentă	Durata, zile
1	–	4
2	1	7
3	1	5
4	1	6
5	2	2
6	3	3
7	5	5
8	2, 6	11
9	7, 8	7
10	3	4
11	4	3
12	9, 10, 11	4

2. Să se calculeze valorile MAI/MTI și MFT pentru fiecare casetă.

Răspunsuri la exerciții

1. și 2.



Notă. Comparați această rețea cu problema numărul 1 de la capitolul 23.

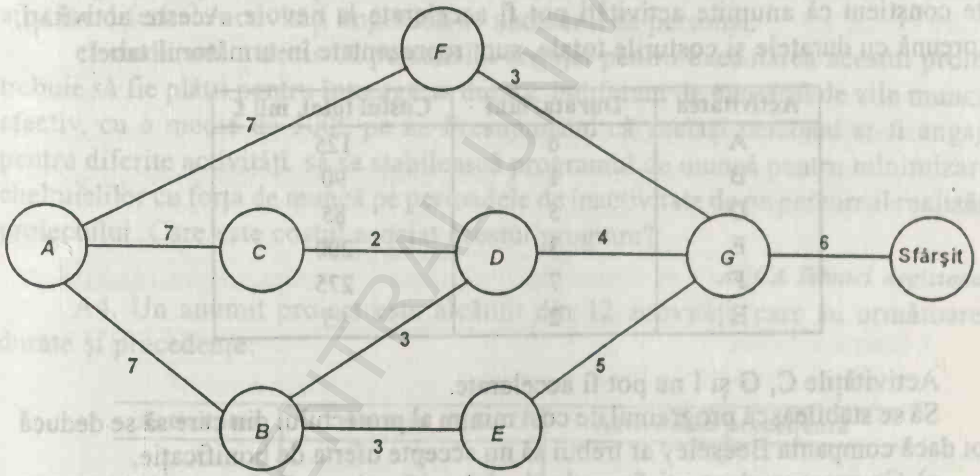
EVALUARE ŞI RECAPITULARE

PARTEA 5

Exerciţii recapitulative cu răspunsuri

Răspunsurile încep pe pagina 575

A1. Reţeaua unei construcţii de dimensiuni reduse este reprodusă mai jos, împreună cu datele referitoare la durate, exprimate în zile, necesare pentru îndeplinirea fiecărei sarcini.



Vi se cere să:

a) enumeraţi toate drumurile posibile în cadrul acestei reţele, împreună cu durata, în zile, pentru fiecare;

b) stabiliţi drumul critic şi să precizaţi durata totală a proiectului;

c) calculaţi flotarea totală pentru fiecare activitate;

d) dacă acţiunea *D* durează 8 zile în loc de 4, să stabilească dacă şi cu cât timp va fi întârziată finalizarea proiectului.

CIMA Metode cantitative

A2. Compania de construcţii Beeseley a câştigat un contract pentru construcţia unui bloc de birouri. Proiectul a fost defalcat într-un număr de activităţi.

Cheltuielile de regie sunt estimate la 5000 £ pe lună:

BUCHAREST UNIVERSITY LIBRARY

Activitatea	Activitatea precedentă	Durata, în luni	Costul total mii £
A	–	8	100
B	–	2	75
C	A	3	135
D	A	7	70
E	B	5	160
F	C, D	9	255
G	D	2	30
H	D, E	4	90
I	G, H	3	55

Vi se cere să:

a) Realizați rețeaua acestui proiect din care să stabiliți durata minimă a proiectului și costurile asociate.

b) Companiei Beeseley i s-a mai oferit și un bonus de 25 000£ dacă reușește să încheie lucrările acestui proiect în 20 de luni sau mai puțin. Managerul de proiect este conștient că anumite activități pot fi accelerate la nevoie. Aceste activități, împreună cu duratele și costurile totale, sunt reprezentate în următorul tabel:

Activitatea	Durata, luni	Costul total, mii £
A	6	125
B	1	90
D	5	85
E	3	200
F	7	275
H	2	95

Activitățile C, G și I nu pot fi accelerate.

Să se stabilească programul de cost minim al proiectului din care să se deducă apoi dacă compania Beeseley ar trebui să nu accepte oferta de bonificație.

c) Ce recomandare ați formula dacă bonificația ar fi de numai 15 000£? Argumentați.

ACCA Tehnici de luare a deciziilor

A3. Preface En-Detail este o firmă de comerț en-detail cu echipament de înaltă tehnologie, având și un serviciu de comandă prin poștă. Pentru îmbunătățirea activităților din cadrul companiei, se decide instalarea unui nou sistem microcomputerizat pentru conducerea întregii activități (respectiv statele de plată, contabilitatea, inventarul). Terminalele de la fiecare dintre numeroasele sale magazine urmează să fie incluse în rețele pentru a se asigura o informare mai rapidă și mai sigură. Activitățile specifice pe care Preface va trebui să le îndeplinească până la realizarea și punerea în funcțiune a sistemului sunt prezentate în următorul tabel, care include, de asemenea, și necesarul de mărire a personalului pentru a putea face față proiectului:

Activitatea	Activitatea precedentă	Durata zile	Creșterea nr. personalului
A. Construirea pereților izolanți	–	4	1
B. Alegerea sistemului computerizat	–	1	3
C. Realizarea instalației electrice	A	3	2
D. Achiziționarea computerului	B	2	1
E. Instalarea aerului condiționat	A	4	2
F. Instalarea computerului	D, E	2	2
G. Testarea personalului	B	5	1
H. Instalarea software-ului	C, F	2	1
I. Pregătirea personalului	G, H	3	1

Vi se cere:

a) să realizați diagrama proiectului și să determinați drumul critic și durata sa.

b) presupunând că toate activitățile încep la momentul cel mai apropiat, să se realizeze rețeaua proiectului, în care să fie reprezentate momentele în care trebuie să aibă loc diferitele activități împreună cu necesarul de personal.

c) sindicatul a decis că personalul angajat pentru executarea acestui proiect trebuie să fie plătit pentru întreaga sa durată, indiferent de numărul de zile muncite efectiv, cu o medie de 500£ pe zi. Presupunând că același personal ar fi angajat pentru diferite activități, să se stabilească programul de muncă pentru minimizarea cheltuielilor cu forța de muncă pe perioadele de inactivitate de pe parcursul realizării proiectului. Care este costul asociat acestui program?

ACCA Tehnici decizionale

A4. Un anumit proiect este alcătuit din 12 activități, care au următoarele durate și precedențe:

Activitatea	Durata, zile	Activitatea precedentă
A	3	–
B	5	A
C	7	L
D	2	L
E	9	–
F	6	B, C
G	5	E
H	6	B, C
I	3	A
J	4	I
K	4	D, F
L	4	–

Vi se cere să:

a) a_1) reprezentați acest proiect prin mijloacele diagramei de rețea.

a_2) arătați care sunt momentele apropiat și târziu de început pentru fiecare activitate.

a_3) determinați drumul critic și durata minimă a executării proiectului.

b) calculați flotările totale pentru fiecare activitate și să explicați în ce fel pot fi acestea utile pentru alocările resurselor.

c) datorită unei greve, personalul implicat în realizarea a cinci activități: G, H, I, J, K nu poate să fie utilizat. În schimb personalul utilizat pentru activitățile A și B poate fi utilizat și la aceste cinci activități, fără a afecta durata activităților, astfel încât de exemplu, activitățile A, G și I nu se pot suprapune în timp.

Activitatea	G	H	I	J	K
	A	B	A	B	B

Să se realizeze o programare a acestor cinci activități subliniindu-se, în cazul în care există, efectele asupra duratei proiectului.

ACCA Tehnici decizionale

Exerciții de verificare fără răspunsuri

B1. Pentru fiecare automobil oprit la o stație de benzină urmează să fie îndeplinite următoarele activități:

Operațiuni (nu obligatoriu în ordinea îndeplinirii)	Operațiunea precedentă
A Sosirea și oprirea	
B Șoferul alege mărcile de ulei și combustibil	A
C Se face plinul rezervorului de combustibil	B
D Se face nota de plată	C și L
E Se primește plata și se eliberează tichetele	D
F Se spală geamurile	A
G Se lustruiesc geamurile	F
H Se verifică presiunea din pneuri	A
J Se umflă pneurile	H
K Se ridică capota	A
L Se verifică uleiul	K
M Se completează nivelul uleiului	B și L
N Se adaugă apă distilată în baterie	K
P Se completează lichidul din radiator	K
Q Se închide capota	M, N și P
R Șoferul părăsește stația	E, G, J și Q

Radiatorul, joja de ulei și bateria sunt localizate toate sub capotă.

Să se conceapă o rețea pentru succesiunea de activități de mai înainte.

B2. O companie intenționează să lanseze pe piață un nou produs. Următorul tabel conține lista activităților necesare pentru planificarea și controlul eficient al acestui proiect de marketing.

	Activitatea	Activitatea precedentă	Durata estimată zile
A	Discuțiile inițiale	–	6
B	Alegerea designului produsului	A	22
C	Analiza de piață	A	17
D	Evaluarea pieței	C	3
E	Stabilirea costului produsului	B	9
F	Planul de vânzări	C	12
G	Stabilirea prețului produsului	D, E	4
H	Realizarea prototipului	F, G	22
I	Pregătirea pentru culegerea informațiilor de pe piață	B	15
J	Testarea prototipului	H, I	17

a) Să se conceapă o rețea pe care să fie reprezentate diferitele activități ale acestui proiect de marketing.

b) Să se determine drumul critic și durata minimă a proiectului.

c) Se poate presupune că durata preconizată a unora dintre activități are o distribuție normală, deși restul activităților sunt cunoscute cu certitudine. Deviațiile standard ale acestor activități „nesigure" sunt:

Activitatea	B	E	H	I	J
Deviația standard, zile	3	1	2,5	2,5	2

Să se determine pentru un interval de certitudine de 90% durata activităților de pe drumul critic. Precizați orice ipoteză de lucru pe care o luați în calcul.

d) Dacă proiectul are o durată mai mare de 84 de zile, compania va înregistra pierderea unui potențial venit. Stabiliți probabilitatea, cu două zecimale, a producerii acestei pierderi.

B3. Colegii dvs din conducere au aflat recent despre tehnicile de analiză a drumului critic și despre tehnica de evaluare și control a programelor (TECP).

Este avut în vedere un proiect care a fost defalcat într-un număr de activități notate de la A la H. S-au realizat estimări referitoare la duratele și la costurile fiecăreia dintre aceste activități în condiții normale și în condiții de accelerare a realizării proiectului.

Costurile logistice sunt estimate la circa 300 £ zilnic.

Activitatea	Activitatea precedentă	Costul normal £	Costul programului £	Termenul	Costul programului £
A	–	3	160	1	240
B	–	4	230	2	270
C	A, B	4	280	2	300
D	B	5	240	2	290
E	C, D	8	440	4	600
F	E	6	320	4	450
G	A	18	700	10	1500
H	G, F	6	320	5	400

Activitatea G, a cărei durată normală este de 18 zile, la un cost de 700£, poate să fie redusă cu câte o zi, pentru un cost suplimentar de 100£ pe zi, astfel încât o reducere a duratei sale de realizare la 10 zile costă 1500£. Celelalte activități pot fi realizate fie în termene și la costuri normale, fie în termene și la costuri accelerate.

Vi se cere să:

a) identificați diferitele drumuri în cadrul rețelei;

b) calculați durata normală de realizare și costul normal;

c) calculați timpul minim de realizare a proiectului și costul minim al realizării sale în acest termen;

d) explicați scopurile, avantajele și dezavantajele analizei drumului critic și ale tehnicii de evaluare și control a programelor (TECP).

CIMA Tehnici cantitative

B4. Se analizează activitățile necesare pentru onorarea comenzii unui client.

Activitatea	Activitățile precedente	Durata medie zile	Costul variabil normal pe zi £
1. Primirea comenzii, verificarea cărții de credit etc.	–	2	5
2. Pregătirea specificațiilor referitoare la materiale,	1	4	10
disponibilități etc.	2	1	7
3. Inspecția, ambalarea etc.	1	5	5
4. Rezolvarea facilităților de transport etc.	3, 4	3	2
5. Livrarea			

Duratele activităților 1, 3 și 5 sunt fixe; pentru activitatea 2 există o probabilitate de 0,5 că va necesita 2 zile și o probabilitate de 0,5 că va necesita 6 zile;

pentru activitatea 4 există o probabilitate de 0,7 că va necesita 4 zile, o probabilitate de 0,2 că va necesita 6 zile și o probabilitate de 0,1 că va necesita 10 zile.

Vi se cere să:

a) reprezentați rețeaua în două moduri, prima dată sub forma unei diagrame cu săgeți și a doua oară sub forma unei rețele nodulare, indicând semnificația simbolurilor pe care le folosiți;

b) indicați drumul critic, calculați durata medie și costul variabil în condiții normale;

c) Calculați duratele maximă și minimă și probabilitățile asociate.

CIMA Tehnici cantitative

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

PARTEA 6

27. MATEMATICI FINANCIARE

1. Obiective

După parcurgerea acestui obiectiv:
- veți fi la curent cu aspectele de bază ale matematicilor financiare;
- veți ști să folosiți progresiile aritmetice;
- veți ști care sunt principiile dobânzii simple și compuse;
- veți ști ce se înțelege prin anuitate și cum se folosesc tabelele de anuități;
- veți putea defini perpetuitatea;
- veți ști cum se prelucrează creșterea sau scăderea fluxului monetar.

2. Seriile

Fundamental pentru orice calcul financiar este procesul de alocare, plată sau primire a banilor la intervale regulate de timp. Exemplele tipice cuprind: calcule de depreciere, fonduri de investiții, plata creditelor, analiza fluxului monetar.

3. Progresiile aritmetice

Șirurile de cantități pentru care fiecare nouă valoare se obține adunând o cantitate constantă la valoarea anterioară. Cantitatea constantă este denumită uneori *diferență comună.*

Progresia aritmetică are forma generală:

$$a,\ a + d,\ a + 2d\ \ldots\ldots,\ a + (x - 1)d,$$

unde: a este prima valoare;

d – diferența comună;

x – numărul de termeni ai seriei.

Exemplul 1

O firmă închiriază un spațiu și în contractul de închiriere este prevăzută o mărire anuală a chiriei cu 2650£. Dacă în primul an chiria a fost de 8500£, care va fi chiria pentru anul al zecelea?

Chiria pentru anul al 10-lea $= a + (x - 1)d$
$= 8.500 + (10 - 1)2650$
$= 32\ 350£.$

Exemplul 2

O firmă achiziționează o presă de forță pentru suma de 32 500£, având o garanție de funcționare de 20 de ani și o valoare de casare de 7500£. Considerându-se că deprecierea este liniară, să se stabilească cât din prețul de cumpărare se pierde anual?

Într-o asemenea problemă, numărul de termeni din serie este cu o unitate mai mare decât numărul anilor, deoarece costul reprezintă valoarea la începutul primului an de exploatare și valoare de casare reprezintă valoarea utilajului în ultimul an de exploatare.

$a = 32\ 500 \qquad x = 21$
$7500 = a + (x - 1)d$
$7500 = 32\ 500 + 20d$
$d = -1250.$

Deprecierea liniară este de 1250£ pe an.

4. Suma progresiei aritmetice

Un mod de stabilire a sumei unei progresii aritmetice constă în adunarea fiecăruia dintre termenii succesivi care fac parte din șirul progresiei aritmetice. Această operație se poate dovedi foarte lungă dacă sunt implicați foarte mulți termeni, astfel încât poate fi utilizată următoarea formulă.

$$S = n[a + \tfrac{1}{2}(x - 1)d],$$

unde S este suma progresiei.

Exemplul 3

La ce sumă totală s-a ridicat chiria plătită de firma din exemplul 1 pe parcursul a zece ani?

$a = 8500 \qquad x = 10 \qquad d = 2650$
$S = 10[8500 + \tfrac{1}{2}(10 - 1)2650]$
$= 204\ 250£.$

Exemplul 4

Un salariat, care a beneficiat de măriri anuale fixe de salariu ajunge să aibă, după zece ani, un salariu de 9.000£. Dacă suma totală a salariilor sale s-a ridicat la 65.000£ în decursul celor zece ani, să se stabilească care a fost salariul său inițial.

$65\ 000 = 10[a + \tfrac{1}{2}(10 - 1)d]$
$6500 = a + 4{,}5d$ ..... (27.1)

și din paragraful 3 știm că

$$9000 = a + (10 - 1)d$$
$$9000 = a + 9d \text{ ..... } (27.2)$$

(i) și (ii) constituie un sistem de ecuații și din relațiile (27.2) – (27.1) obținem următoarele rezultate:

$$2500 = 4{,}5\ d$$
$$\therefore d = 555{,}55£.$$

Făcând substituirea se obține $a = 4000£$.

Salariul inițial este 4000£ și
creșterea anuală este 555,55£.

5. Progresiile geometrice

Șirurile de cantități pentru care fiecare valoare se obține prin înmulțirea valorii precedente cu o constantă care se numește *rația comună* reprezintă o progresie geometrică.

Progresia geometrică are următoarea formulă generală:

$$a, ar, ar^2, ar^3, \text{ .....}, ar^{x-1}$$

unde: a este valoarea inițială;

r – rația comună;

x – numărul de termeni ai seriei.

Exemplul 5

Pentru aceleași date de la exemplul 2, care ar fi rata de depreciere exprimată sub formă de procentaj dacă deprecierea ar fi calculată prin metoda de reducere a balanței?

$$a = 32\,500 \quad x = 21 \quad = 7500$$
$$7500 = ar^{x-1}$$
$$7500 = 32\,500r^{20}$$

$r^{20} = \dfrac{7500}{32\,500}$, care poate fi rezolvată folosind un tabel de logaritmi sau funcția științifică a unui calculator electronic

$$\log r = \frac{\log 7500 - \log 32\,500}{20}$$

$$\log r = 1{,}968159$$
$$\therefore r = 0{,}92927$$

scăzând rata de depreciere $\therefore = 1 - 0{,}92927$ sau $= 7\%$.

Exemplul 6

O clădire are prețul de cost de 500 000£ și s-a stabilit că această valoare va fi depreciată cu 10% pe an pe baza metodei de reducere a bilanțului. Care va fi valoarea ei scriptică după 25 de ani?

BCU IASI CENTRALA UNIVERSITARA LIBRARY

$$a = 500\,000 \qquad x = 26 \qquad r = (1-d)$$

unde d este rata de depreciere

Valoarea pentru 25 de ani $= ar^{x-1}$

$= 500\,000(1-0{,}1)^{26-1}$.

$\therefore$ log valoarea pentru 25 de ani $=$ log 500.000 + 25 log $(1-d)$

$\therefore$ log valoarea pentru 25 de ani $= 5{,}69897 + 25\,(9{,}95424 - 10)$

log valoarea pentru 25 de ani $= 4{,}55497$

$\therefore$ Valoarea pentru 25 de ani = 35 890£.

Note:

a) Rația comună, r, în problemele de depreciere se obține întotdeauna prin deducerea ratei de depreciere din 1, respectiv dacă rata de depreciere reste de 20%, atunci $r = (1-0{,}2) = 0{,}8$.

b) Asigurați-vă că puteți rezolva practic problema înmulțirii și împărțirii logaritmilor.

6. Suma progresiei geometrice

În mod asemănător progresiei aritmetice, termenii individuali sunt adunați conform următoarei formule generale:

$$S = \frac{a(r^x - 1)}{r - 1}.$$

unde S este suma progresiei geometrice.

Exemplul 7

O companie investește anual 10 000£ într-un fond de siguranță, timp de 5 ani, cu o dobândă compusă de 9%. Care va fi valoarea fondului după 5 ani?

(*Notă*: din această întrebare se înțelege că cei 10 000£ sunt investiți la sfârșitul fiecarui an, astfel încât pentru ultimul an nu se primește nici o dobândă.) Pentru clarificarea problemei, se reprezintă întregul șir de progresii geometrice:

£(10 000×1,09⁴) + £(10 000×1,09³) + £(10 000×1,09²) + £(10 000×1,09) + £10 000

Din relație se observă că șirul a fost reprezentat în ordine inversă și că numărul de termeni ai șirului este 5, respectiv același cu numărul de ani.

$$a = 10\,000, \qquad r = 1{,}09, \qquad x = 5,$$

$$S = \frac{a(r^x - 1)}{r - 1} = \frac{10\,000(1{,}09^5 - 1)}{1{,}09 - 1},$$

$$S = 59\,847£.$$

7. Dobânda simplă și compusă

Se pot adeseori investi sume de bani pentru câștigarea unor dobânzi, care pot fi ori *dobânzi simple*, ori *dobânzi compuse*. Principiul și formulele matematice care se află la baza calculării dobânzilor simple și compuse sunt explicate în continuare, folosindu-se următoarele simboluri:

P – suma în momentul actual;

S – suma totală care va fi realizată în viitor;

n – numărul de perioade pentru care se obțin dobânzi exprimate în ani, deși nu este absolut necesar să fie folosită această unitate de timp;

r – rata dobânzii exprimată invariabil ca rată anuală a dobânzii;

I – nivelul total al dobânzii.

8. Dobânda simplă

Atunci când dobânda este calculată numai pentru suma investită inițial se numește *dobândă simplă*, respectiv suma reprezentată de dobândă nu este reinvestită pentru a aduce un câștig mai mare:

$$I = S - P$$

$$r = \frac{I}{Pn}$$

$$I = Prn$$

$$S = P + I = P + Prn = P(1 + rn).$$

Exemplul 8

Care este suma totală realizată prin depunerea sumei inițiale de 10 000£, cu o dobândă de 8%, pe o perioadă de 15 ani?

$$S = 10\,000\,[1 + 0{,}08(15)]£$$
$$= 22\,000£$$

Exemplul 9

Cât timp este necesar pentru ca o sumă să se dubleze, aducând o dobândă simplă de 10% pe an.

Să considerăm $P = 1$ și $S = 2$ și $I = 1$

$I = Prn$

$1 = (1)\,(0{,}10)\,(n)$

$$n = \frac{1}{0{,}10} = 10 \text{ ani}.$$

9. Dobânda compusă

De un mai mare interes practic este utilizarea principiului dobânzii compuse, respectiv dobânda plătită pentru suma depusă inițial și pentru dobânda reinvestită, astfel încât termenii șirului constituie o progresie geometrică. Principiile dobânzii compuse constituie baza pentru calculele de anuități și discounturi, astfel încât foarte buna înțelegere a termenului este vitală.

Formula fundamentală este următoarea:

$$S = P\,(1 + r)^n.$$

Datorită importanței și a frecvenței mari cu care sunt utilizate, au fost realizate tabele de dobânzi în care pot fi găsiți factorii dobânzii compuse, pentru diferite rate ale dobânzii (r) și pentru diferite perioade de timp, exprimate în ani (n). A se vedea tabelul VII.

Exemplul 10

La ce sumă se va ridica un depozit inițial de 10 000£ cu o dobândă compusă de 8% pe o perioadă de 15 ani?

$$S = 10\,000\,(1 + 0{,}08)^{15}$$

(*Notă.* Factorul dobânzii compuse $(1=0{,}8)^{15}$ poate fi calculat cu ajutorul unui calculator electronic, dar cel mai adesea se apelează la tabele - folosind tabelul VII, veți găsi, pentru procentul de 8% pe o perioadă de 15 ani, valoarea de 3,172)

$$S = 10\,000\,(3{,}172)£$$
$$= 31{,}720£.$$

Notă. Comparați rezultatul acesta cu exemplul 8.

Exemplul 11

Pentru ce rată a dobânzii compuse se va obține o sumă de 5000£ după o perioadă de 5 ani, dacă depozitul inițial este de 4000£?

$$5000 = 4000\,(1 + r)^5,$$
$$\frac{5000}{4000} = (1 + r)^5,$$
$$(1 + r)^5 = 1{,}25.$$

Căutați în tabelul VII, în dreptul liniei de 5 ani și veți găsi, pentru o dobândă de 4% un factor de 1,217 și pentru o dobândă de 5% un factor de 1,276. Așadar, rezultatul corect se află între 4% și 5% mai exact cu puțin peste 4 1/2%.

Exemplul 12

Pe ce perioadă o anumită sumă de bani se va dubla, dacă dobânda compusă este de 10% pe an? (să se compare acest rezultat cu rezultatul de la exemplul 9).

$$2 = 1(1 + 0{,}1)^n,$$
$$\therefore (1 + 0{,}1)^n = 2.$$

Din nou se poate face apel la tabele pentru scurtarea calculelor. Se observă, aşadar, în tabelul VII, pentru coloana de 10%, unde se observă că factorul cel mai apropiat de 2 este 1,949, pentru o perioadă de 7 ani. Pentru o perioadă de 8 ani, factorul este 2,144 şi făcând calculele rezultă că perioada în care un capital oarecare se dublează printr-o dobândă compusă de 10% este de 7,33 ani.

10. Scontul

Principiul de compunere prezentat în paragraful 9 operează pornind de la o sumă actuală (P) care, depusă cu o dobândă compusă, duce la o sumă totală (S).

În mod evident, pot exista situaţii în care să se cunoască suma totală (S), cerându-se să se calculeze suma actuală (P). Formula matematică utilizată în această situaţie este:

$$P = \frac{S}{(1+r)^n}.$$

Notă. Această formulă reprezintă baza pentru toate metodele de scont şi este utilă cu deosebire pentru tehnicile de scont al fluxului monetar despre care vor fi prezentate în capitolele următoare.

Exemplul 13

Ce sumă trebuie investită în acest moment, pentru a produce 20 000£ în 5 ani la o dobândă compusă de 10%?

(În mod alternativ, întrebarea ar putea fi formulată şi la modul: care este valoarea actuală a sumei de 20 000£ realizată în 5 ani pentru o rată de scont de 10%?)

$$P = \frac{S}{(1+r)^n},$$

$$P = \frac{20\,000}{(1+0,1)^5}$$

$$= 12\,420£.$$

Notă. Expresia matematică poate să fie rezolvată cu ajutorul calculatorului electronic, dar datorită faptului că scontarea reprezintă o metodă foarte larg utilizată, au fost realizate tabele de valori. A se vedea tabelul VIII. Factorul de scont pentru 10% în 5 ani este de 0,621, deci

$$20\,000 \times 0,621 = 12\,420£.$$

11. Scontarea unui şir

O multitudine de probleme depăşesc cadrul restrâns al decontării unei singure sume, operând cu şiruri de fluxuri monetare pentru care se cere scontarea valorii actuale.

În aceste situații se va aplica următoarea formulă matematică:

$$P = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{A_i}{(1+r)^i},$$

unde A_i reprezintă fluxul monetar de la sfârșitul anilor 1, 2, 3 ... n.

Exemplul 14

Care este valoarea actuală pentru care se realizează un câștig de 1000£ pe 1 an, 2000£ pe 2 ani și 3000£ pe 3 ani pentru o rată de scont de 10%?

$$\therefore P = \frac{1000}{(1+0{,}1)^1} + \frac{2000}{(1+0{,}1)^2} + \frac{3000}{(1+0{,}1)^3}.$$

Factorii de scont fiind: 0,909, 0,826 și 0,751 (v. tabelul VIII)

$$P = 1000(0{,}909) + 2000(0{,}826) + 3000(0{,}751)$$
$$= 4{,}814£.$$

Atunci când fluxul monetar diferă de la un an la altul, nu există o formulă general valabilă care să poată fi aplicată. În asemenea cazuri trebuie făcute calcule separate pentru fiecare an, după care aceste rezultate se adună. Însă în cazurile în care fluxurile monetare sunt constante, există posibilitatea de a se apela la anumite facilități de calcul.

12. Anuitățile

Atunci când fluxul monetar primit sau plătit este constant pentru toți anii, șirurile astfel obținute se numesc *anuități*. Valoarea actuală poate să fie calculată utilizându-se formula de la paragraful 11, respectiv scontând fiecare termen și apoi însumându-le, dar aceste șiruri de formule pot fi reunite într-una singură și anume:

$$P = \frac{A[1-(1+r)^{-n}]}{r},$$

unde A este nivelul obișnuit al încasărilor.

Exemplul 15

Care este valoarea actuală a unei anuități de 500£ primită pe o perioadă de 10 ani, dacă rata de scont este de 10%?

$$P = \frac{500\left[1 - \frac{1}{(1+0.1)^{10}}\right]}{0.1}$$
$$= 3072£.$$

Notă. Iarăși, din cauza faptului că anuitățile se calculează în mod frecvent, au fost realizate tabele pentru factorul de anuitate, pe baza relației

$\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$ (a se vedea tabelul IX).

Consultând tabelul IX, se va găsi pentru o rată de 10% pe o perioadă de 10 ani, un factor de 6,145.

∴ Valoarea actuală este 500£ × 6,145 = 3,072£.

Tot datorită faptului că acest gen de probleme este foarte frecvent întâlnit, există o metodă de a scurta calculele, constând în aplicarea unei formule $a_{n\,r}$ respectiv factorul de anuitate pe o perioadă de n ani, la o rată r a scontului.

$$500£\ a_{10\,|\,10\%} = 3072£.$$

13. Perpetuitățile

În cazurile în care fluxul monetar se propagă la infinit, expresia matematică dintre parantezele pătrate devine 1 și formula matematică simplificată devine

$$P = \frac{A}{r}.$$

Exemplul 16

Care este valoarea actuală a unei anuități perpetue de 500£ pe an la o rată a scontului de 10%? (Respectiv 500£ $a_{\infty\,|\,10\%}$)?

$$P = \frac{500}{0,1}$$
$$= 5000£.$$

Exemplul 17

Care este rata dobânzii în cazul în care un depozit actual de 5000£ poate să asigure o anuitate perpetuă de 300£ pe an?

$$r = \frac{A}{P} = \frac{300}{5000}$$
$$= 6\%.$$

Notă. Acest concept este foarte simplu și prin urmare este utilizat atunci când se fac aprecieri în legătură cu scontul fluxului monetar.

14. Creșterea (scăderea) fluxurilor monetare la o rată compusă

Există și situații în care se cere să se găsească valoarea actuală a unui șir de fluxuri monetare cu tendință de creștere (sau scădere) la o rată compusă, cum ar fi un șir de dividende cu tendință de creștere la o rată de 8% pe an.

$$P = \frac{A}{(1+g)}\, a_{n\rceil r_0\%},$$

$$\text{unde } r_0 = \frac{r-g}{1+g}$$

($a_{n\rceil r_0\%}$ este desigur, factorul de anuitate descris în paragraful 12)

Exemplul 18

Care este valoarea actuală a unui flux de dividende ce va fi declanșat într-un an, pornind dela valoarea de 440£/dividend, după care se prezumează o creștere de 10% pe an? De asemeni trebuie precizat că se estimează o prelungire a acordării acestor dividende pe o durată de 10 ani, cu o rată de scont de 32%.

$$P = \frac{A}{(1+g)}\, a_{n\rceil r_0\%}$$

$$\text{unde } r_0 = \frac{r-g}{1+g}$$

$$r_0 = \frac{0{,}32 - 0{,}10}{1{,}10} = \frac{0{,}22}{1{,}10} = 0{,}20$$

$$\text{și } \frac{A}{1+g} = \frac{440}{1{,}10} = 400£.$$

$$\therefore P = 400£\, a_{10\rceil 20\%}$$

$$= 400 \times 4{,}192$$

$$= 1677£$$

Notă. Factorul 4,192 este obținut din tabelul IX.

Exemplul 19

Care trebuie să fie valoarea actuală în cazul exemplului 18 dacă fluxul de dividende are termen nedefinit?

La fel ca și în exemplul 18

$$r_0 = 0{,}20 \text{ și } \frac{A}{1+g} = 400£$$

$$\therefore P = 400£\, a_{\infty\rceil 20\%}$$

$$= \frac{400}{0{,}2}$$

$$= 2000£.$$

BCU IAȘI CENTRU UNIVERSITAR LIBRARY

Exemplul 20

Să presupunem că este vorba despre aceeași situație ca în exemplul 18, cu excepția faptului că se estimează o reducere a dividendelor cu 10% pe an.

$$g = -0{,}10$$

$$r_0 = \frac{0{,}32 + 0{,}01}{1 - 0{,}10} = 0{,}466£$$

$$\text{și } \frac{A}{1+g} = \frac{440}{0{,}9} = 489£$$

$$\therefore P = 489£\, a_{10\rceil 46{,}2/3\%}$$

$$P = 489 \times 2{,}09650$$

$$P = 1025£$$

Notă. Atunci când se obțin valori mari pentru r_0, este posibil să nu le găsiți în tabele și va trebui să apelați la un calculator cu logaritmi sau la un tabel de logaritmi.

15. Compunerea/scontarea pe alte intervale decât cele anuale

Până în acest moment am mers pe premiza că fluxurile monetare au fost primite sau plătite anual și că dobânzile se aplică de asemeni anual. Acestea sunt, de altfel, premizele uzuale în cazul subiectelor de examene, dar este posibil ca scontarea/compunerea să fie aplicate pe alte intervale de timp, respectiv lunar, trimestrial, bianual sau chiar continuu. Compunerea și scontarea continuă necesită utilizarea unor tabele speciale care se consultă în același mod ca și tabelele pe perioade discrete. Tabelele normale (respectiv tabelele VII și XI) pot fi utilizate și pentru alte perioade decât cele anuale, așa cum voi arăta în exemplul următor.

Exemplul 21

Ce sumă trebuie investită în prezent pentru ca în 5 ani, la o rată de 10% pe an, compusă bianual, să se obțină o sumă de 20 000£? (Cu alte cuvinte, care este valoarea actuală a sumei de 20 000£ primită în 5 ani, scontată la 10% bianual?)

Se calculează numărul perioadelor de scontare/aplicare a dobânzii, respectiv 5×2=10:

Se calculează rata scontului/dobânzii pe perioadă, respectiv

$$\frac{\text{Rata dobânzii/scontului}}{\text{Nr. de perioade p.a.}} = \frac{10}{2} = 5\%.$$

Se caută în tabele factorul pentru 10 perioade a 5% (respectiv, coloanele sunt considerate ca fiind „perioade").

Din tabelul VIII se obține factorul 0,614.

$$\text{Valoarea actuală} = 20\,000£ \times 0{,}614$$
$$= 12\,280£.$$

Comparați acest rezultat cu rezultatul exemplului 13.

Notă. Indiferent dacă este vorba despre compunere sau scontare, se aplică aceleași principii. Se calculează numărul de perioade de scont/aplicare a dobânzii și rata dobânzii pe perioada respectivă. Cu cât este mai frecvent compusă/scontată o valoare, cu atât mai mare/mic va fi rezultatul.

16. Dobânzile nominale și actuale

În cea mai mare parte, dobânzile sunt exprimate în valori anuale, chiar și atunci când dobânda este compusă/scontată pe perioade mai mici de un an. În asemenea cazuri, rata dată a dobânzii se numește *rată nominală*.

După cum compunerea sau scontarea sunt realizate zilnic, săptămânal, lunar, trimestrial sau bianual, rata actuală sau rata procentuală anuală (*RPA*) poate să varieze față de de rata nominală. Discrepanța dintre rata nominală și *RPA* devine cu atât mai mare cu cât frecvența compunerii sau scontării și numărul anilor cresc. *RPA* constituie o valoare foarte importantă și, prin lege, trebuie precizată în acordurile financiare, de împrumut sau creditare a unor achiziții.

Dată fiind rata anuală nominală a dobânzii, *RPA* poate să fie calculată pe baza următoarei formule:

$$\text{RPA} = \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n - 1,$$

unde: i este rata nominală pentru perioada de compunere;
n – numărul de perioade de compunere dintr-un an.

Exemplul 22

O companie financiară oferă credite cu o dobândă nominală de 20% dar efectuează compuneri lunare. Care este RPA?

$$\text{Rata nominală lunară} = \frac{0{,}20}{12} = 0{,}0166.$$

$$\therefore \text{RPA} = (1 + 0{,}0166)^{12} - 1 = 0{,}2194 \text{ sau } 21{,}94\%.$$

17. Rezumat

a) Numeroase calcule financiare au la bază șirurile. Cele mai uzuale două tipuri de șiruri sunt reprezentate de progresiile aritmetice și geometrice.

b) Într-o progresie aritmetică, fiecare nouă valoare se obține adunând la valoarea anterioară o valoare constantă.

c) Într-o progresie geometrică, fiecare nouă valoare se obține înmulțind valoarea anterioară cu o constantă.

d) Atunci când dobânda se calculează numai pentru suma depusă, se numește dobândă simplă.

e) Atunci când dobânda este calculată pentru suma depusă plus dobânzile anterioare reinvestite, se numește dobândă compusă. Multe probleme de anuitate și scont se bazează pe principiul dobânzii compuse.

f) Principiul de bază al compunerii oferă rezultate la anumite date pentru viitor, în timp ce scontarea pornește de la o sumă viitoare cunoscută și ajunge la valoarea actuală.

g) Formula fundamentală de scontare

$$P = \sum \frac{A_i}{(1+r)^i}$$

este foarte importantă, reprezentând baza tehnicilor de scotare a fluxurilor monetare care vor fi descrise în capitolele următoare.

h) Anuitățile sunt sume constante care se primesc/plătesc anual, pe termene definite.

i) Perpetuitățile sunt sume constante care se primesc/plătesc anual, pe termene nedefinite. Evident, nu este o ipoteză realistă, ci se face doar ocazional.

j) Deși ratele dobânzilor și sconturilor sunt aplicate în mod normal la intervale anuale, nu reprezintă singura posibilitate de calcul. Tabelele (respectiv tabelele VII, VIII și IX) pot fi utilizate și în aceste condiții, prin calcularea numărului de perioade pentru care se calculează dobânda, în funcție de care se ajustează rata dobânzii/scontului anual, pentru a corespunde perioadei precizate.

18. De reținut

Matematicile financiare reprezintă baza multor tehnici contabile și de afaceri (inclusiv deprecierea și scontarea), drept pentru care recomand aprofundarea corespunzătoare a acestui capitol.

Întrebări de autoevaluare. *Numerele dintre paranteze sereferă la numerotarea paragrafelor.*

1. Care sunt cele două tipuri de șiruri cel mai des folosite în domeniul financiar? (3 și 5)

2. Ce înseamnă dobândă simplă și care este formula de calcul a unei sume viitoare pornind de la o sumă actuală și o rată a dobânzii? (8)

3. Ce înseamnă dobândă compusă și care este formula echivalentă noțiunii de la punctul 2? (9)

4. Care este relația dintre scontare și compunere? (10)

5. Care este formula pentru calculul valorii actuale a şirurilor? (11)
6. Ce reprezintă anuitatea? (12)
7. Ce reprezintă perpetuitatea şi cum se calculează valoarea actuală? (13)
8. Cum se rezolvă situaţiile în care se cere compunerea sau scontarea pentru intervale de timp altele decât cele anuale? (15)

Exerciţii cu răspunsuri

1. Să se găsească valoarea celui de-al 12-lea termen şi suma primilor 20 de termeni ai progresiei:

4, 8, 16, 32, 64...

2. Cât timp îi este necesar unei sume să se tripleze:
   a) la o dobândă simplă de 15%?
   b) la o dobândă compusă de 15%?
3. Care este valoarea actuală a:
   a) sumei de 200£ ce urmează să fie primită pe o perioadă de 10 ani, cu o rată de scont de 10%?
   b) sumei de 200£ ce urmează să fie primită pe o perioadă de 10 ani, începând după 5 ani,la o rată de 10%?
   c) a dividendelor în sumă de 500£ pe an, cu o creştere de 5% pe an, la o rată de scont de 26% pe un termen de 10 ani?

Răspunsuri la exerciţii

1. Este o progresie geometrică cu raţia comună 2.

$\therefore$ Valoarea termenului al 12-lea $= 4 \times 2^{12-1} = 8{,}192$

Suma primilor 20 de termeni este

$$\text{Suma} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$
$$= \frac{4(2^{20} - 1)}{2 - 1}$$
$$= 4\,194\,300.$$

2. a) $P = 1, \quad S = 3, \quad I = 2$

$$\therefore 2 = Prn$$
$$2 = 1 \times 0{,}15 \times n$$
$$\therefore n = \frac{2}{0{,}15} = 13{,}3 \text{ ani}$$
$$3 = 1(1+0{,}15)^n$$
$$3 = 1{,}15^n$$
$$\therefore n = 7{,}86 \text{ ani}$$

3. a) $200£ a_{10\rceil 10\%} = 200 \times 6{,}145 = 1229£.$

b) $1229£ @10\% = 1229£ \times 0{,}621 = 763{,}2£.$

$$r_0 = \frac{r-g}{1+g} = \frac{0{,}26-0{,}05}{1{,}05} = 20\%.$$

c) $$P = \frac{A}{1+g} = \frac{500}{1{,}05} = 476.$$

$$\therefore P = 476 \times a_{10\rceil 20\%} = 476 \times 4{,}192 = 1995£.$$

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

28. EVALUAREA INVESTIȚIILOR – ELEMENTE FUNDAMENTALE ȘI TEHNICI

1. Obiective

După parcurgerea acestui capitol:

- veți înțelege bazele luării deciziilor pe termen lung;
- veți putea utiliza tehnicile tradiționale de evaluare a ratei de recuperare și amortizare;
- veți ști de ce sunt utilizate tehnicile de scontare a fluxului monetar;
- veți putea calcula și interpreta Valoarea Netă Actuală;
- veți înțelege semnificațiile ratei interne de recuperare;
- veți ști ce se înțelege prin index al valorii actuale în exces;
- veți înțelege efectele inflației asupra evaluării investițiilor.

2. Luarea deciziilor pe termen lung

Deciziile legate de realizarea unor investiții reprezintă decizii pe termen lung, pentru care consumul și alternativele investiționale sunt echilibrate pe perioada respectivă de timp, în speranța ca investiția actuală să genereze venituri suplimentare în viitor. Există o multitudine de similitudini între luarea unei decizii pe termen scurt și luarea unei decizii pe termen lung, cum ar fi, de exemplu, posibilitatea de a alege între mai multe alternative, nevoia de a evalua costurile și veniturile din viitor și importanța modificării prețurilor și a veniturilor în sensul creșterii lor, la care se mai adaugă o cerință importantă pentru decizia unei investiții și anume, ca urmare a duratei de timp implicate, valoarea în timp a banilor investiți. Durata impune de asemeni și analizarea gradului de incertitudine și a inflației, care sunt de o importanță cu mult mai mare decât în cazul deciziilor pe termen scurt. Presupunând că mijloacele financiare există, decizia de a face o investiție se bazează pe trei factori majori:

a) *Încrederea investitorului în viitor.* În afaceri, încrederea se bazează pe previziuni ale factorilor interni și externi, care cuprind: costurile, beneficiile, ratele inflației și dobânzilor, impozitele și numeroși alți factori.

b) *Existența unor alternative investiționale.* Acesta este stadiul în care se pot aplica o multitudine de tehnici pentru a evalua gradul de competitivitate al diferitelor variante investiționale. Aceste tehnici sunt trecute în revistă în detaliu în acest capitol.

c) *Atitudinea investitorului în fața riscului.* Deoarece deciziile investiționale se iau în general pe scară mare, analiza atitudinii investitorului față de risc și gradul de incertitudine al proiectului reprezintă factori critici pentru luarea unei decizii investiționale, ei fiind discutați în următorul capitol.

Luarea deciziilor în domeniul investițiilor reprezintă în orice situație o piatră de încercare în lumea afacerilor. Și aceasta se datorește tocmai scării la care se lucrează în lumea afacerilor și consecințelor pe termen lung ale unei asemenea decizii. În ciuda faptului că decizia finală aparține întotdeauna manageriatului, analistul trebuie să evalueze toate alternativele existente, să analizeze datele aplicând cele mai adecvate tehnici și să prezinte rezultatele cu speranța că vor contribui la luarea celei mai bune decizii.

3. Tehnicile tradiționale de evaluare a investițiilor

Există două metode de comparare a atractivității proiectelor concurente, ele fiind cunoscute sub denumirea de „tehnici tradiționale". Aceste două tehnici sunt: evaluarea ratei de recuperare a investiției și amortizarea, ambele fiind descrise în continuare.

4. Evaluarea ratei de recuperare ERR a investiției

Reprezintă raportul dintre profitul anual mediu, după depreciere și capitalul investit. Aceasta este o definiție elementară, dar în practică sunt utilizate diverse variante, ca de exemplu:

- profiturile sunt calculate înaintea sau după deducerea taxelor;
- capitalul poate să includă sau nu capitalul de lucru;
- capitalul investit poate să însemne investiția inițială de capital sau media capitalului investit de-a lungul duratei proiectului.

Notă. Un termen alternativ utilizat este recuperarea capitalului investit.

Exemplul 1

Evaluarea ratei de recuperare

O firmă are în vedere trei proiecte, pentru fiecare dintre ele fiind disponibil un capital de 1000£ pe o durată de cinci ani. Profiturile pe care le pot genera cele trei proiecte sunt estimate după cum urmează:

După deducerea taxelor și deprecierea profitului

Anul	Proiectul I £	Proiectul II £	Proiectul III £
1	200	350	150
2	200	200	150
3	200	150	150
4	200	150	200
5	200	150	350
Total	1000	1000	1000

Să se calculeze rata de recuperare a investiției raportată la:

a) capitalul inițial;

b) capitalul mediu.

Evaluarea ratei de recuperare a investiției raportată la capitalul inițial

	Proiectul I	Proiectul II	Proiectul III
Profitul mediu	$= \frac{1000}{5}$	$= \frac{1000}{5}$	$= \frac{1000}{5}$
	= 200£ p.a.	= 200£ p.a.	= 200£ p.a.
$\therefore$ ERR este $\frac{200}{1000}$	= 20%	$\frac{200}{1000}$ = 20%	$\frac{200}{1000}$ = 20%

Evaluarea ratei de recuperare a investiției raportată la capitalul mediu

	Proiectul I	Proiectul II	Proiectul III
Capitalul mediu	$= \frac{1000}{2}$	$= \frac{1000}{2}$	$= \frac{1000}{2}$
	= 500£	= 500£	= 500£
$\therefore$ ERR este $\frac{200}{500}$	= 40%	$\frac{200}{500}$ = 40%	$\frac{200}{500}$ = 20%

Notă. Capitalul mediu este calculat în modul obișnuit, capitalul inițial fiind erodat permanent până la zero pe toată durata proiectului, astfel încât capitalul mediu investit este:

$$\frac{\text{Investiția inițială}}{2}.$$

5. Avantajele și dezavantajele din evaluarea ratei de recuperare

Singurul avantaj care poate fi pus în contul evaluării ratei de recuperare este simplitatea calculelor, în schimb dezavantajele sunt mult mai numeroase:

a) Nu permite programarea influxului și a efluxului sumelor investite în proiect.

b) Folosește ca măsură a recuperării conceptul de profit calculat. Profitul are o seamă de elemente subiective, este supus convențiilor de calcul și nu este adecvat pentru scopurile evaluării investițiilor cum ar fi fluxurile monetare generate de proiect.

c) Nu există o metodă general valabilă de calcul a evaluării ratei de recuperare.

6. Amortizarea

Numeroase studii au arătat că amortizarea este o tehnică foarte populară de evaluare a proiectelor, fie folosită de sine stătător, fie conjugată cu alte metode de evaluare. Amortizarea poate să fie definită drept perioada, în general exprimată în ani, necesară pentru ca veniturile realizate să acopere investiția inițială. Ca regulă, trebuie acceptat proiectul care are perioada de amortizare cea mai scurtă. Următorul exemplu va clarifica această metodă.

Exemplul 2

Să se calculeze perioadele de amortizare pentru următoarele trei proiecte:

Fluxul monetar net

Anul	Proiectul I		Proiectul II		Proiectul III	
	Fluxul monetar	Fluxul monetar cumulat	Fluxul monetar	Fluxul monetar cumulat	Fluxul monetar	Fluxul monetar cumulat
0	–1500	–1500	–1500	–1500	–1500	–1500
1	+600	–900	+400	–1100	+300	–1200
2	+500	–400	–500	–600	+500	–700
3	+400	zero	+600	zero	+400	–300
4	–		–		+300	zero
5	–		–		+300	+300
6	–		–		+300	+600

Notă. Presupunerile inițiale care se fac în mod uzual atunci când este vorba de evaluarea unei investiții sunt incluse în acest tabel și în toate exemplele care vor mai urma, ceea ce înseamnă anul 0 – momentul actual, anul 1 – sfârșitul primului an, anul 2 – sfârșitul celui de-al doilea an și așa mai departe, precum și convenția conform căreia fluxul negativ (efluxul) reprezintă o cheltuială și fluxul pozitiv (influxul) reprezintă un venit.

Perioadele de amortizare: Proiectul I = 3 ani.
Proiectul II = 3 ani.
Proiectul III = 4 ani.

7. Avantajele și dezavantajele amortizării

Avantajele:

a) Este simplu de calculat și de înțeles.

b) Se bazează pe fluxurile monetare în loc de profituri și de aceea este mai obiectiv fundamentată.

c) Favorizează proiectele cu perioada de amortizare redusă, care duc la dezvoltarea mai rapidă a companiei și la mărirea lichidităților.

d) Alegerea proiectelor care au perioadele de amortizare cele mai scurte tind să minimizeze riscurile legate de timp cu care se confruntă compania. În orice caz, trebuie menționat că nu toate riscurile au legătură cu timpul sau durata.

Dezavantaje:

a) Amortizarea nu este o măsură a valorii totale a proiectului, deoarece nu are în vedere fluxurile monetare după perioada de amortizare. În exemplul 2, proiectul III rămâne în urma proiectelor I și II, deși, să spunem poate ar aduce profit pentru o perioadă de 6 ani.

b) Amortizarea oferă numai o măsură orientativă a programării fluxurilor monetare în cadrul proiectului. În exemplul 2, proiectele I și II se află la egalitate, deși există deosebiri clare între programările fluxurilor monetare. În ciuda dezavantajelor teoretice, amortizarea este, fără îndoială, cel mai popular criteriu de evaluare a investițiilor în practică.

8. Scontarea fluxul monetar (SFM)

Utilizarea tehnicilor de scontare a fluxului monetar, în scopul evaluării investițiilor și a asistării luării deciziilor investiționale, este tot mai frecventă. Utilizarea lor permite depășirea unora dintre dezavantajele tehnicilor tradiționale, dar trebuie accentuat faptul că și SFM are o serie de neajunsuri și se bazează pe mai multe presupuneri, astfel încât trebuie să fie aplicate cu grijă și având clar în minte limitele care le caracterizează. Principalele tehnici de SFM, respectiv valoarea netă actuală (VNA) și rata internă de recuperare (RIR) vor fi descrise în cuprinsul acestui capitol dar este necesar ca mai înainte să fie discutate două caracteristici comune tuturor metodelor de SFM: utilizarea fluxurilor monetare și a valorii în timp a banilor.

9. Utilizarea fluxurilor monetare

Toate metodele de SFM se bazează pe fluxurile monetare și nu pe profituri. Profiturile sunt calculate invariabil pentru scopuri administrative și sunt exprimate pe diferite perioade (în general lunar, trimestrial sau anual), prin urmare necesitând actualizarea datoriilor financiare neonorate, care la rândul său este însoțită de alte convenții și ipoteze de calcul. În vederea realizării evaluării unei investiții, abordarea pornind de la fluxurile monetare este prin urmare de preferat, pentru următoarele motive:

a) Fluxurile monetare sunt mai obiective și, în cele din urmă, asta contează cu adevărat. Profiturile nu pot fi cheltuite.

b) Convențiile de calcul privitoare la venit/cheltuieli de capital, calcularea deprecierilor, evaluarea stocurilor, devin la un moment dat redundante.

c) Trebuie avută în vedere întreaga durată a proiectului și de aceea nu este necesar a se ține seama de profiturile înregistrate pe perioade de timp limitate pot chiar să inducă în eroare.

d) Programarea fluxurilor monetare reprezintă un element care poate fi prevăzut cu o mai mare siguranță.

10. Ce fluxuri monetare trebuie avute în vedere?

Răspunsul atotcuprinzător la această întrebare este: suma netă rezultată după deducerea taxelor suplimentare asupra fluxului monetar implicate de acceptarea proiectului sau, cu alte cuvinte, compararea fluxului monetar în cazul lansării proiectului cu fluxul monetar în cazul renunțării la el. Multe dintre direcțiile în care se deplasează fluxul monetar pot să fie stabilite cu exactitate, cum ar fi de exemplu cheltuielile inițiale pentru achiziționarea de mașini și utilaje noi, dar există și unele direcții care sunt mai greu de identificat, cum ar fi creșterea sau reducerea veniturilor realizate din vânzarea unui produs deja existent atunci când este lansat un altul, nou. Direcțiile specifice ale fluxului monetar sunt:

a) Influxul monetar, respectiv

a_1) veniturile realizate de pa urma proiectului

a_2) garanții guvernamentale

a_3) revânzarea sau valoarea de casare a unor bunuri

a_4) exceptări de la plata unor taxe

a_5) orice alte influxuri monetare pe care le poate determina lansarea proiectului.

b) Efluxul monetar, respectiv

b_1) investiția inițială în achiziționarea de bunuri

b_2) costurile proiectului (mâna de lucru, materiale etc.)

b_3) investiția în capitalul de lucru

b_4) plata taxelor și a impozitelor

b_5) orice alte efluxuri monetare pe care le poate determina lansarea proiectului.

Note:

a) Costurile relevante în decizia de a face o anumită investiție, ca și în cazul altor tipuri de decizii sunt costurile ocazionale și nu costurile obișnuite pentru tipul de activitate prestată. De exemplu, dacă pentru realizarea proiectului este necesară ocuparea unui spațiu de depozitare închiriat de firmă la un preț de 5£/m² și care ar putea fi subînchiriat la un preț de 7£/m², atunci fluxul monetar relevant este reprezentat de beneficiul pierdut, în valoare de 7£/m².

b) Se va observa că deprecierea nu este inclusă. Deprecierea *nu reprezintă* un flux monetar, ci o convenție de calcul. Cheltuiala de capital este reprezentată deja de efluxul constituit de investiția inițială, astfel încât implicarea în aceste calcule a deprecierii ar însemna o dublare a calculelor. Singurul rol pe care îl joacă deprecierea în evaluarea investițiilor constă în determinarea taxelor și impozitelor impuse de proiect și care trebuie plătite, acestea reprezentând cu adevărat fluxuri monetare.

c) În mod similar, dobânzile nu sunt nici ele incluse, deoarece însuși procesul de scontare are în vedere valoarea în timp a banilor, iar a include dobânzile în aceste calcule înseamnă iarăși o dublare a calculelor.

11. Valoarea în timp a banilor

Evaluarea investițiilor operează cu decizii pe termen lung, costurile și veniturile fiind estimate pe diferite intervale sau perioade de timp. Sumele de bani cheltuite sau primite în momente diferite de timp nu pot fi comparate direct, ci trebuie transformate în valori echivalente raportate la aceeași dată. Această dată poate fi aleasă la întâmplare, pe durata de viață a proiectului, dar metodele de evaluare care țin seama de factorul timp sunt astfel concepute încât recunosc numai momentul inițial al lansării proiectului și momentul final.

Ambele metode, de scontare și de compunere includ valoarea în timp a banilor și pot fi utilizate, prin urmare, pentru evaluarea investițiilor, dar metodele de scontare sunt cel mai des utilizate. În general, este preferabil să primești o anumită sumă de bani mai devreme decât mai târziu, deoarece suma de bani primită mai devreme poate să fie folosită pentru câștigarea unei dobânzi sau poate fi investită într-o activitate productivă, profitabilă în cadrul afacerii sau, cu alte cuvinte, banii au o productivitate determinată de timp.

Trebuie remarcat faptul că acest concept, de valoare în timp a banilor se verifică chiar dacă inflația este nulă. În mod evident, inflația crește discrepanța de valoare dintre banii primiți în momente de timp diferite, dar nu acesta este elementul de bază al conceptului.

12. Ipotezele de lucru în cazul SFM

În descrierea celor două metode de SFM principale se pornește de la o serie de ipoteze de lucru, formulate astfel încât principiile să poată fi mai ușor înțelese. Ipotezele sunt următoarele:

a) nu există incertitudine;

b) nu există inflație;

c) rata corespunzătoare a scontului este cunoscută;

d) există o piață de capital perfectă, respectiv pot fi obținute fonduri nelimitate la nivelul de dobândă al pieții.

Ulterior, aceste ipoteze vor fi înlăturate și vor fi rezolvate și problemele legate de incertitudine, inflație, raționalizarea capitalului. Alegerea unei rate de scont cât mai adecvate implică managementul financiar, care nu intră în preocupările acestei lucrări.

13. Valoarea netă actuală (VNA)

Metoda VNA apelează la principii de scontare care vă sunt familiare din capitolul anterior.

Prin metoda VNA sunt calculate valorile actuale estimate ale influxurilor și efluxurilor monetare (respectiv este vorba despre procesul de scontare) și se stabilește dacă valoarea totală actuală a influxului monetar este mai mare decât valoarea totală a efluxului.

Formula generală este

$$VNA = \sum_{i=n}^{i=0} \frac{C_i}{(1+r)^i},$$

unde C este fluxul monetar net pe perioadă, i este numărul perioadei, iar r este rata de scont.

În cazurile în care rata de scont este costul de capital al firmei, regula obișnuită de luare a deciziei este următoarea: având în vedere și ipotezele de la paragraful 12, un proiect este acceptabil dacă VNA este pozitivă.

Exemplul 3

Se realizează evaluarea unui proiect de investiție, pentru care fluxurile monetare au fost programate după cum urmează:

Anul 0	Anul 1	Anul 2	Anul 3	Anul 4
–9500	+3000	+4700	+4800	+3200

Care este VNA dacă rata de scont este de 20%? Este acceptabil acest proiect?

Notă. Au fost prevăzute fluxurile convenționale de sfârșit de an având în vedere că anul 1 înseamnă sfârșitul primului an și așa mai departe.

Soluția

Din tabelul VIII factorii de scont sunt: 0,833 ; 0,694 ; 0,579 și 0,482.

$$\therefore VNA = -9500 + (0{,}833 \times 3000) + (0{,}694 \times 4700) + (0{,}579 \times 4800) + (0{,}482 \times 3200).$$

$$VNA = +582£$$

și, având în vedere ipotezele conținute de modelul fundamental pentru SFM, investiția este acceptabilă, deoarece *VNA* este pozitivă față de costul de capital al firmei.

14. Semnificația VNA

Dacă VNA calculată pentru un proiect este pozitivă, acest fapt poate fi interpretat ca o potențială creștere a veniturilor, creștere posibilă datorită proiectului care deocamdată este evaluat în termenii prezentului. Acest fapt este ilustrat de tabelul I, pe baza exemplului 3 și care arată evoluția unui împrumut de 9500£, cu 20% dobândă pe an pentru finanțarea unui proiect realizat în descoperire de cont, dobânda fiind plătită în funcție de bilanțul realizat la sfârșitul fiecărui an (tabelul 28.1).

Tabelul 28.1

	Suma	+	Dobânda anuală	–	Fluxul monetar anual	=	Bilanțul
După anul 1	9500	+	1900	–	3000	=	8400
După anul 2	8400	+	1680	–	4700	=	5380
După anul 3	5380	+	1076	–	4800	=	1656
După anul 4	1656	+	331	–	3200		
Dând un surplus final de 1213£							

Rezultatul acesta semnifică următoarele: dacă se împrumută suma de 9.500£ pentru o dobândă de 20%, capitalul și dobânda pot fi achitate din fluxul monetar al proiectului, astfel încât la sfârșitul anului 4 bilanțul să fie pozitiv, cu un plus de 1213£. Acest bilanț este cunoscut sub denumirea de valoare netă finală și are o valoare actuală de 584£ (1213£×0,482) și care, având în vedere aproximațiile conținute în tabelele de trei zecimale, reprezintă tocmai VNA pentru exemplul 3.

15. Rata internă de recuperare (RIR)

Denumirile alternative pentru RIR sunt: randamentul SFM, eficiența marginală a capitalului, metoda încercărilor succesive, eficiența scontului și rata de recuperare statistic-contabilă.

RIR poate fi definită ca *rata scontului pentru care VNA este nulă*. RIR nu poate fi obținută direct, ci fie prin desenarea unui grafic cunoscut sub denumirea de profil al valorii actuale fie, în mod obișnuit, prin calcule care implică interpolarea liniară. Ambele metode vor fi prezentate în continuare, folosindu-se datele din exemplul 3.

16. Profilul valorii actuale

Profilul valorii actuale este un grafic al VNA calculate pentru diferite valori ale ratei scontului. În mod normal se plotează cel puțin două valori; una este reprezentată de o valoare pozitivă a VNA și alta de o rată care dă un VNA negativ. Se cunoaște de la exemplul 3 că o rată de scont de 20% dă un VNA pozitiv de 582£, aceasta fiind valoarea pozitivă. Refacem apoi calculele pentru o valoare mai mare a ratei scontului pentru a vedea dacă se obține o valoare negativă a VNA. În acest caz, o rată de scont de 25% dă o VNA negativă de 322£. Aceste două valori sunt plotate pe graficul din fig. 28.1 și cele două puncte obținute sunt unite cu un segment de dreaptă, pentru a se vedea unde este intersectată axa orizontală care dă valoarea RIR.

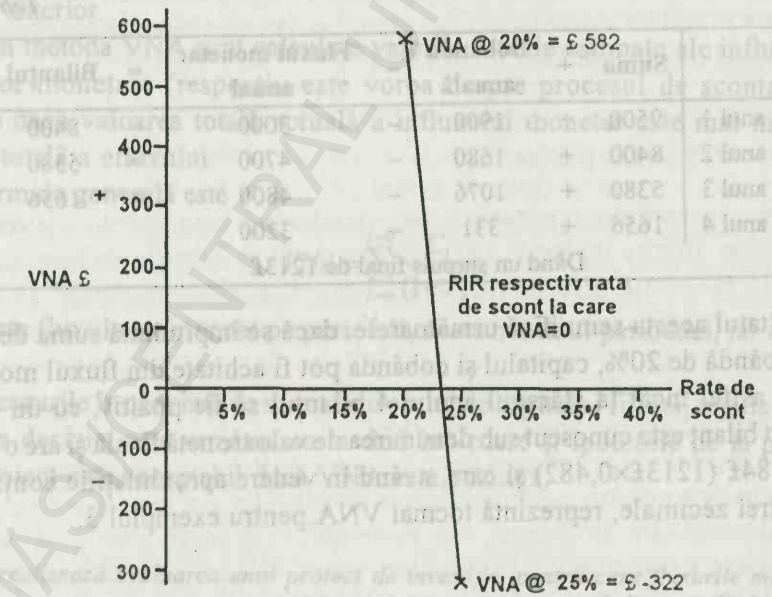


Fig. 28.1. Profilul valorii actuale.

Note:

a) trebuie aleasă cel puțin o rată a scontului care să dea o VNA negativă, astfel încât segmentul de dreaptă care unește cele două puncte să intersecteze axa orizontală;

b) Dreapta valorii actuale intersectează axa orizontală aproximativ în dreptul valorii de 23%, această apreciere fiind suficient de precisă pentru scopurile practice.

17. Aflarea RIR prin interpolare liniară

Pe baza datelor din exemplul 3, RIR poate fi calculată după cum urmează:

$$RIR = \underset{(a)}{20\%} + \underset{(b)}{5\%} \left(\frac{\overset{(c)}{582}}{\underset{(d)}{904}}\right)$$

$$= 16{,}9\%$$

unde:	(a) este rata de scont care dă o VNA pozitivă	În acest exemplu 20% înseamnă 582£
	(b) este diferența dintre (a) și rata care dă o VNA negativă	În acest exemplu 25% – 20% = 5%
	(c) este VNA pozitivă pentru rata de scont aleasă în (a)	În acest exemplu suma este 582£
	(d) este intervalul total al VNA pentru ratele alese	În acest exemplu de la +582 la –332 avem un interval de 904£

Note:

a) O cale simplă de obținere a unei estimări brute pentru RIR constă în considerarea reciprocei perioadei de amortizare. Acest mod de lucru dă rezultatele cele mai bune pentru perioade mari de amortizare. Pentru perioadele de amortizare scurte, cum este cazul și în exemplul 3, metoda dă o estimare slabă.

b) Având în vedere că nu există o relație liniară între ratele de scont și VNA, interpolarea liniară nu dă un rezultat absolut exact. Cu toate acestea, dacă cele două rate de scont care dau VNA pozitivă și negativă sunt suficient de apropiate una de alta, rezultatul este suficient de exact pentru a satisface scopurile practice și rezolvarea subiectelor de examen.

18. Reguli de luare a deciziilor pe baza RIR

Când RIR este mai mare decât costul de capital suportat de companie, proiectul este acceptabil, în condițiile ipotezelor deja formulate. În majoritatea cazurilor, acolo unde există fluxuri monetare ocazionale, respectiv efluxul inițial urmat de o serie de influxuri, RIR are aceeași valoare de acceptare sau renunțare la proiect ca și VNA, așa cum este cazul și cu exemplul 3 de mai înainte. Acest lucru nu este

însă valabil pentru toate tipurile de fluxuri monetare, iar cele două tehnici nu dau, în mod necesar, o clasificare a proiectelor în funcție de atractivitate.

19. Compararea VNA și RIR

În multe împrejurări, oricare dintre aceste două criterii poate fi utilizat cu succes, dar în anumite situații apar și deosebiri care vor fi explicate în cele ce urmează:

a) *Deciziile de acceptare/renunțare.*

Atunci când proiectele pot fi analizate independent unele de altele și când fluxurile monetare sunt convenționale, VNA și RIR dau aceeași decizie, respectiv acceptare/renunțare.

	Proiect acceptat	Proiect refuzat
VNA	VNA pozitiv	VNA negativ
RIR	RIR superior costului de capital	RIR inferior costului de capital

b) *Măsuri absolute și relative.*

VNA reprezintă o măsură absolută a recuperării investiției intr-un proiect, în timp ce RIR este o măsură relativă, care stabilește o relație între programarea fluxurilor monetare și investiția inițială. Astfel, VNA reflectă scara de realizare a unui proiect, în timp ce RIR nu poate realiza acest lucru.

Exemplul 4

Să presupunem că un proiect oarecare este caracterizat de următorul flux monetar:

		Anul 0	Anul 5
Proiectul x		–20 000£	+40 241£
VNA @ 10%	=	4.990£	
RIR	=	15%	

∴Proiectul este acceptabil după ambele metode - presupunând un cost de capital de 10%.

Acum să presupunem că proiectul este amplificat cu un factor 10.

		Anul 0	Anul 5
Proiectul x		–200 000£	+402 410£
VNA @ 10%	=	49 990£	
RIR	=	15%	

Metoda VNA face o discriminare clară între proiectul x și proiectul 10x, în timp ce metoda RIR rămâne nemodificată la 15%.

c) *Proiectele care se exclud reciproc.*

O importantă clasă de proiecte este aceea care depinde de decizii care se exclud reciproc, respectiv numai unul dintr-o multitudine de proiecte poate fi acceptat. De exemplu, mai multe alternative se referă la aceeași suprafață de teren și atunci când una dintre ele este aleasă, în mod automat celelalte sunt excluse.

Deciziile care se exclud reciproc sunt destul de des întâlnite și de aceea este necesară o metodă de clasificare a lor în funcție de atractivitate, pentru a putea alege cea mai profitabilă alternativă. În asemenea împrejurări, VNA și RIR pot să ducă la obținerea unor rezultate diferite și chiar antagonice.

Exemplul 5

O companie din domeniul proprietaților imobiliare dorește să dezvolte unul dintre terenurile care îi aparțin. Sunt avute în vedere trei proiecte de trei dimensiuni, iar costurile și veniturile realizate cu acestea sunt după cum urmează:

	Anul 0 Cheltuială mil. £	Anul 1 al rentei viagere Chirii p.a. mil. £
Dezvoltare mică	2	0,6
Dezvoltare medie	4	1
Dezvoltare mare	6	1,35

Costul de capital este de 10% și se cere să se aranjeze aceste proiecte în ordinea atractivității, în funcție de VNA și de RIR și să fie ales proiectul cel mai profitabil.

Proiectele se exclud reciproc.

Soluția

	Cheltuială mil. £	**Valoarea proiectului pentru închirieri mil. £**	**VNA mil. £**	**RIR %**
Scară mică	2	6	4	30
Scară medie	4	10	6	25
Scară mare	6	13,5	7,5	22,5

Clasificările obținute prin aplicarea celor două metode diferă una de alta și în această situație este preferată clasificarea în funcție de VNA (respectiv proiectul de dimensiuni mari) deoarece conduce la cea mai mare creștere a avuției companiei respective.

Deși este mai simplu și mai sigur să se recurgă la analiza clasamentului în funcție de VNA, RIR poate să fie utilizată de asemeni recurgându-se la o abordare prin creștere și apoi comparând RIR crescut (pentru fiecare nivel de creștere) cu costul de capital.

Exemplul 5 este rezolvat din nou, prin această abordare.

	Creşterea cheltuielii mil. £	Creşterea chiriei mil. £	Creşterea RIR %
Stadiul 1 (mic)	2	0,6	30
Stadiul 2 (mediu–mic)	2	0,4	20
Stadiul 3 (mare–mediu)	2	0,35	17,5

Se observă că RIR pentru fiecare stadiu succesiv, deşi descrescător, este mai mare decât 10% din costul de capital, astfel încât fiecare creştere succesivă se dovedeşte justificată. Deşi această metodă conduce la concluzii corecte, este mai complicată şi se preferă, de obicei, metoda VNA deoarece este mai directă şi mai simplă.

Exemplul 6

Este vorba despre câteva proiecte care se exclud reciproc, la aceeaşi scară. Două investiţii care se exclud reciproc au următoarele fluxuri monetare:

	Anul 0	Anul 1	Anul 2	Anul 3
Proiectul A	–24.000	+8.000	+12.000	+16.000
Proiectul B	–24.000	+16.000	+10.000	+8.000

Costul de capital este de 10%.

VNA şi RIR pentru aceste două proiecte sunt următoarele:

	VNA @ 10%	RIR %
Proiectul A	+2600	20,65
Proiectul B	+2406	22,8

Se observă, aşadar, că cele două clasificări diferă şi, presupunând că este acceptabilă o rată de scont de 10%, clasificarea dată de VNA, respectiv preferinţa pentru proiectul A, poate să aducă cea mai importantă creştere a avuţiei companiei.

Notă. Conflictul dintre cele două clasificări prezentate mai înainte este, de fapt, o ilustrare a profilurilor diferite în timp ale fluxurilor monetare ale celor două proiecte. Aceste profiluri de timp conduc la obţinerea unei clasificări diferite după metoda VNA deoarece se folosesc rate de scont diferite. De exemplu, valorile VNA pentru proiectele de mai înainte, la o rată de scont de 20% sunt de 1256£ şi respectiv 900£, ceea ce duce la o clasificare B - A în loc de clasificarea A - B care se obţine pentru o rată de scont de 10%.

20. Fluxurile monetare neconvenționale (cazul ratelor multiple)

Proiectele care au fost analizate până acum au fost caracterizate de fluxuri monetare convenționale, respectiv un eflux inițial urmat de o serie de influxuri. În cazurile în care fluxurile monetare diferă de acest model, au primit denumirea de *fluxuri neconvenționale*. Să vedem următoarele exemple:

Exemplul 7

Exemple de modele de fluxuri monetare neconvenționale:

	Anul 0	Anul 1	Anul 2
Proiectul X	–2000	+4700	–2750
Proiectul Y	+2000	–4000	+4000

Proiectul X are două efluxuri și, deci, este neconvențional.

Proiectul Y are un eflux pe o durată de un an în loc de un eflux inițial și deci este neconvențional.

Când un proiect are fluxuri monetare neconvenționale, poate avea:

a) Un RIR;

b) RIR multiplu;

c) Nici un RIR.

Ratele multiple: dacă reprezentăm profilul valorii actuale (fig. 28.2) pentru proiectul X din exemplul 7, se observă că este un proiect cu RIR multiplu, respectiv cu două RIR, de 10% și 25%.

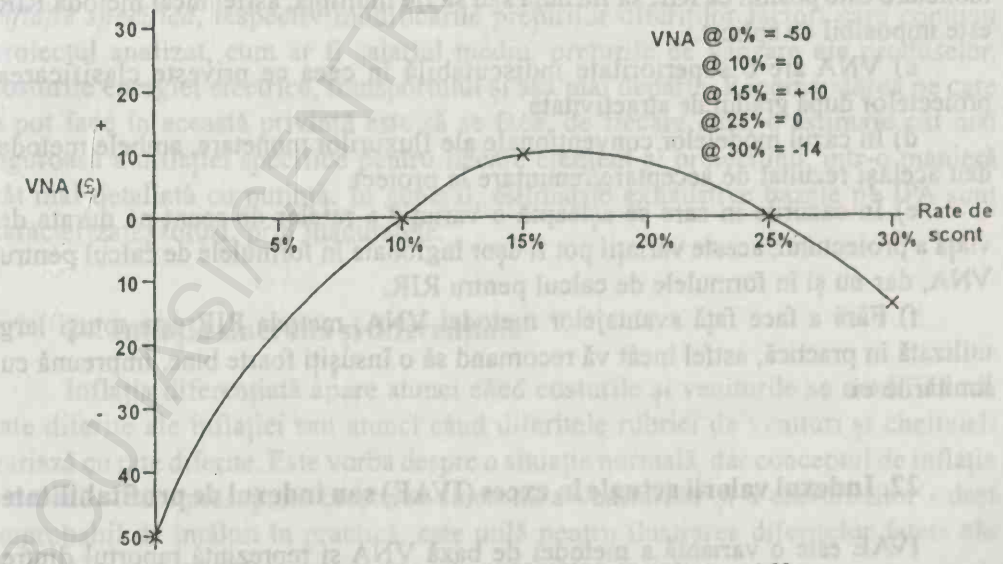


Fig. 28.2. Profilul valorii actuale pentru proiectul X.

La nici un RIR proiectul Y din exemplul 7 este un exemplu de proiect pentru care nu este posibil de calculat o rată reală de recuperare.

Pentru a putea calcula RIR real este necesar să se rezolve introducând un factor notat i în următoarea expresie:

$$+200-\frac{4000}{(1+i)^1}+\frac{4000}{(1+i)^2}=0.$$

Rezolvarea ecuației dă valoarea $i=\sqrt{-1}$ respectiv un număr irațional.

În cazul în care se lucrează cu modele de fluxuri monetare neconvenționale care duc la obținerea mai multor rezultate pentru RIR sau a nici unui rezultat real, aplicarea metodei RIR nu este recomandată.

Metoda VNA în schimb dă rezultate clare, lipsite de ambiguitate, indiferent de modelul fluxului monetar.

Proiectul X de mai înainte are un VNA pozitiv pentru ratele de scont cuprinse între 10% și 25% și VNA negativ pentru valori mai mici și respectiv mai mari ale ratelor de scont decât acestea. Proiectul Y are VNA pozitive pentru orice rată de scont.

21. Rezumatul comparării VNA și RIR

a) Din punct de vedere tehnic, VNA este superior RIR și este mai ușor de calculat.

b) În cazurile în care ne confruntăm cu modele neconvenționale ale fluxurilor monetare este posibil ca RIR să fie nulă sau să fie multiplă, astfel încât metoda RIR este imposibil de aplicat.

c) VNA are o superioritate indiscutabilă în ceea ce privește clasificarea proiectelor după gradul de atractivitate.

d) În cazul modelelor convenționale ale fluxurilor monetare, ambele metode dau același rezultat de acceptare/renunțare la proiect.

e) În cazurile în care se așteaptă o variație a ratelor de scont pe durata de viață a proiectului, aceste variații pot fi ușor înglobate în formulele de calcul pentru VNA, dar nu și în formulele de calcul pentru RIR.

f) Fără a face față avantajelor metodei VNA, metoda RIR este totuși larg utilizată în practică, astfel încât vă recomand să o însușiți foarte bine, împreună cu limitările ei.

22. Indexul valorii actuale în exces (IVAE) sau indexul de profitabilitate

IVAE este o variantă a metodei de bază VNA și reprezintă raportul dintre VNA a proiectului și investiția inițială.

$$IVAE = \frac{VNA}{\text{Investiția inițială}}.$$

Astfel, acest index este o mărime relativă și nu absolută, a profitabilității. Pentru acest motiv, este expus aceloraşi considerente generale ca și cele referitoare la valoarea RIR în privința realizării clasificărilor. IVAE nu este o metodă adecvată pentru clasificarea proiectelor care se exclud reciproc, dar pentru că este o mărime de profitabilitate relativă, poate să fie aplicată atunci când se lucrează cu proiecte divizibile (respectiv componente ale unui proiect de ansamblu care pot fi acordate spre execuție unor diverși antreprenori) și care nu pot fi implementate datorită insuficienței capitalului în perioada curentă. În asemenea împrejurări, proiectele pot să fie clasificate în funcție de IVAE, fiind apoi implementate în funcție de atractivitatea lor, până la epuizarea capitalului disponibil. Dacă proiectele analizate acoperă două sau mai multe perioade pentru care există o limitare a fondurilor financiare, nici IVAE nu poate să fie aplicat. În general, utilizatea IVAE este limitată, și de această dată considerându-se că aplicarea VNA este mai sigură.

23. Inflația și evaluarea investițiilor

O definiție simplă a inflației este: creșterea prețului bunurilor și a serviciilor. Măsura general acceptată în Marea Britanie pentru aprecierea inflației este indexul prețului cu amănuntul (IPA) care se bazează pe modelul acceptat al cheltuielilor pentru o familie medie. Inflația generală este un factor luat în calcul în evaluarea investițiilor, dar un interes mai acut se manifestă în privința a ceea ce se numește *inflație specifică*, respectiv modificările prețurilor diferiților factori care compun proiectul analizat, cum ar fi salariul mediu, prețurile de vânzare ale produselor, costurile energiei electrice, transportului și așa mai departe. Recomandarea pe care o pot face în această privință este să se facă, de fiecare dată, o estimare cât mai riguroasă a inflației specifice pentru fiecare element al proiectului, într-o manieră cât mai detaliată cu putință. În general, estimările exhaustive bazate pe IPA sunt caracterizate, totuși, prin inacurațete.

24. Inflația sincronă și diferențiată

Inflația diferențiată apare atunci când costurile și veniturile se modifică cu rate diferite ale inflației sau atunci când diferitele rubrici de venituri și cheltuieli variază cu rate diferite. Este vorba despre o situație normală, dar conceptul de inflație sincronă - care presupune creșterea sincronă a veniturilor și a cheltuielilor - deși improbabil de întâlnit în practică, este utilă pentru ilustrarea diferitelor fațete ale evaluării proiectelor în ceea ce privește aprecierea inflației.

25. Fluxurile monetare și fluxurile monetare reale

Fluxurile monetare reprezintă sumele propriu-zise de bani care trec dintr-o mână în alta, în timp ce fluxurile monetare reale reprezintă echivalentele puterii de cumpărare ale fluxurilor monetare actuale. Într-o lume cu inflația zero, nu ar fi necesar să se facă o distincție între fluxul monetar și fluxul monetar real, deoarece aceste două noțiuni ar fi identice. Însă acolo unde inflația există și se manifestă, între fluxurile monetare și valoarea lor reală apare o disproporție, care reprezintă tocmai baza pe care se fac apreciérile inflației în evaluările investițiilor.

26. Abordarea inflației

Voi folosi următorul exemplu pentru a ilustra modul în care se poate aborda inflația în domeniul evaluării investițiilor.

Exemplul 8

Un utilaj care elimină lucrul manual are un preț de cost de 60 000£ aducând economii în medie de 24 000£ pe an din salarii, suma fiind exprimată la nivelul actual al salarizării. Durata de funcționare garantată a utilajului este de 3 ani, valoarea sa de casare fiind nulă. Costul de capital al firmei este de 10%.

Să se calculeze VNA pentru acest proiect:

a) pentru inflație zero;

b) pentru un nivel general al inflației de 15% și creșteri salariale corespunzătoare (respectiv este vorba despre inflație sincronă);

c) pentru un nivel general al inflației de 15% și o creștere salarială de 20% pe an (respectiv este vorba despre inflația diferențiată).

Soluția

a) Evaluarea VNA a proiectului pentru inflație nulă:

$$-60\,000 + 24\,000\,A_{3\neg 10\%}$$

$$= -60\,000 + 24\,000 \times 2{,}487 = -312£.$$

∴Proiectul nu este acceptabil, având un VNA negativ față de costul de capital al firmei.

b) Evaluarea VNA a proiectului pentru inflație generală de 15% și creșteri salariale de 15%:

Economii din salarii pe an inflație zero	Economii din salarii pe an inflație de 15%
24 000	27 600
24 000	31 740
24 000	36 501

În absența inflației, rata de scont corespunzătoare era de 10%. În cazul existenței unei inflații cu un nivel mediu de 15%, rata de scont de 10% nu mai este suficientă pentru a aduce flux monetar în diferite momente, sume exprimate în termeni de putere de cumpărare. În absența inflației, 1£ de acum ar însemna practic 1,10£ după o perioadă de 1 an. Cu o rată a inflației de 15%, suma ar fi 1,10£(1,15) = 1,265£, astfel încât rata de scont ar trebui să fie de 26,5%.

VNA a proiectului pentru o inflație sincronă de 15%:

Anul	Fluxul monetar	26 ½ % factori de scontare	Valoarea actuală
0	–60 000	1,000	–60 000
1	+27 600	0,792	21 859
2	+31 740	0,624	19 806
3	+36 501	0,494	18 031
			VNA = –304£

∴Proiectul este inacceptabil.

Se observă că rezultatele pentru cazul cu inflație nulă și pentru inflația sincronă de 15% sunt aproape identice (diferențele datorându-se rotunjirii valorilor luate din tabelele cu trei zecimale).

Această echivalență era de așteptat, deoarece în cazul inflației sincrone, în termeni reali, firma nu ar sta nici mai rău, dar nici mai bine.

c) Evaluarea VNA a proiectului pentru inflație generală de 15% și creșteri salariale de 20% pe an (respectiv este vorba despre inflația diferențiată).

		Salarii pe an
Anul	1	24 000 (1,20) = 28 800£
	2	24 000 $(1,20)^2$ = 34 560£
	3	24 000 $(1,20)^3$ = 41 472£

VNA a proiectului pentru inflație diferențiată

Anul	Fluxul monetar	26 ½ % factori de scontare	Valoarea actuală
0	–60 000	1,000	–60 000
1	+28 800	0,792	22 810
2	+34 560	0,624	21 565
3	+41 472	0,494	20 487
			VNA = +4862£

Se observă, așadar, că în cazul inflației diferențiate *proiectul este acceptabil.* În acest caz, situația convine firmei, deoarece este vorba despre un proiect prin care se înlocuiește forța de muncă manuală, rezultând economii salariale și firma

are cu atât mai mult de câştigat cu cât diferenţa dintre rata inflaţiei şi creşterea salarială medie este mai mare.

Frecvent însă, inflaţia diferenţiată acţionează în defavoarea firmelor, de exemplu prin aceea că costurile cresc mai repede decât preţurile. Fiecare caz este diferit şi impune realizarea unei analize detaliate, individuale - deci nu numai aprecieri generale.

27. Banii şi ratele reale de scontare

Rata de scont de 26,5% obţinută în exemplul 1 reprezenta un factor de scontare a banilor şi a fost aplicată pentru scontarea fluxurilor monetare ale proiectului. Relaţia dintre factorii reali şi factorii de scontare a banilor este următoarea:

$$\text{Factorul real de scontare} = \frac{1 + \text{factorul de scontare a valorii monetare}}{1 + \text{rata inflaţiei}} - 1.$$

Utilizând datele din exemplul 1 se poate calcula factorul real de scontare:

$$\text{Factorul real de scontare} = \frac{1+0{,}265}{1+0{,}15} - 1 = 0{,}1 \text{ respectiv } 10\%.$$

În acest caz, desigur, factorul real de scontare era deja cunoscut, iar calculul de mai înainte a fost făcut numai cu scop ilustrativ.

Factorul real de scontare poate fi utilizat pentru evaluarea investiţiilor cu precizarea că fluxurile monetare trebuie transformate mai întâi în fluxuri monetare reale prin scontarea în funcţie de rata generală a inflaţiei, după cum urmează.

Exemplul 9

Se reia intrebarea c de la exemplul 8, folosindu-se fluxul monetar real şi factorul real de scontare.

Evaluarea fluxului monetar real

Anul	Fluxul monetar	Inflaţia generală pentru factori de scontare de 15%	Fluxul monetar real	Factori de scontare reali de 10%	Valorile actuale
0	–60 000	1,000	–60 000	1,000	–60 000
1	+28 800	0,870	25 056	0,909	22 776
2	+34 560	0,756	26 127	0,826	21 581
3	+41 472	0,658	27 289	0,751	20 494
					VNA=4851£

De aici se observă că (în afara rotunjirilor operate la valorile luate din tabelele cu trei zecimale), cele două metode dau rezultate identice.

Astfel se vede că există două abordări ale evaluării investiţiei în condiţiile existenţei inflaţiei.

Scontarea unică	Fluxul monetar scontat raportat la factorul de scontare a banilor
Scontarea în două etape	Fluxul monetar scontat raportat la rata inflației și apoi fluxul monetar real raportat la factorul real de scontare

Cele două abordări dau același rezultat, deoarece factorul de scontare a banilor are înglobată și o toleranță pentru inflație. Datorită acestui motiv și pentru că fluxul monetar reprezintă cel mai adecvat mediu pentru realizarea estimărilor, se recomandă ca fluxurile monetare să fie scontate pentru un factor de scontare adecvat. Trebuie să acordați o atenție deosebită pentru a nu sconta fluxurile monetare pentru factori reali de scontare sau fluxurile monetare reale pentru factori de scontare a banilor. Dacă într-o problemă fluxurile monetare sunt menționate direct, aveți grijă să nu le scontați decât o singură dată, utilizând un factor real de scontare.

28. Taxele și evaluarea investițiilor

Deoarece taxele determină o modificare a fluxului monetar, ele vor reprezenta un factor important de care trebuie să se țină cont în evaluarea proiectelor de investiții. Pe drept cuvânt, în anumite situații practice, implicațiile taxelor exercită influențe dominante asupra deciziei finale de acceptare sau renunțare la proiectul de investiție analizat. Considerațiile de orice natură ale implicațiilor taxelor nu intră în scopurile acestei lucrări și de aceea le recomand analiștilor să recurgă la specialiștii în domeniul taxelor atunci când se pune problema evaluării proiectelor de investiții din acest punct de vedere. Plata taxelor reduce foarte mult fluxul monetar al unui proiect de investiții și de aceea, în linii mari, analistul trebuie să cunoască nivelul aproximativ al taxelor pe care proiectul analizat le presupune și termenele la care trebuie plătite acestea.

29. Rezumat

a) Decizia de a investi într-un proiect este o decizie pe termen lung și de aceea consumurile și oportunitățile de finanțare trebuie bine echilibrate în timp.

b) Decizia de a face o anumită investiție se ia pe baza mai multor factori, cum ar fi: încrederea investitorului în viitor, alternativele care îi sunt oferite și atitudinea sa în fața riscului.

c) Tehnicile tradiționale de evaluare a investițiilor sunt evaluarea ratei de recuperare a investiției și amortizarea. Ultimele studii statistice au arătat că actualmente amortizarea este tehnica cea mai larg utilizată.

d) Amortizarea reprezintă numărul de perioade de influx monetar care acoperă investiția inițială. Proiectul care este preferat din acest punct de vedere este proiectul cu perioada de amortizare cea mai scurtă.

e) Tehnicile de scontare a fluxului monetar (SFM) operează cu fluxuri monetare în locul profiturilor și ține seama de valoarea în timp a banilor.

f) Formula generală pentru valoarea netă actuală (VNA) este următoarea:

$$VNA = \sum \frac{C_i}{(1+r)^i}$$

și presupunând că este vorba despre un model clasic, proiectul este considerat acceptabil dacă are o *VNA* pozitivă raportată la costul de capital al firmei.

g) *VNA* poate fi interpretat ca fiind creșterea potențială a consumului, care este făcută posibilă de evaluarea proiectului în termenii actuali.

h) Rata internă de recuperare (RIR) reprezintă rata de scont pentru care *VNA* este nulă și poate să fie găsită fie grafic, fie prin intrapolare liniară.

i) În cazul proiectelor de investiții convenționale, VNA și RIR dau același rezultat în privința acceptării sau renunțării la un proiect. VNA reprezintă o mărime absolută, în timp ce RIR reprezintă numai o mărime relativă.

j) VNA este o mărime mai adecvată de măsură pentru a face diferențierea între proiecte care se exclud reciproc și, sub raport general, este superioară din punct de vedere tehnic metodei RIR.

k) Rata de scont utilizată în calculele SFM este cunoscută sub numele de cost de capital.

l) Inflația specifică este de mai mare importanță practică în evaluarea investițiilor, dar inflația diferențiată este mai des întâlnită în practică.

m) Aplicarea teoriei inflației în materie de evaluare a proiectelor de investiții semnifică realizarea distincției între fluxul monetar și fluxul monetar real.

n) Trebuie avute în permanență în vedere nivelul și datele de plată a taxelor.

30. De reținut

a) Se poate discuta mult pe tema dacă existența unui val de oportunități investiționale dintre care se poate opta este mai importantă pentru o firmă decât metoda de evaluare folosită.

b) Un recent sondaj efectuat în legătură cu practicile legate de investițiile de capital ale marilor firme, sondaj condus de dr. R. Pike a condus la concluzia că mai mult de 75% dintre companiile testate utilizează amortizarea drept criteriu de evaluare a investițiilor, de multe ori asociind-o cu alte metode. Același sondaj a arătat că numai 17% dintre companii utilizează VNA ca metodă de evaluare primară, în ciuda cunoscutei superiorități a metodei VNA față de amortizare. Această stare de

fapt pare să sugereze că, în mare parte, interesul academic în domeniul îmbunătățirii metodelor de măsură și evaluare poate să fie greșit direcționat.

c) Evaluarea unei investiții care să se bucure apoi de un succes financiar complet este dependentă pe de-a întregul de acuratețea estimărilor referitoare la costuri și prețuri. Nici o tehnică de evaluare nu poate să depășească neconcordanțele semnificative care apar în privința realizării estimărilor.

Întrebări de autoevaluare. *Numerele dintre paranteze se referă la numerotarea paragrafelor.*

1. De ce sunt importante deciziile de realizare a unei investiții? (2)
2. Definiți evaluarea ratei de recuperare a investiției și enumerați avantajele și dezavantajele sale. (4)
3. Ce reprezintă amortizarea și care este decizia normală în cazul clasificării mai multor proiecte în funcție de acest criteriu? (6)
4. De ce se folosesc fluxurile monetare în calculele de scontare a fluxului monetar și nu profiturile? (9)
5. Care fluxuri monetare pot fi incluse în evaluări? (10)
6. De ce au banii o valoare legată de timp? (11)
7. Definiți VNA și scrieți formula generală. (13)
8. Ce reprezintă valoarea netă finală? (14)
9. Ce reprezintă RIR și cum se calculează? (15 și 16)
10. Care sunt deosebirile majore dintre VNA și RIR? (18)
11. Care sunt problemele pe care le ridică ratele multiple de scont? (19)
12. Ce reprezintă indexul valorii actuale în exces (IVAE) sau indexul de profitabilitate și când poate să fie utilizat cel mai eficient? (22)
13. Ce tip de inflație este cel mai relevant pentru evaluarea investițiilor? (23)
14. Care este metoda generală de includere a inflației în evaluările de investiții? (26)
15. Faceți distincția dintre bani și ratele reale de scont. (27)
16. În ce constă importanța taxelor în domeniul evaluării investițiilor? (28)

Exerciții cu răspunsuri

1. Care este valoarea actuală a următoarelor serii pentru rata scontului de 10% și RIR?

0	1	2	3	4
–2000	+800	+600	+700	+500

2. Să se traseze profilul valorii actuale pentru următorul proiect și să se determine RIR (unic sau multiplu). Este acest proiect acceptabil pentru un cost de capital de 10%?

3. O firmă are în vedere realizarea unui proiect cu o investiție actuală de 1000£ și influxuri anuale pe o durată de 5 ani, de 500£.

	Anul 0	Anul 1	Anul 2
Fluxul monetar	–4000	+10 200	–6300

a) Care este VNA pentru 10%?

b) Care este VNA presupunând că rata generală a inflației este de 8% și se realizează o mărire a fluxurilor anuale de 510£?

Răspunsuri la exerciții

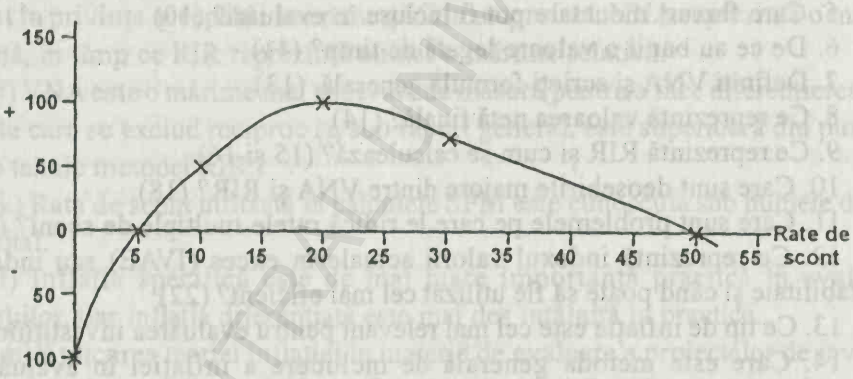
1. VNA @ 10% = $-2.000 + (800 \times 0{,}909) + (600 \times 0{,}826) + (700 \times 0{,}751) +$ $+ (500 \times 0{,}683)$

= 90£ VNA

VNA @ 16% = –410£

$$\therefore \text{RIR} = 10 + 6\left[\frac{90}{230}\right] = 12{,}34\%.$$

2.



RIR 5% și 50%.

Proiectul este acceptabil pentru un cost de capital de 10%.

3. a) VNA @ 10% = 895,5£.

b) Rata de scont pentru un nivel al inflației de 8% = 1,10 (1,08) = 1,188, adică 19%.

∴ VNA pentru serii de câte 5 ani cu costuri de 510£ pe an și venituri de 1000£ este –1000 + 1559 = +559,4£.

Această valoare se compară cu valoarea de la punctul a.

29. EVALUAREA INVESTIȚIILOR – INCERTITUDINEA ȘI RAȚIONALIZAREA CAPITALULUI

1. Obiective

După parcurgerea acestui capitol:

- veți înțelege de ce trebuie să se țină seama de incertitudine în evaluarea investițiilor;
- veți cunoaște metode bazate pe durata de încorporare a inflației în evaluarea investiției;
- veți putea utiliza probabilitățile pentru aprecierea incertitudinii;
- veți ști cum se calculează și se utilizează valoarea estimată;
- veți putea utiliza analiza probabilistică continuă și discretă;
- veți ști cum se conduce o analiză de sensibilitate a unui proiect;
- veți putea evalua riscurile de portofoliu;
- veți înțelege modul în care se face alegerea, selecția proiectelor când există raționalizări ale capitalului pentru perioade unice și multiple.

2. Incertitudinea în domeniul evaluării investițiilor

Incertitudinea este un factor major care trebuie avut în vedere în toate tipurile de tehnici decizionale. În cazul evaluării investițiilor, aceasta este de o importanță cu totul deosebită, datorită duratelor lungi pe care le presupune un proiect de investiție și a nivelului resurselor implicate într-o decizie tipică de investiție.

În general, proiectele nesigure sau riscante sunt acelea pentru care viitoarele influxuri monetare, și de aici recuperarea investiției, este foarte probabil să fie supuse unor variații – cu cât este mai mare această variabilitate, cu atât mai mare este și riscul. Din nefericire, elemente de incertitudine pot exista chiar și în cazurile în care influxurile monetare viitoare sunt cunoscute. De exemplu, în cazul unui acord comercial pe bază de leasing, influxurile monetare viitoare sunt cunoscute, dar pot suferi modificări datorită variației datorită ratei inflației.

Există trei stadii ale procesului de evaluare de ansamblu și de luare a deciziei în care riscul și incertitudinea merită o atenție deosebită:

a) Riscul şi incertitudinea asociate *proiectului individual.*

b) Efectul asupra riscului şi incertitudinii de ansamblu a proiectului pe care îl are activitatea combinată a firmei respective - *efectul de portofoliu.*

c) *Atitudinea faţă de risc a celui care ia decizia realizării investiţiei* şi efectele pe care aceasta le are asupra deciziei finale.

Aceste trei elemente vor fi discutate în cele ce urmează.

3. Incertitudinea şi proiectul individual

În cele ce urmează vor fi descrise o multitudine de metode de evaluare a incertitudinii asociate lansării unui proiect. Obiectivul general al lor constă în încercarea de a cuantifica incertitudinea care înconjoară un proiect prin anumite forme de analiză care trec dincolo de simplul calcul al venitului total estimat a fi realizat de pe urma proiectului. În acest mod se mai furnizează o serie de informaţii, foarte importante pentru hotărârea finală, astfel încât aceasta să fie luată în deplină cunoştinţă de cauză. De asemeni trebuie accentuat faptul că metodele respective nu au ca efect reducerea incertitudinii. Dacă este posibil ca incertitudinea să fie redusă sau eliminată, aceasta nu se poate realiza decât prin intervenţia manageriatului.

Metodele care urmează a fi descrise se pot împărţi în trei grupe:

a) bazate pe timp/durată;

b) bazate pe principii probabilistice;

c) bazate pe analiza sensibilităţii şi a simulărilor.

4. Metode bazate pe timp/durată

Cele trei metode de încorporare a incertitudinii pe baza timpului sau a duratei sunt: amortizarea, premiul de risc şi orizontul finit. Toate aceste metode se bazează pe presupunerea că riscurile presupuse de proiect şi incertitudinea sunt dependente de timp, respectiv cu cât este mai lungă durata proiectului, cu atât acesta este mai nesigur. Deşi este logic să se presupună că incertitudinea creşte adeseori cu timpul, acest lucru nu este nici pe departe universal adevărat, existând o mulţime de proiecte pe termene foarte scurte şi foarte riscante în timp ce altele, pe termene destul de lungi sunt relativ sigure. Cele trei metode vor fi descrise în continuare:

5. Amortizarea

Reprezintă numărul de fluxuri periodice necesare pentru acoperirea investiţiei iniţiale. În afara utilizării amortizării drept criteriu de acceptare/respingere, amortizarea poate să fie utilizată şi ca măsură a riscului, adeseori în asociaţie cu o măsură a scontării fluxului monetar cum ar fi VNA sau RIR. Dacă două proiecte A şi B au

aproximativ același VNA dar A are o durată mai redusă, atunci proiectul A va fi preferat.

Avantaje:

a) Este foarte simplu de calculat.

b) Reprezintă o metodă general acceptabilă și ușor de înțeles.

Dezavantaje:

a) Pornește de la premiza că incertitudinea este doar o funcție de timp/durată.

b) Pornește de la premiza că fluxurile monetare din perioada de amortizare sunt sigure.

c) Pornește de la o ipoteză unistratificată – incertitudinea este o funcție de timp – și nu este luată în calcul variabilitatea fluxurilor monetare estimate pentru proiectul care este evaluat.

6. Premiul de risc

În anumite situații, rata de scont este mărită dincolo de nivelul costului de capital, în încercarea de a reduce riscurile proiectului. Procentele suplimentare sunt numite *premiu de risc*. Asemenea rate de scont supradimensionate coboară limita de acceptabilitate a proiectelor, tratează riscul în continuare ca pe o funcție de timp, scontând supraevaluat fluxurile monetare viitoare, așa cum voi demonstra în exemplul următor.

Exemplul 1

În tabelul 29.1 este reprezentat fluxul monetar al unui proiect. Costul de capital este de 10% și deoarece proiectul este considerat riscant, la rata de bază se mai adaugă un premiu de 5%. Efectele celor două rate de scont sunt și ele reprezentate.

Tabelul 29.1

Anul	0	1	2	3	4	5	VNA
Fluxuri monetare estimate	-10.000	-2.000	-3.000	-2.500	-3.000	-3.500	
Factori de scont (10%)	1.000	0.909	0.826	0.751	0.683	0.621	
Valoarea proiectului @10%	-10.000	1.818	2.478	1.877	2.049	2.173	-395
Factori de scont (15%)	1.000	0.870	0.756	0.658	0.572	0.495	
Valoarea proiectului @15%	-10.000	1.740	2.268	1.645	1.716	1.732	-899
Reducerea procentuală a valorii proiectului produsă de premiul de risc		4%	8%	12%	16%	20%	

Linia inferioară a tabelului arată creşterea progresivă a ratei scontului fluxurilor monetare viitoare, fapt care demonstrează că utilizarea premiului de risc stabileşte din nou o relaţie între incertitudine şi intervalul de timp.

Avantajele premiului de risc:

a) Este foarte simplu de aplicat.

Dezavantajele premiului de risc:

a) Porneşte de asemeni de la ipoteza că incertitudinea este o funcţie de timp.

b) Pornindu-se de la această ipoteză pentru toate proiectele, nu sunt luate în calcul caracteristicile particulare ale fiecărui proiect şi nici nu se ţine cont de variabilitatea fluxurilor monetare ale proiectului.

c) Apare problema aprecierii unui nivel adecvat al premiului de risc. Ar trebui ca acesta să fie acelaşi pentru toate proiectele sau ar trebui ajustat pentru fiecare proiect în parte?

Notă. Una dintre teoriile legate de profit spune că acesta este recompensa pentru asumarea unor riscuri pe care nimeni nu poate să le asigure. Dacă acest lucru este corect şi dacă asumarea riscurilor implică şi o oarecare intuiţie, rezultă că un efect mai subtil şi pe termen mai lung al utilizării premiului de risc este acela că firma va tinde către un portofoliu de proiecte care, deşi pot avea potenţiale de randament şi eficienţă semnificative, sunt însoţite şi de riscuri semnificative - acesta fiind efectul opus celui vizat.

7. Orizontul finit

În această metodă, care este cel mai simplu de aplicat dintre toate, rezultatele proiectului care depăşesc o anumită perioadă de timp (de exemplu 10 ani) sunt ignorate. Astfel, toate proiectele sunt evaluate pe aceeaşi perioadă de timp.

Avantaje:

a) Simplitatea.

Dezavantaje:

a) Stabilirea oricărui orizont de timp este pur arbitrară. Proiectele variază în ceea ce priveşte duratele de timp şi acest lucru trebuie să fie reflectat în evaluare.

b) Fluxurile monetare ale proiectului pentru orizontul de timp ales sunt considerate sigure.

c) Cu această metodă nu se ia în considerare în mod explicit variabilitatea fluxurilor monetare.

8. Rezumatul metodelor bazate pe timp/durată utilizate pentru evaluarea incertitudinii

Aceste metode sunt simplu de aplicat şi necesită un volum redus de calcule. Însă în cea mai mare parte sunt arbitrare şi nu li se poate acorda un credit prea mare.

Deși în mod evident incertitudinea tinde să crească cu timpul, între cele două mărimi nu există o relație clară, metodele bazate pe timp/durată nereușind să examineze caracteristicile proiectelor individuale și se bazează pe câteva ipoteze de lucru considerate valabile în toate cazurile. Scopul fundamental al evaluării investițiilor constă în realizarea unor distincții între proiecte, iar acceptarea unor ipoteze general valabile este mai degrabă de natură să mascheze decât să pună în evidență diferențele existente între oportunitățile de investiții avute în vedere.

9. Metodele de evaluare a incertitudinii bazate pe probabilități

Metodele pe care le voi prezenta în continuare pornesc de la presupunerea că se pot realiza estimări realiste ale probabilităților subiective asociate pentru diferite fluxuri monetare. De exemplu, un analist de proiect poate să îi ceară unui manager să facă trei estimări pentru fluxurile monetare pe o perioadă dată (respectiv estimarea optimistă, estimarea cea mai probabilă și estimarea pesimistă) în locul uneia singure și în plus să-i ceară managerului să aprecieze probabilitatea îndeplinirii fiecăreia dintre aceste trei estimări. Dând curs unei asemenea solicitări, managerul poate să facă următoarele estimări:

Fluxul monetar pentru perioada X

Estimarea optimistă	8000£	Cu probabilitatea de 10% (0,1)
Estimarea cea mai probabilă	4500£	Cu probabilitatea de 65% (0,65)
Estimarea pesimistă	3000£	Cu probabilitatea de 25% (0,25)

Estimările astfel obținute constituie o distribuție probabilistică a fluxurilor monetare. Rezultă că dacă se așteaptă variații ale fluxurilor individuale, întregul venit al proiectului poate să varieze. Obiectivul principal al metodelor bazate pe probabilități este acela de a stabili variațiile cele mai probabile ale rezultatului, indiferent că este vorba despre VNA sau RIR, datorită estimării variațiilor fluxurilor monetare. În acest mod, efectele incertitudinii sunt mai clar prezentate și este îndreptățită încrederea în luarea unei decizii în cunoștință de cauză. Cele trei metode pe care le voi descrie și care se bazează pe probabilități subiective sunt: valoarea estimată, analiza probabilistică discretă și analiza probabilistică continuă.

10. Valoarea estimată (VE)

Această metodă a fost prezentată în detaliu anterior. Vă amintiți că VE reprezintă produsul probabilității și al valorii și VE poate fi utilizată pentru aprecierea fluxurilor monetare individuale sau pentru evaluarea VNA a proiectului. Următorul exemplu vă ilustrează această tehnică.

Exemplul 2

Fluxul monetar și estimarea probabilistică pentru un proiect sunt prezentate mai jos. Calculați:

a) valoarea estimată a fluxurilor monetare pentru fiecare perioadă;

b) valoarea estimată a VNA pentru cazul în care investiția inițială în proiect este de 11 000£ iar costul de capital este de 15%.

Fluxul monetar și estimarea probabilistică

	Probabilitatea	Fluxul monetar			
		Perioada			
		1	2	3	4
	£	£	£	£	
Varianta optimistă	0,3	5000	6000	4500	5000
Varianta cea mai posibilă	0,5	3500	4000	3800	4500
Varianta pesimistă	0,2	3200	3600	3100	4000
Valoarea estimată a fluxului monetar		3890	4520	3870	4550

Valoarea estimată pentru VNA se află prin scontarea valorii estimate a fluxului monetar după metoda clasică.

$$\text{VNA estimată} = -11\,000 + (3890 \times 0{,}870) + (4520 \times 0{,}756) + (3870 \times 0{,}658) + (4550 \times 0{,}572)$$
$$= 950£.$$

Avantajele și dezavantajele metodei valorii estimate ca criteriu decizional au fost deja trecute în revistă și considerentele anterioare se aplică în mod egal și utilizării VE în evaluarea investițiilor. Merită însă să fie repetat faptul că VE, în ciuda limitărilor care o marchează, este regula decizională care ar trebui să fie în mod normal aplicată cu excepția, bineînțeles, a cazurilor în care problemele contraindică această metodă.

11. Analiza probabilistică discretă (APD)

APD poate fi considerată a fi o extensie a procedurii de aplicare a VE descrisă anterior. Din punctul de vedere al bazelor de calcul, necesită estimări similare ale fluxurilor monetare și probabilitățile asociate, dar în loc să utilizeze mediile acestor estimări, această tehnică operează cu părțile componente ale acestor estimări pentru a evidenția diferitele rezultate și probabilitățile posibile. Următorul exemplu va ilustra această tehnică.

Exemplul 3

VNA pentru exemplul 2 a fost de 950£ iar managerul a considerat această valoare ca fiind cumva marginală și dorește evaluarea veniturilor posibile.

Aprofundarea investigațiilor relevă faptul că sunt posibile două costuri de capital; 11 000£ așa cum apare chiar în datele problemei, cu o probabilitate de 0,8 și 15 000£ cu o probabilitate de 0,2.Acest rezultat reprezintă o nouă estimare a VNA

de +150£ pentru o nouă valoare de capital estimată la 11 800£. Întreaga gamă de venituri și probabilități este reprezentată în tabelul 29.2.

Tabelul 29.2

		Costul de capital cel mai probabil $P = 0,8$ 11 000£		Costul de capital pesimist $P = 0,2$ 15 000£	
Fluxurile monetare optimiste	$P = 0,3$	3.707	(0,24)	–293	(0,06)
Fluxurile monetare cele mai probabile	$P = 0,5$	143*	(0,4)	–3.857	(0,1)
Fluxurile monetare pesimiste	$P = 0,2$	–1.167	(0,16)	–5.167	(0,04)

Acest tabel cuprinde VNA rezultate pentru fiecare combinație posibilă a estimărilor originale ale fluxurilor monetare și ale costurilor de capital și dă probabilitatea de realizare a acestei combinații. De exemplu, celula marcată cu * este calculată după cum urmează:

Valoarea actuală a celui mai probabil flux monetar = 11 143£.
minus costul de capital cel mai probabil –11 000£.
VNA = 143£.

Această combinație are o probabilitate de realizare de 0,5× 0,8 = 0,4.

Din tabelul 29.2 se observă că venitul este cuprins între 3707£ și –5167£, probabilitatea de înregistrare a unei pierderi fiind de 16 + 0,1 + 0,04 = 16,14 sau, invers, probabilitatea de a se obține un venit nul este de 0,64.

În acest moment, manageriatul are la dispoziție mai multe informații în vederea luării unei decizii.

Avantajele APD.

a) Este o tehnică ușor de aplicat și de înțeles.

b) Dă într-o anumită măsură indicații referitoare la plaja de venituri posibile de realizat, împreună cu probabilitatea de realizare.

c) Ia în considerare variațiile detaliate ale fluxurilor monetare și ale investițiilor necesare pentru realizarea unui proiect, în locul formulării unei ipoteze general valabile, cum ar fi aceea că incertitudinea este o funcție de timp.

Dezavantajele APD.

a) Operează cu estimări discrete în timp ce distribuția continuă poate constitui o reprezentare mai bună a unui anumit proiect.

b) Mărește numărul de estimări subiective care trebuie formulate.

12. Analiza probabilistică continuă (APC)

APC are același obiectiv general ca și APD care a fost descrisă anterior. Acesta este: punerea în evidență a variabilității venitului realizat din proiect care poate rezulta din variabilitatea fluxurilor monetare, prin aceasta dându-i-se analistului posibilitatea de a face estimări ale probabilităților de realizare a diferitelor venituri. Această tehnică diferă de APD prin faptul că se utilizează distribuțiile continue și diferite aspecte ale teoriei statistice în locul estimărilor discrete, care reprezintă principala trăsătură a APD.

Analiza probabilistică discretă poate fi reprezentată cu ajutorul diagramelor din fig. 29.1.

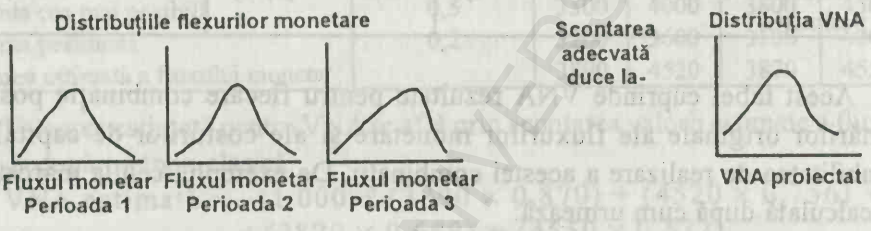


Fig. 29.1

Pentru a putea combina distribuțiile așa cum s-a arătat și pentru a putea face afirmații probabilistice referitoare la veniturile ce se pot realiza din proiect, este necesar ca mai întâi să se stabilească media (sau valoarea cea mai probabilă) precum și o măsură a dispersiei pentru fiecare dintre fluxurile monetare periodice.

13. Stabilirea mediilor și a dispersiei fluxurilor monetare

În general, estimarea mediei fluxurilor monetare pe perioade nu este o problemă foarte dificilă, fiind echivalentă cu alegerea valorii celei mai probabile. O problemă mai importantă însă, constă în stabilirea unei măsuri adecvate a variabilității sau a dispersiei pentru fluxurile monetare periodice. Cea mai utilă măsură pentru scopurile statistice este reprezentată de deviația standard, dar invariabil există prea puține date pentru a se calcula deviația standard în modul convențional, astfel încât este necesară adoptarea unei forme de estimare subiectivă.

Aceasta se poate realiza după cum se prezintă în continuare:

Se presupune că cea mai probabilă valoare pentru fluxul monetar pe o perioadă dată a fost estimat la 30 000£, afirmându-se în același timp că este posibil să se manifeste și o anumită variabilitate.

Managerilor responsabili pentru această estimare li se poate pune o întrebare de următorul tip:

„Știindu-se că valoarea cea mai probabilă a fluxului monetar este de 30 000£, în ce limite vă așteptați să se afle fluxul monetar în 50% din timp?"

Să presupunem că răspunsul la aceasta întrebare este 25 000£ până la 35 000£.

Se știe din tabelele suprafeței normale (v. tabelul I) că 50% din distribuție se află în limitele $(\pm)(2/3)\sigma$ (cu aproximație)

$$\therefore 10\,000£ \text{ (adică } 35\,000 - 25\,000) = 2/3\ \sigma.$$

$$\therefore \hat{s} \approx 7500£.$$

O alternativă la întrebarea formulată mai sus ar fi următoarea: „Care sunt limitele fluxurilor monetare estimate?"

Dacă managerul cunoaște bine situația, vă va răspunde „7500£ până la 52 500£".

Se știe că distribuția normală, în întregul ei, se află în intervalul $(\pm)3\sigma$ (aproximativ). Prin urmare, estimarea deviației standard ar trebui să fie :

$$\sigma = \frac{52\,500 - 7500£}{6} = 7500£.$$

Este evident că procesul de estimare prezentat mai înainte este schematic și că îi lipsește rigoarea statistică. Cu toate acestea, estimarea subiectivă reprezintă un aspect care nu poate să fie evitat în nici o evaluare a unei investiții, această procedură dând posibilitatea formării unei idei în privința probabilității de realizare a diferitelor venituri.

După obținerea estimărilor mediilor și deviațiilor standard, acestea trebuie combinate pentru a obține media și deviația standard a valorii nete actuale de ansamblu a proiectului.

14. Combinarea mediilor și a deviațiilor standard ale fluxurilor monetare

Obținerea mediei VNA a proiectului nu constituie o problemă complicată. Aceasta reprezintă media sau cele mai probabile valori ale fluxurilor monetare scontate în maniera cunoscută. Deviația standard a proiectului se obține prin combinarea deviațiilor standard scontate ale fluxurilor monetare individuale, folosindu-se ceea ce se numește *suma statistică*.

Deviația standard nu poate să fie combinată direct, dar este posibil să îi fie adăugate variații, iar când se procedează în acest mod se ia rădăcina pătrată a rezultatului, stabilindu-se astfel deviația standard a VNA a aproiectului:

$$\therefore \sigma^2_{VNA} = \sum \left[\frac{\sigma_i}{1+r^i} \right]^2,$$

unde σ_i reprezintă deviația standard a fluxurilor monetare individuale.

$$\therefore \sigma^2_{VNA} = \sum\left[\frac{\sigma_i}{1+r^{i2}}\right].$$

$$\sigma_{VNA} = \sqrt{\sum\left[\frac{\sigma_i^2}{1+r^{i2}}\right]}.$$

Această formulă este utilizată în cadrul exemplului următor.

Exemplul 4

Media și deviația standard a fluxurilor monetare ale unui proiect sunt date mai jos și se cere să se calculeze:

a) VNA a proiectului (respectiv media);

b) variabilitatea VNA a proiectului (respectiv sVNA);

c) probabilitatea de obținere a unei

- *VNA negative*
- *VNA egale cel puțin cu 20 000£.*

Se poate face presupunerea că fluxurile monetare pentru fiecare perioadă sunt independente, respectiv variațiile unei perioade sunt independente de variațiile altor perioade și costul de capital este de 10%.

Fluxurile monetare ale proiectului

Perioada	0	1	2	3	4	5
Fluxul monetar net (valoarea cea mai probabilă)	–200 000	+55 000	+48 000	+65 000	+70 000	+40 000
Variabilitatea estimată (deviația standard a fluxului monetar)	0	4000	4500	3500	4500	3000
Factori de scontare @ 10%, cost de capital	1,00	0,909	0,826	0,751	0,683	0,621

Soluția

a) VNA a proiectului este obținută în modul uzual, respectiv

$$-200\,000 + (55\,000 \times 0{,}909) + (48\,000 \times 0{,}826) + (65\,000 \times 0{,}751) + (70\,000 \times 0{,}683) + (40\,000 \times 0{,}621)$$

$\therefore$ VNA a proiectului (respectiv media) = 11 108£.

b) Deviația standard a VNA se obține prin introducerea diverselor estimări ale deviațiilor standard ale fluxurilor monetare în formulă, respectiv

$$\sigma_{VNA} = \sqrt{\sum\left[\frac{4000^2}{(1+0{,}1)^2} + \frac{4500^2}{(1+0{,}1)^4} + \frac{3500^2}{(1+0{,}1)^6} + \frac{4500}{(1+0{,}1)^8} + \frac{3000^2}{(1+0{,}1)^{10}}\right]}$$

$\therefore \sigma_{VNA} = 6847$£.

BCU ACADEMIA DE STUDII ECONOMICE LIBRARY

Se observă că ridicarea la pătrat a numitorului impune factori de scontare pe 2, 4, 6, 8 și 10 ani în locul intervalelor obișnuite de 1, 2, 3, 4 și 5 ani.

c) Probabilitatea de obținere a unei VNA negative (sau probabilitatea de obținere a oricărei valori a VNA) se obține prin metoda statistică standard a suprafeței normale, respectiv se caută scorul „Z" sau variația standardizată, obținându-se o probabilitate rezultantă din tabelul suprafețelor normale (tabelul I), după cum urmează:

$$Z = \left| \frac{£11108 - 0}{6.847} \right|$$
$$= 1{,}622$$

și din tabele se obține pentru probabilitatea ca VNA să fie mai mare decât zero valoarea de 0,947 (respectiv 0,5+0,4474), cu alte cuvinte există o șansă de aproximativ 5,3% (1-0,9474) de obținere a unei valori negative a VNA.

Probabilitatea obținerii unei VNA de cel puțin 20 000£ se obține dintr-un proces asemănător.

$$Z = \left| \frac{20\,000 - 11108}{6847} \right|$$
$$= 1{,}299$$

și apelând la tabele obținem pentru probabilitatea realizării unei VNA de cel puțin 20 000£, o valoare de 9,7.

Distribuția VNA a proiectului poate să fie și ea reprezentată pe o diagramă, ca în fig. 29.2.

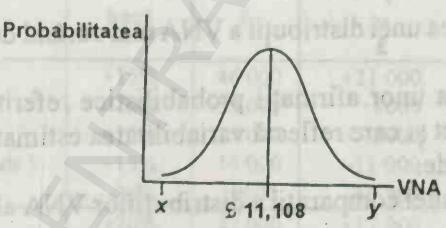


Fig. 29.2. Distribuția probabilistică a proiectului.

Punctul x de pe diagramă reprezintă aproximativ 11 108£ – (3×6847)= –9433£.
Punctul y de pe diagramă reprezintă aproximativ 11 108£ + (3×6847) = 31 649£.

15. Compararea proiectelor pe baza APC

După calcularea mediilor și a deviațiilor standard ale diferitelor proiecte aflate în discuție, acestea pot fi comparate relativ simplu. Distribuțiile pot fi reprezentate pe același grafic și examinate apoi vizual, sau se poate calcula variabilitatea relativă a distribuțiilor pe baza coeficienților de variație.

Coeficientul de variație se obține după cum urmează:

$$\text{Coeficientul de variație} = \frac{\sigma}{x} 100\%.$$

De exemplu, se obțin rezultatele:

Proiectul A	Media = 80 000£	Deviația standard = 12 500£
Proiectul B	Media = 130 000£	Deviația standard = 17 500£

Care sunt coeficienții de variație și care este proiectul cel mai puțin riscant?

$$\text{Coeficientul de variație A} = \frac{12\,500}{80\,000} \times 100\% = 15{,}6\%.$$

$$\text{Coeficientul de variație B} = \frac{17\,500}{13\,000} \times 100\% = 13{,}5\%.$$

∴Proiectul B este cel mai puțin riscant, în ipoteza că deviația standard este o măsură rezonabilă a gradului de risc al unui proiect.

16. Rezumat la APC

Analiza prezentată anterior poate fi dezvoltată pentru a acoperi situații în care proiectele nu sunt independente și/sau distribuțiile individuale nu sunt normale sau asimilabile normalului. Toate metodele au același obiectiv general și anume obținerea mediei și a variabilității (gradului de risc) a VNA a proiectului.

Avantajele APC:

a) Conduce la obținerea unei distribuții a VNA mai curând decât a unei singure valori.

b) Permite formularea unor afirmații probabilistice referitoare la veniturile care se pot realiza din proiect și care reflectă variabilitatea estimată pentru fluxurile monetare ale fiecărei perioade.

c) Permite realizarea unei comparații a distribuțiilor VNA ale proiectelor care trebuie comparate.

d) Pornește de la ipoteze mai realiste, bazate pe valori continue în locul valorilor discrete.

Dezavantajele APC:

a) Introduce încă un element de estimare subiectivă.

b) Este mai complexă decât APD, astfel încât există riscul de a nu fi bine înțeleasă și utilizată de către cei îndreptățiți să ia decizii.

17. Analiza de sensibilitate

Aceasta reprezintă un mod practic de evidențiere a efectelor incertitudinii prin intermediul valorilor variabile ale factorilor cheie (ca de exemplu volumul

vânzărilor, prețurile, rata inflației, costul unității de produs), punând în evidență în același timp și efectele asupra proiectului în ansamblul său. Obiectivul constă în depistarea factorilor care influențează proiectul în cea mai mare măsură. După ce aceste obiective sunt îndeplinite, este rândul managerului să stabilească dacă proiectul este viabil, cunoscându-se sensibilitatea unuia sau mai multor factori cheie. Se va vedea că această metodă nu impune realizarea unor estimări probabilistice subiective și nici a unor estimări ale veniturilor posibile de realizat, încercând să ofere datele pe baza cărora se pot construi judecăți de valoare. Metoda este ilustrată prin intermediul următorului exemplu.

Exemplul 5

Se presupune că un proiect (pentru care se folosesc estimări unice) are VNA pozitivă de 25 000£ la o rată de scont de 10%. Această valoare poate fi calculată prin metoda cunoscută utilizându-se în acest scop valori particulare pentru volumul vânzărilor, prețurile de desfacere, costurile pe unitatea de produs, rata inflației, durabilitatea proiectului etc.

Odată obținută valoarea de bază (respectiv 25 000£ a VNA) se poate realiza analiza de sensibilitate prin deplasarea în sus și în jos, pe rând, a fiecăruia dintre factori.

Un rezumat al rezultatelor analizei de sensibilitate pentru proiectul menționat este reprodus în tabelul 29.3.

Tabelul 29.3

A Elementul variabil	B Variația față de bază	C VNA revizuit £	D Creșterea+ descreșterea – £	E Variația procentuală	F Factorul de sensibilitate, adică E/B
Vânzări	+15%	46 000	+21 000	84	5,6
Volumul	+10%	33 000	+8000	32	3,2
(Valoarea de bază	–10%	17 000	–8000	32	3,2
8.000 de unități în perioada 1	–15%	14 000	–11 000	44	2,9
8.500 în perioada 2 etc.)	–20%	9000	–16 000	64	3,2
Vânzări	+20%	42 000	+17 000	68	3,4
Prețul	+10%	31 000	+6000	24	2,4
(Valoarea de bază	–10%	17 000	–8000	32	3,2
6£ unități în perioada 1	–15%	11 000	–14 000	56	3,73
6,250£ în perioada 2etc.)	–20%	2000	–23 000	92	4,6
Cost/unitate	+25%	–12 000	–37 000	148	5,9
(Valoarea de bază	+10%	6000	–19 000	76	7,6
2,50£ în perioada 1	–5%	34 000	+9000	36	7,2
2,60 £ în perioada 2 etc.)	–10%	47 000	+22 000	88	8,8

Dintr-o asemenea analiză pot fi identificate elementele cele mai sensibile. Odată realizată această identificare, se poate continua analizarea și studierea acestor factori, încercându-se să se stabilească în ce măsură variabilitatea este posibilă și intervalele de valori estimate, astfel încât să se poată lua o hotărâre justificată de acceptare sau de renunțare la proiectul respectiv.

Avantajele analizei de sensibilitate:

a) Arată care sunt efectele asupra rezultatelor aplicării proiectului ale variațiilor diferitelor elemente care intră în compunerea proiectului (respectiv vânzări, costuri etc.).

b) Este o metodă în principiu simplă.

c) Permite identificarea celor mai sensibile variabile.

Dezavantajele analizei de sensibilitate:

a) Nu dă nici o indicație în privința probabilității de producere a variațiilor respective.

b) Este o metodă mai laborioasă din punctul de vedere al calculelor necesar de efectuat.

c) Nu ia în considerare decât efectele unei singure variații într-un moment dat (respectiv nu permite realizarea de combinații ale diferitelor variații), ceea ce constituie o trăsătură nerealistă.

18. Riscul și efectul de portofoliu

Până în acest moment, în acest capitol am studiat riscurile asociate oricărui proiect, în condițiile în care proiectul ar fi complet izolat de orice altă activitate. Aceasta constituie, desigur, o chestiune de o deosebită importanță, dar este evident faptul că de o și mai mare importanță pentru firmă este riscul de ansamblu generat de totalitatea proiectelor în curs de desfășurare, acestea putând fi reunite sub titlul generic de portofoliul de proiecte.

Efectele pe care le au asupra firmei riscurile proiectelor izolate pot fi diminuate sau, dimpotrivă, amplificate, în cazul în care se analizează riscul de portofoliu. Un exemplu simplu ar fi acela al unei firme care operează într-o industrie ciclică, realizând recuperări variabile (respectiv riscante) ale investițiilor de capital din proiectele în curs de desfășurare. Să presupunem că se are în vedere lansarea unui nou proiect care, deși având un caracter variabil sau riscant, se consideră că va urma un model ciclic diferit de celelalte operații în curs de desfășurare. Atunci când operațiunile în curs de desfășurare prezintă un nivel de activitate mai redus, se așteaptă ca noul proiect să aibă un nivel de activitate substanțial, astfel încât riscul total de portofoliu al firmei, inclusiv noul proiect, să fie minimizat. Acesta este, bineînțeles, un motiv major pentru care firmele își diversifică operațiunile.

Analiza acestui aspect al riscului și incertitudinii a fost dezvoltat pentru portofoliile de investiții de pe piața bursieră de Makowitz și alții. La baza acestei analize există o multitudine de ipoteze restrictive, motiv care determină anumite dificultăți în aplicarea ei în cazul proiectelor investiționale la nivelul unei firme, dar raționamentul general care stă la baza sa este perfect valabil și este de o importanță considerabilă.

19. Evaluarea riscului de portofoliu

Metoda generală de evaluare a nivelului până la care riscurile implicate de proiectul sau proiectele propuse se adaugă sau se scad din riscul total al activităților în curs de desfășurare constă în calcularea covariației dintre recuperarea investiției de capital din proiectul sau proiectele respective și recuperarea investițiilor de capital din activitățile în curs de desfășurare. Aceste covariații sunt utilizate apoi pentru obținerea coeficientului de corelație dintre recuperarea investiției de capital din proiectul nou lansat și recuperarea investițiilor de capital din activitățile în curs de desfășurare.

Interpretarea coeficienților de corelare este următoarea:

Coeficientul de corelare = –1, riscurile sunt complet neutralizate.
= 0, riscul rămâne nemodificat.
= +1, riscul este amplificat.

Exemplul următor permite ilustrarea metodei generale.

Exemplul 6

O firmă care posedă un capital de investiție de 100 000£ are în vedere două proiecte, X și Y, fiecare dintre ele necesitând o investiție de capital de 100 000£. Recuperarea investiției de capital din cele două proiecte care se află în curs de evaluare și din operațiunile în curs de desfășurare, în trei situații preconizate ale pieței de desfacere sunt prezentate în tabelul 29.4, alături de deviațiile standard calculate ale recuperării capitalului investit, respectiv măsura riscului acceptat de către firmă.

Tabelul 29.4

Situația pieții	I	II	III
Probabilitatea stării pieței	0,3	0,4	0,3
Rata de recuperare pentru proiectul X	20%	20%	–12/3 %
Deviația standard a recuperării pentru proiectul X = 22%			
Rata de revenire pentru proiectul Y	–2%	15%	27%
Deviația standard a recuperării pentru proiectul Y = 15%			
Rata de recuperare a operațiilor în curs	–9%	18 1/4 %	28%
Deviația standard a recuperării pentru operațiile în curs			

Firma consideră că riscul și recuperarea investiției de capital pentru operațiunile în curs de desfășurare sunt similare în condițiile pieței luate pe ansamblu și că o estimare rezonabilă a ratei dobânzii pentru care riscurile sunt eliminate este de 8%. Care dintre cele două proiecte de investiții propuse (presupunând că există unul care să justifice lansarea) ar trebui inițiat și de ce?

Soluția

Prima etapă constă în calculul estimării recuperării capitalului investit pentru proiectele *X* și *Y* și celelalte proiecte în curs de desfășurare.

Estimarea recuperării capitalului investit se notează cu R'.

Proiectul *X*	$R'_x = (0{,}20 \times 0{,}3) + (0{,}20 \times 0{,}4) + (-0{,}01667 \times 0{,}3)$	$= 0{,}135$
		$= 13{,}5\%$
Proiectul *Y*	$R'_y = (-0{,}20 \times 0{,}3) + (0{,}15 \times 0{,}4) + (0{,}27 \times 0{,}3)$	$= 0{,}135$
		$= 13{,}5\%$
Operațiunile în curs de desfășurare	$R'_0 = (-0{,}09 \times 0{,}3) + (0{,}1825 \times 0{,}4) + (0{,}28 \times 0{,}3)$	$= 0{,}13$
		$= 13\%$

Se observă că estimările recuperării investițiilor pentru proiectele *X* și *Y* sunt identice și având în vedere că deviația standard pentru proiectul *Y* este mai redusă decât pentru proiectul *X*, rezultă că proiectul *Y* va fi preferat in condițiile în care analiza s-ar realiza ca și cum ar fi izolat de celelalte operațiuni curente ale firmei.

Totuși, aceasta este o abordare prea superficială a analizei și se impune, în concluzie, aprofundarea analizei acestuia, în condițiile în care acest proiect este suprapus peste activitatea curentă a firmei – respectiv, în cazul în care proiectul respectiv este adăugat portofoliului existent al firmei.

Riscul unui proiect poate să fie împărțit în două elemente: *riscuri sistemice* și *riscuri nesistemice*.

Riscul nesistemic este riscul indus de diversificare și el poate să fie redus sau eliminat în cazul în care proiectul devine parte a unui portofoliu adecvat. Riscul sistemic reprezintă proporția din riscul total care nu poate să fie eliminat (el aplicându-se la nivelul întregii economii sau al pieței în ansamblul ei), astfel încât recuperarea capitalului investit în proiectul aflat în analiză trebuie să fie apreciată prin prisma acestui element rezidual.

Se poate aplica analiza de portofoliu pentru aflarea nivelului minim de recuperare a capitalului investit în cazul fiecăruia dintre proiectele *X* și *Y* în parte, având în vedere nivelurile lor de risc, prin calcularea covariațiilor dintre recuperarea capitalului investit în cazul proiectului analizat și recuperarea capitalului investit în cazul operațiilor aflate în curs de desfășurare, după care valorile obținute sunt utilizate pentru calcularea coeficienților de corelare după cum urmează:

	$(R_x - R'_x)^*$	×	$(R_0 - R'_0)^*$	×	Probabilitatea stării pieței	=	Covariația
Starea I	0,065	×	–0,22	×	0,3	=	–0,00429
Starea II	0,065	×	0,0525	×	0,4	=	0,001365
Starea III	–0,15167	×	0,15	×	0,3	=	–0,00682
					Covariația	=	–0,009745

* Aceste valori se află prin deducerea valorii calculate a evaluării recuperării capitalului investit R' din valoarea obținută din tabelul 29.4. De exemplu, valoarea –0,15167 se obține după cum urmează: (–0,01667 – 0,135) = –0,15167.

Valoarea covariației este utilizată în continuare pentru aflarea coeficientului de corelare dintre recuperarea capitalului investit în proiect și recuperarea capitalului investit în operațiunile aflate în curs de desfășurare (0).

$$\text{Coeficientul de corelare între X și 0} = \frac{\text{covariația}\,(x,0)}{\sigma_x \cdot \sigma_0} = \frac{-0{,}009745}{0{,}22 \times 0{,}18}.$$

$$\therefore \text{Corelația}\,(x,0) = +0{,}246.$$

Covariația dintre recuperarea capitalului investit în proiectul Y (R_y) și recuperarea capitalului investit în total de companie (R_0):

	$(R_y - R'_y)^*$	×	$(R_0 - R'_0)^*$	×	Probabilitatea stării pieței	=	Covariația
Starea I	–0,155	×	–0,22	×	0,3	=	0,01023
Starea II	0,015	×	0,0525	×	0,4	=	0,000315
Starea III	0,135	×	0,15	×	0,3	=	–0,006075
					Covariația	=	+0,01662

$$\text{Coeficientul de corelare între Y și 0} = \frac{\text{Covariația}\,(y,0)}{\sigma_x \cdot \sigma_0} = \frac{+0{,}01662}{0{,}15 \times 0{,}18}.$$

$$\therefore \text{Corelația}\,(x,0) = +0{,}615.$$

Aceste valori pot fi utilizate pentru calcularea recuperării capitalului investit în proiectele X si Y, știindu-se că rata fără risc este de 8% și este notată (R_F).

$$\text{Recuperarea capitalului investit în proiectul X} = R_F + \frac{R_0 - R_F}{\sigma_0} \cdot \sigma_x \cdot \text{corelația}_{(x,0)}$$

$$= 0{,}08 + \frac{0{,}13 - 0{,}08}{0{,}18} \cdot 0{,}22 \cdot 0{,}246$$

$$= 0{,}08 - 0{,}015 = 0{,}065 = 6{,}5\%$$

$$\text{Recuperarea capitalului investit în proiectul Y} = R_F + \frac{R_0 - R_F}{\sigma_0} \cdot \sigma_y \cdot \text{corelația}_{(y,0)}$$

$$= 0{,}08 + \frac{0{,}13 - 0{,}08}{0{,}18} \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}615$$

$$= 0{,}08 - 0{,}0256 = 5{,}44\%$$

Pe baza analizei de portofoliu, proiectul X va fi preferat, pentru următoarele motive:

a) Proiectul X asigură cel mai mare exces al recuperării reale a capitalului investit față de recuperarea minimă, respectiv 13,5% față de 6,5%, în timp ce pentru

proiectul Y avem 13,5% față de 10,56%. Cu alte cuvinte, proiectul X are capacitatea de a maximiza averea companiei.

b) Coeficientul de corelație negativ al proiectului X, de -0,246 reflectă faptul că modelul lui de recuperare a capitalului investit neutralizează într-o oarecare măsură riscul total de portofoliu în cazul în care proiectul X este suprapus peste operațiunile curente. Deși proiectul Y prezintă un risc individual mai redus, coeficientul său de corelare de +0,615 reflectă faptul că mărește riscurile atunci când acest proiect este suprapus peste operațiunile curente.

Notă. Se va constata că deciziile luate pe baza evaluării efectelor de portofoliu sunt exact opuse față de cele luate în cazul în care s-ar avea în vedere riscul proiectului izolat de operațiunile în curs de desfășurare.

Este simplu de prelucrat „manual" problemele în care apar puține proiecte, ca în cazul exemplului 8, dar numărul relațiilor matematice crește în mod dramatic în cazul în care numărul proiectelor comparate crește, astfel încât este evident faptul că rezolvarea problemelor aparținând domeniului practic prin aplicarea metodei de mai sus necesită utilizarea computerului.

20. Atitudinea factorului de decizie față de risc

După discutarea riscului proiectelor în cazul evaluării lor ca proiecte izolate sau în cadrul activității firmei, trebuie luat în discuție cel de-al treilea aspect al evaluării riscului investițional, respectiv atitudinea factorului de decizie față de risc și implicit față de decizia finală privind investiția.

Evaluările și studiile efectuate în această privință au demonstrat foarte clar că atitudinea față de risc diferă de la o persoană la alta și că în domeniul evaluării investițiilor în lumea afacerilor, factorii de decizie sunt *atenuatorii de risc*.Aceasta înseamnă că, în general, factorii de decizie preferă să facă investiții cât mai puțin riscante (cu alte cuvinte cât mai puțin variabile), chiar dacă acestea pot avea o valoare estimată mai redusă decât o altă investiție, cu o valoare estimată mai mare, dar mai riscantă.

Aceste afirmații se pot demonstra după cum urmează:

Să presupunem că sunt evaluate două investiții.

Investiția A – Venit de £100 000 cu o probabilitate de 1, respectiv certitudine.

Investiția B – Venit de £300 000 cu o probabilitate de 0,5.

Venit 0 cu o probabilitate de 0,5.

Veniturile estimate sunt :

Investiția A 100 000£

Investiția B (300 000£ × 0,5) + (0 × 0,5) = 150 000£.

Este evident faptul că orice investitor va prefera gradul de certitudine al investiției A incertitudinii investiției B (sau gradului de risc al acesteia), chiar dacă

investiția B are cea mai mare valoare estimată. O asemenea atitudine reprezintă „atenuarea riscului".

Implicită în cazul unei asemenea abordări este o ipoteză referitoare la utilitatea sau satisfacția obținută de pe urma banilor. Funcția utilității pentru un atenuator de risc scade pe măsură ce nivelul veniturilor sau al averii crește, respectiv se poate spune că este vorba despre o utilitatea marginală descrescătoare. Un investitor cu „atitudine neutră" privește fiecare creștere a veniturilor sau a averii ca având aveeași valoare, în timp ce un investitor cu „înclinații riscante" prezintă o funcție crescătoare pe măsură ce nivelul veniturilor sau al averii crește.

Aceste trei posibilități sunt reprezentate în fig. 29.3.

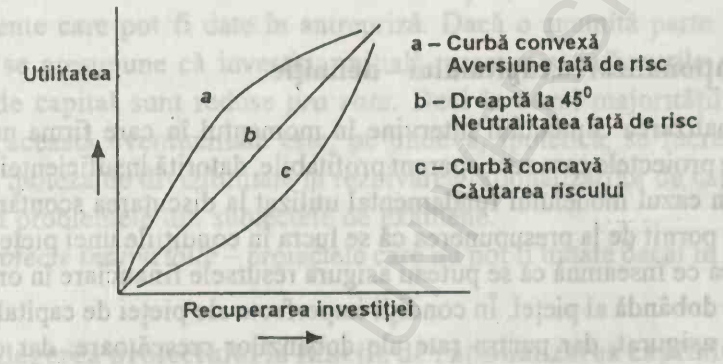


Fig. 29.3. Funcția de utilitate a banilor.

21. Utilitatea și echivalenții de certitudine

Teoria de utilitate aplicată în luarea deciziilor în condiții de risc afirmă că fiecare individ încearcă să optimizeze ceea ce se numește utilitate și lucrează pe premiza că, pentru fiecare în parte, se poate stabili o relație formală, cuantificabilă, între utilitate și bani.

Modul teoretic de stabilire a funcției de utilitate pentru o anumită persoană se bazează pe utilizarea echivalenților de certitudine. Aceștia se obțin după cum urmează.

Să presupunem că o persoană se află în posesia unui bilet de tombolă care îi dă o șansă de 50% de câștig a sumei de 200 000£ și o șansă de 50% să nu câștige nimic. Să presupunem că ar fi întrebat ce sumă este dispus să accepte pentru vânzarea acestui bilet. Dacă persoana respectivă ar accepta să vândă biletul pentru 75 000£, acesta ar reprezenta și echivalentul de certitudine pentru persoana respectivă, cu alte cuvinte aceasta este suma pentru care vânzătorul devine indiferent dacă câștigă premiul de 200 000£ sau prețul de 75 000£. Acestui echivalent de certitudine i se va atribui valoarea de 0,5 utili (utilul fiind considerat unitatea de măsură pentru utilitate). Din astfel de întrebări se poate deriva funcția de utilitate pentru o anumită persoană, după care i se poate solicita persoanei respective să ia decizii de investitii.

Cu toate că aceste procese sunt fundamentate din punct de vedere teoretic, sunt practic imposibil de aplicat în practică și aceasta tocmai din cauza dificultății extreme de stabilire a unei forme clare, evidente, pentru funcția de utilitate. Aversiunea față de risc și atitudinea oamenilor față de risc sunt fenomene cât se poate de reale, deși greu de cuantificat. Prin urmare, este esențial ca analistul care se ocupă de un anumit program să realizeze o analiză a riscului, atât pentru cazul în care proiectul este analizat izolat, cât și pentru cazul în care acesta este evaluat în cadrul portofoliului de investiții al firmei, astfel încât factorii de decizie să intre în posesia cât mai multor infirmații pe baza cărora să ia decizia finală. Există variabile sau elemente de risc în cazul oricărui proiect iar neglijarea acestui aspect al evaluării unui proiect poate ca, în cele din urmă, să inducă în eroare grav factorul de decizie.

22. Raționalizarea capitalului – definiție

Raționalizarea capitalului intervine în momentul în care firma nu poate să inițieze toate proiectele care sunt aparent profitabile, datorită insuficienței resurselor financiare. În cazul modelului fundamental utilizat la discutarea scontării fluxului monetar, s-a pornit de la presupunerea că se lucra în condițiile unei piețe de capital perfecte, ceea ce înseamnă că se puteau asigura resursele financiare în orice limite, la nivelul de dobândă al pieței. În condiții imperfecte ale pieței de capital, capitalul poate să fie asigurat, dar pentru rate ale dobânzilor crescătoare; dar chiar și în aceste condiții există o anumită limită a obținerii de capital peste care nu se mai poate trece. Aceasta reprezintă *raționalizarea capitalului extern*. Pe de altă parte, principiile raționalizării capitalului extern pot fi aplicate și pentru disponibilitățile interne, cum ar fi de exemplu, decizia ca investiția să fie limitată la disponibilitățile de finanțare ale firmei din veniturile și profitul pe care aceasta le realizează, sau decizia ca investiția să fie limitată la bugetul de venituri și cheltuieli al firmei. Factorii interni și externi care impun limitări cantitative au dus la dezvoltarea a două puncte de vedere antagonice, cunoscute sub denumirile de viziunea dură și respectiv viziunea maleabilă de raționalizare a capitalului.

Viziunea dură presupune că există o limită absolută a nivelului finanțării externe pe care poate să o obțină o firmă, în timp ce viziunea *maleabilă* pornește de la supoziția că raționalizarea la nivelul unei limite cantitative, cum ar fi un buget arbitrar de cheltuieli de capital nu trebuie văzută ca fiind o chestiune temporară, ca un expedient administrativ, deoarece o asemenea limită nu este impusă de către piață (cu alte cuvinte, ipoteza fiind aceea că se pot obține finanțări la orice nivel, dar cu costuri diferite) iar o asemenea limită nu trebuie luată în considerare de către o firmă care urmărește maximizarea profitului.

Oricare ar fi cauzele care generează limitarea de capital disponibil pentru scopuri investiționale, rezultă că, în afara faptului că orice proiect trebuie să acopere costurile de capital, proiectele sau pachetul de proiecte care urmează să fie puse în

B.C.U. „M. EMINESCU" IAȘI

practică trebuie să maximizeze recuperarea capitalului investit. Cu alte cuvinte, este necesară o anumită clasificare a proiectelor.

Înainte de a trece în revistă metodele de rezolvare a acestor probleme, trebuie date câteva definiții.

a) *Raționalizarea capitalului pe o singură perioadă* – termen utilizat în cazul în care există o limită a disponibilităților financiare de moment, anticipându-se însă că alte resurse financiare urmează să fie puse la dispoziție în perioadele următoare.

b) *Raționalizarea capitalului pe mai multe perioade* – termen utilizat în cazurile în care este posibil ca limitarea resurselor financiare să fie extinsă pe un număr mai mare de perioade sau eventual pe un termen nedefinit.

c) *Proiecte divizibile* – termen care denumește proiectele care pot fi defalcate în componente care pot fi date în antrepriză. Dacă o anumită parte este dată în antrepriză, se presupune că investiția inițială, precum și influxurile și efluxurile ulterioare de capital sunt reduse *pro rata*. Deși în cazul majorității proiectelor industriale această eventualitate este, pe undeva, ipotetică, se lucrează în mod frecvent cu ipoteza de divizibilitate în rezolvarea raționalizărilor de capital, cu atât mai mult în problemele din subiectele de examene.

d) *Proiecte indivizibile* – proiectele care nu pot fi tratate decât în ansamblu.

23. Alegerea proiectului în funcție de raționalizarea capitalului

În cazurile în care există o raționalizare a capitalului, regula de decizie normală, în funcție de valoarea netă actuală (care ar trebui să fie pozitivă pentru ca proiectul să fie acceptat), este insuficientă pentru alegerea proiectului cel mai eficient.

În cazul în care există o raționalizare a capitalului, obiectivul constă în maximizarea recuperării capitalului investit în proiectul sau pachetul de proiecte care au fost alese în funcție de limitarea de capital. Aceasta înseamnă că decizia în materie investițională se poate modifica, devenind dintr-o simplă problemă de acceptare sau renunțare, o problemă de clasificare a mai multor proiecte. Metodele de îndeplinire a acestor obiective sunt prezentate în continuare pentru următoarele posibilități de raționalizare:

- raționalizarea capitalului pe o singură perioadă, în cazul unui proiect divizibil;
- raționalizarea capitalului pe o singură perioadă, în cazul unor proiecte divizibile, dintre care unele se exclud reciproc;
- raționalizarea capitalului pe o singură perioadă, în cazul unui proiect indivizibil;
- raționalizarea capitalului pe mai multe perioade, în cazul unor proiecte divizibile.

24. Raționalizarea capitalului pe o singură perioadă - proiecte divizibile

Aceasta reprezintă cea mai simplă situație, iar metoda de soluționare constă în realizarea unei clasificări a proiectelor propuse în funcție de indexul valorii actuale în exces IVAE (respectiv valoarea netă actuală VNA care a fost descrisă anterior) și în alegerea proiectelor, sau fracționarea unui proiect, până la epuizarea disponibilului de capital investițional.

Exemplul 7

CR Ltd. are un cost de capital de 15% și o sumă limită de 100 000£ disponibilă pentru investiții în perioada curentă. Se presupune că în viitor urmează să fie disponibil un capital nelimitat. Investiția necesară, valoarea netă actuală (VNA) pentru 15% și indexul valorii actuale în exces (IVAE) pentru fiecare dintre cele șase proiecte care sunt avute în vedere sunt prezentate mai jos.

Care proiecte ar trebui să fie acceptate?

Proiectul	Venit £	VNA @ 15% £	IVAE $\frac{\text{VNA}}{\text{Venit}}$
A	20 000	8000	0,4
B	40 000	28 000	0,7
C	35 000	37 500	1,07
D	50 000	31 000	0,63
E	15 000	3500	0,23
F	45 000	–5000	–0,11

Soluția

Ordinea în funcție de IVAE este C, B, D, A și E. Proiectul F nu poate fi luat în considerare pentru că nu are un VNA pozitiv.

∴Planul optim de investiții:

Proiectul	Fracțiunea dată în antrepriză	Investiția £	VNA £
C	1,00	35 000	37 500
B	1,00	40 000	28 000
D	0,50	25 000	15 750
		£100 000	£81 250

Se va observa că această metodă de rezolvare a problemei se bazează pe bine cunoscutul principiu managerial de maximizare a recuperării capitalului investit pe unitatea de factor de limitare – în acest caz VNA per £ din capitalul disponibil pentru investiții. După cum vă amintiți, acest principiu poate fi aplicat numai în cazurile în care există o singură constrângere – în cazul de față finanțarea investiției pe o singură perioadă.

25. Raționalizarea capitalului pe o singură perioadă - proiecte divizibile care se exclud reciproc

Atunci când două sau mai multe proiecte se exclud reciproc, poate să fie aplicată metoda de rezolvare prin clasificarea în funcție de valoarea IVAE, dar proiectele trebuie să fie inițial divizate în grupuri, fiecare conținând unul dintre proiectele care se exclud reciproc. Această metodă va fi ilustrată în continuare:

Exemplul 8

Să presupunem că sunt valabile aceleași date ca în cazul problemei de la exemplul 7, cu excepția proiectelor B și D care se exclud reciproc.

Care proiecte ar trebui inițiate?

Soluția

Este necesară divizarea proiectelor în două grupe, clasificarea după IVAE, alegerea proiectelor în funcție de limita de capital disponibil și compararea VNA total care poate fi obținut de la fiecare grupă.

Proiectul	Grupa I Investiția £	IVAE	Proiectul	Grupa II Investiția £	IVAE
A	20 000	0,4	A	20 000	0,4
B	40 000	0,7	C	35 000	1,07
C	35 000	1,07	D	50 000	0,63
E	15 000	0,23	E	15 000	0,23

Clasificarea grupurilor și alegerea proiectelor în funcție de limitele investiționale conduc la următorul rezultat:

Grupa I				Grupa II			
Proiectul	Fracția	Investiția £	VNA £	Proiectul	Fracția	Investiția £	VNA £
C	1,00	35.000	37.000	C	1,00	35.000	37.500
B	1,00	40.000	28.000	D	1,00	50.000	31.500
A	1,00	20.000	8.000	A	3/4	15.000	6.000
E	1/3	5.000	1.167				
		£100.000	£74.667			£100.000	£75.000

Se observă că, pentru o margine foarte îngustă, grupul II are VNA cea mai mare, putând să fie ales.

26. Raționalizarea capitalului pe o singură perioadă – proiecte indivizibile

În cazul în care proiectele nu pot fi acceptate decât în ansamblu, fără să fie divizate, clasificarea în funcție de IVAE nu mai dă, în mod obligatoriu, soluția cea mai bună. Presupunând că este implicat un număr relativ redus de proiecte, se poate apela chiar și la metoda încercărilor succesive pentru găsirea unei soluții. În cazul în care proiectele sunt indivizibile, este de presupus că o parte a capitalului disponibil pentru investiție poate să rămână neutilizat și în această situație, o analiză completă trebuie să includă și recuperarea capitalului din investițiile externe ale fondurilor neutilizate.

Exemplul 9

Lloyds Ltd are un cost de capital de 10% și o limită de 100.000£ disponibilă pentru investiții în perioada curentă. Se preconizează că în viitor, capitalul va fi disponibil la discreție. Sunt evaluate următoarele proiecte indivizibile:

Proiectul inițial	Investiția £	VNA @ 10% £
A	35 000	17 500
B	40 000	22 500
C	65 000	38 000
D	48 000	31 500
E	23 000	9000

Se cere să se calculeze planul optim de investiții

a) pentru cazul în care nu există alte alternative investiționale pentru excedentul de capital investițional;

b) pentru cazul în care fondurile excesive pot fi investite aducând un plus de 12% în perpetuități.

Soluția

a) Se încearcă diferite combinații pentru a se vedea care dă cel mai mare VNA. În tabelul 29.5 sunt date câteva exemple.

Tabelul 29.5

Proiecte combinate	Venitul total din combinații £	Fonduri suplimentare £	VNA total din combinații £
AC	100 000	–	55 500
ABE	98 000	2000	49 000
AD	83 000	17 000	49 000
BD	88 000	12 000	54 000
BE	63 000	37 000	31 500
CE	88 000	12 000	47 000
DE	71 000	29 000	40 500

Din tabelul 5 se observă că cel mai eficient plan de investiții cuprinde proiectele A și C, care utilizează complet capitalul investițional disponibil, aducând o VNA combinată de 55 500£.

b) În cazul în care surplusul de capital investițional poate să fie investit în exterior, fiecare dintre combinațiile din tabelul 5 care prezintă un surplus de capital investițional trebuie examinate pentru a se stabili dacă valoarea VNA a proiectelor plus recuperarea capitalului investit extern nu dau valori mai mari de 55 500£.

Pentru fiecare 1000£ investită cu o dobândă de 12%, se obține o VNA de 200£.

$$\left[\frac{1000\times0{,}12}{0{,}1}\right]-1000=200£$$

Combinațiile proiectelor analizate și VNA total (proiecte + investiții externe) sunt prezentate în tabelul 29.6.

Tabelul 29.6

Combinația	Venitul total din proiect £	Fonduri externe investite £	VNA investiție externă £	+	VNA proiect £	=	VNA total £
ABE	98 000	2000	400	+	49 000		49 400
AD	83 000	17 000	3400	+	49 000		52 400
BD	88 000	12 000	2400	+	54 000		56 400*
BE	63 000	37 000	7400	+	31 500		38 900
CE	88 000	12 000	2400	+	47 000		49 400
DE	71 000	29 000	5800	+	40 500		46 300

* În cazul în care este avută în vedere o investiție externă, pot fi inițiate proiectele B și D, restul în sumă de 12 000£ putând fi investit extern, pentru a aduce o VNA de 56 400£. Se observă că este o situație cu puțin mai eficientă decât combinația A și C prezentată în tabelul 29.5.

Notă. Deși clasificarea în funcție de VNA, în condițiile raționalizării capitalului pe o singură perioadă, pentru proiecte indivizibile, nu conduce în mod curent la clasificarea corectă, poate să ofere însă un ghid excelent pentru stabilirea grupului cel mai profitabil de proiecte.

27. Raționalizarea capitalului pe mai multe perioade

Conform definiției anterioare, acesta este cazul în care se preconizează că disponibilitățile investiționale vor fi limitate pe parcursul mai multor perioade. În aceste condiții, devine oarecum dificil de ales grupul de proiecte (dintre care unele ar trebui inițiate imediat, altele la distanță de o perioadă, altele la distanță de trei

perioade și așa mai departe) care să asigure recuperarea maximă a capitalului investit și totuși să rămână în limitele capitalului disponibil pentru moment. Această problemă devine o problemă de optimizare a unui factor (respectiv a VNA) pentru situația în care resursele sunt limitate, respectiv sunt limitate fondurile financiare pe perioadele care sunt avute în vedere.

Este vorba despre o situație în care se poate face apel la tehnicile de programare liniară (acestea au fost detaliate anterior în cuprinsul acestei lucrări) și trebuie să accentuez faptul că programarea liniară a fost aplicată cu succes în rezolvarea problemelor de raționalizare a capitalului pe mai multe perioade.

28. Raționalizarea capitalului pe mai multe perioade – soluția PL

Pentru aplicarea PL ca metodă de rezolvare a problemelor de acest gen, trebuie să se pornească de la ipoteza că este vorba despre proiecte divizibile, respectiv că diversele părți care le alcătuiesc pot fi date în antrepriză. Aceasta nu constituie în mod necesar o abordare realistă, dar se practică în mod frecvent pentru scopuri de examinare. Următorul exemplu va fi utilizat tocmai pentru a ilustra rezolvarea prin metoda programării liniare și interpretarea problemelor de raționalizare a capitalului pe mai multe perioade.

Exemplul 10

Trent Ltd are un cost de capital de 10% și are în vedere analiza a trei proiecte pentru a decide care anume ar trebui inițiat sau inițiate. Proiectele analizate sunt următoarele:

	Fluxul monetar estimat				
Proiectul	Anul 0	Anul 1	Anul 2	Anul 3	Anul 4
A	–15 000	–25 000	30 000	30 000	20 000
B	–25 000	–15 000	30 000	29 000	30 000
C	–35 000	–15 000	40 000	44 000	30 000

Capitalul este limitat la 40 000£ pentru moment și la 35 000£ în primul an. Se face precizarea că proiectele sunt divizibile.

Soluția

Pasul 1. Se calculează valorile VNA ale proiectelor în maniera cunoscută. Acestea vor fi:

A = 23 245£.
B = 28 414£.
C = 37 939£.

Pasul 2. Se formulează problema în maniera clasică pentru problemele PL și anume se stabilește funcția-obiectiv și constrângerile.

Maximizare $23\,245X_A + 28\,414X_B + 37\,939X_C$:

unde X_A reprezintă proporția din proiectul A care poate fi demarată;

X_B – proporția din proiectul B care poate fi demarată;

X_C – proporția din proiectul C care poate fi demarată.

Constrângerile în această problemă sunt reprezentate de limitările bugetare în perioadele 0 și 1.

Capitalul în momentul 0 este

$$15\,000X_A + 25\,000X_B + 25\,000X_C \leq 40\,000.$$

Capitalul în momentul 1

$$25\,000X_A + 15\,000X_B + 15\,000X_C \leq 35\,000.$$

În plus, este necesar să se specifice constrângerile formale privitoare la proporțiile din proiecte acceptate pentrru a exista siguranța că proiectul nu poate fi acceptat decât o singură dată și că nu sunt acceptate proiectele „negative".

$$X_A, X_B, X_C \leq 1$$
$$X_A, X_B, X_C \geq 0$$

Formularea completă este:

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\text{Maximizare} & 23\,245X_A & + & 28\,414X_B & + & 37\,939X_C & & \\
\text{Supusă} & 15\,000X_A & + & 25\,000X_B & + & 35\,000X_C & \leq & 40\,000 \\
\text{constrângerilor} & & & & & & & \\
 & 25\,000X_A & + & 15\,000X_B & + & 15\,000X_C & \leq & 35\,500 \\
 & X_A & & & & & \leq & 1 \\
 & & & X_B & & & \leq & 1 \\
 & & & & & X_C & \leq & 1 \\
 & X_A & & & & & \geq & 0 \\
 & & & X_B & & & \geq & 0 \\
 & & & & & X_C & \geq & 0
\end{array}$$

Pasul 3. Se rezolvă problema de programare liniară.

Modelul formal obținut mai înainte poate să fie rezolvat prin metoda simplex. Este evident că chiar și în cazul unei probleme simplificate la maximum, cum este cazul de această dată, rezolvarea manuală a acestor probleme este excesiv de laborioasă și de aceea, este foarte puțin probabil că i se va cere vreunui candidat la un examen să rezolve partea matematică până la capăt.

Însă introducerea problemei în forma clasică și interpretarea rezultatelor sunt subiecte predilecte de examen.

Soluția problemei de mai înainte este următoarea:

Proiectul	Fracțiunea acceptată
A	0,988
B	0
C	0,719

Valoarea obținută din funcția-obiectiv este 50 244£.

Prețurile din umbră: prima constrângere (respectiv bugetul de 40 000£ pentru anul 0) = 0,922.

a doua constrângere (respectiv 35 000£ pentru anul 1) = 0,3755.

Pasul 4. Interpretarea soluției.

Soluția indică faptul că o fracțiune de 0,988 din proiectul A și o fracțiune de 0,719 din proiectul C ar putea să fie lansate. Acest plan de investiții presupune cheltuirea completă a resurselor disponibile pentru anul 0 și anul 1.

Prețurile din umbră indică nivelul cu care s-ar putea crește VNA al planului optim (respectiv 50 244£) ar putea să crească, dacă s-ar ridica plafonul constrângerilor bugetare. Pentru fiecare 1£ de relaxare a constrângerilor în perioada 0, se poate obține un supliment de 0,922 din VNA. Prețurile din umbră indică faptul că suplimentarea finanțării în perioada 0 este mai scumpă de aproximativ trei ori decât suplimentarea din perioada 1. Acest fapt poate oferi factorilor de decizie o oarecare orientare în privința recurgerii la surse alternative de capital.

Note. Rețineți faptul că ipoteza de la care s-a pornit în rezolvarea acestei probleme este aceea că proiectele sunt divizibile. În general se apreciază că aceasta nu este o ipoteză foarte practică, dar se recurge la acest artificiu destul de frecvent în cadrul subiectelor de examinare. Având în vedere această caracteristică a proiectelor, VNA este exprimată în funcție de proporția proiectului care poate fi acceptată. Aceasta constituie în același timp și o metodă de verificare a rezultatului obținut. În exemplul de mai înainte, valoarea obținută pentru VNA este de 50 244£,

respectiv (0,988 × 23 245£) + (0,719 × 37 939£).

În cazul în care proiectele nu sunt divizibile, singura metodă de rezolvare a problemelor de acest gen este Programarea Integrală, care nu intră, însă, în scopurile pe care și le-a propus această lucrare.

29. Rezerve în privința aplicării PL în rezolvarea problemelor de raționalizare a capitalului

Nu există nici o îndoială că, în împrejurări adecvate, PL poate să constituie o metodă utilă de rezolvare a problemelor de raționalizare a capitalului pe mai multe perioade. Există, cu toate acestea, numeroase limitări și precizări de care trebuie să se țină seama dacă se dorește aplicarea acestei metode, dintre care principalele sunt:

a) Este realistă presupunerea de liniaritate pentru toate funcțiile implicate?

b) Proiectele sunt cu adevărat divizibile și pot fi clasificate într-o manieră liniară?

c) Sunt incluse toate oportunitățile de investiții în fiecare dintre perioadele conținute de model?

d) Sunt toate proiectele și constrângerile independente unele de altele, așa cum se cere în cazul modelului de programare liniară?

e) Sunt cunoscute toate fluxurile monetare, resursele și constrângerile în măsura necesară pentru aplicarea acestui model?

(Modul în care este ignorată această incertitudine reprezintă, poate, cea mai importantă rezervă).

f) Rata de scont aleasă este realistă? În cazul unei raționalizări dure a capitalului (respectiv impusă din exterior), oportunitatea costurilor finanțării nu poate fi cunoscută cu adevărat până în momentul în care planul este dus până la capăt, ceea ce necesită, desigur, ca toate costurile finanțării să fie cunoscute - o dilemă circulară clasică!

30. Rezumat

a) Incertitudinea și riscul sunt factori foarte importanți de care trebuie să se țină seama în evaluarea investițiilor. Trei aspecte au o importanță capitală din acest punct de vedere: incertitudinea proiectului individual, efectul de portofoliu și atitudinea factorilor de decizie în privința riscului.

b) Incertitudinea individuală a proiectului poate să fie analizată prin intermediul a trei grupe de tehnici: analiza duratei, analiza probabilistică și simularea.

c) Principala problemă în cazul analizei duratei este aceea că aceasta nu ține seama în mod explicit de variabilitatea fluxurilor monetare.

d) La metodele de analiză probabilistică se folosesc probabilități subiective și sunt cuprinse de la valoarea preconizată până la metodele care fac apel la analiza statistică bazată pe proprietățile distribuțiilor.

e) Deși discutabilă, mai important decât riscul individual al proiectului este riscul de ansamblu al portofoliului de proiecte al firmei. Noile proiecte sunt capabile, într-o anumită măsură, să neutralizeze sau să amplifice riscurile existente.

f) Utilizându-se covariația recuperării capitalului investit într-un proiect și recuperarea capitalurilor investite în operațiile în curs de desfășurare, se pot calcula coeficienții de corelare a noilor proiecte raportat la proiectele în curs de desfășurare.

g) Atitudinea factorilor de decizie în privința riscului este de o importanță fundamentală, dar este și extrem de dificil de cuantificat. În general însă, factorii de decizie sunt atenuatori de risc.

h) Raționalizarea capitalului apare atunci când mai multe proiecte care aparent sunt profitabile, nu pot fi lansate datorită insuficienței capitalului.

i) Regula de decizie în cazul în care este implicată o raționalizare a capitalului constă în maximizarea recuperării capitalului investit în proiectul sau proiectele alese și nu doar simpla decizie de acceptare/renunțare la proiectele luate izolat.

j) Raționalizarea capitalului pe o singură perioadă pentru proiecte divizibile este rezolvată în mod obișnuit prin clasificarea proiectelor în ordinea IVAE, acordându-se o atenție deosebită proiectelor care se exclud reciproc. În cazul în care proiectele sunt indivizibile, se poate recurge la abordarea prin metoda încercărilor succesive.

k) Raționalizarea capitalului pe mai multe perioade pentru proiecte divizibile este rezolvată în general prin tehnicile de programare liniară (PL), care permite obținerea soluțiilor corecte (respectiv proiectele care pot fi lansate) a valorii funcției-obiectiv (respectiv VNA totală) și a costurilor din umbră (respectiv costurile constrângerilor asociate).

l) Deși utile, există o serie de rezerve care trebuie avute în vedere în aplicarea tehnicilor de programare liniară în cazul rezolvării problemelor de raționalizare a capitalului.

31. De reținut

a) Abordarea unor probleme cum ar fi inflația și incertitudinea a fost realizată în cadrul evaluării investițiilor. Însă principiile și tehnicile descrise au o arie de aplicabilitate mult mai vastă, în afara luării deciziilor de investiție. De exemplu, utilizarea unor valori estimate, analiza de sensibilitate și conceptul de real sau opus valorii nominale a banilor sunt aplicabile practic în orice domeniu al planificării și luării deciziilor.

b) Datorită cantităților foarte mari de informații și a complexității tehnicilor utilizate, în evaluarea investițiilor computerele își găsesc o aplicabilitate foarte largă, în special în privința evaluării riscurilor și în analiza sensibilității.

Întrebări de autoevaluare. *Numerele dintre paranteze se referă la numerotarea paragrafelor.*

1. În ce stadiu al procesului de evaluare și decizie trebuie avute în vedere incertitudinea și riscurile? (2)
2. Care sunt metodele bazate pe durată, de evaluare a incertitudinii? Care este ipoteza de lucru a acestor metode și care sunt limitările lor principale? (4-8)
3. Descrieți metoda bazată pe utilizarea valorii estimate în evaluarea proiectelor (10)
4. În ce mod se poate extinde analiza probabilistică în tehnica valorii estimate? (11)
5. Ce este analiza probabilistică continuă și, atunci când este utilizată, cum se stabilesc mediile și dispersia fluxurilor monetare? (12-13)
6. Cum se stabilește deviația standard a VNA și cum se utilizează? (14)
7. Care este obiectivul analizei de sensibilitate și cum se realizează aceasta? (17)
8. De ce este important să se ia în considerare nu numai riscurile proiectelor individuale ci și riscul total rezultant al combinării proiectelor din cadrul portofoliului de proiecte? (18)
9. Care este procedura standard de evaluare a riscului de portofoliu? (19)
10. Ce sunt atenuatorii de risc? (20)

11. Ce este un echivalent de certitudine? (21)

12. Care este deosebirea dintre raționalizarea dură și raționalizarea maleabilă a capitalului? (22)

13. Cum se iau deciziile de investiții în cazul unei raționalizări a capitalului pe o singură perioadă pentru proiecte divizibile. (24)

14. Cum se schimbă răspunsul la întrebarea 13 dacă unele dintre proiecte se elimină reciproc? (25)

15. Ce este raționalizarea capitalului pe mai multe perioade și care ar fi o metodă de rezolvare a acestor probleme? (27)

16. Care sunt rezervele privitoare la aplicarea tehnicilor programării liniare în cazul rezolvării problemelor de raționalizare a capitalurilor? (29).

Exerciții cu răspunsuri

1. Calculați VNA estimată pentru următorul proiect, care presupune o investiție inițială de 10 000£ și un cost de capital de 10%.

		Fluxuri monetare		
	Probabilitatea	Anul 1	Anul 2	Anul 3
Varianta optimistă	0,2	5500£	7000£	5500£
Varianta cea mai probabilă	0,5	4000	5500	5000
Varianta pesimistă	0,3	3000	4500	3000

2. Deviațiile standard ale fluxurilor monetare de la întrebarea 1 au fost estimate după cum urmează:

	Anul 1	Anul 2	Anul3
Estimarea deviației standard	400£	500£	350£

Care este probabilitatea obținerii unei VNA egală sau mai mică de zero?

3. O firmă are în vedere următoarele cinci proiecte divizibile. Mai există și o limitare a capitalului disponibil pentru perioada curentă, la suma de 150.000£. Care proiecte ar trebui alese?

Proiectul	Venitul, £	VNA, £
A	80 000	15 000
B	50 000	15 000
C	60 000	25 000
D	50 000	23 000
E	30 000	8000

Răspunsuri la exerciții

1. Fluxurile monetare estimate:

Anul		
1	2	3
4000	5500	5000

$$\therefore VNA = -10\,000 + 11\,558 = 1558.$$

2. $$\sigma_{VNA} = \sqrt{\sum\left[\frac{400^2}{(1+0{,}1)^2} + \frac{500^2}{(1+0{,}1)^4} + \frac{350^2}{(1+0{,}1)^6}\right]} = 881£.$$

$$\therefore Z = \frac{558-0}{881} = 0{,}633.$$

3.

Proiectul	IVAE
A	0,1875
B	0,300
C	0,417
D	0,46
E	0,26

		Cumulativ	
		Venitul	VNA
∴Proiectul	AIID	50 000£	23 000£
	AIIC	110 000	48 000
	4/5B	150 000	60 000

BCU IAȘI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

30. ALGEBRĂ MATRICEALĂ

1. Obiective

După parcurgerea acestui capitol:
- veți ști cum se definește o matrice;
- veți ști să adunați, să scădeți și să înmulțiți matrice și vectori;
- veți înțelege ce înseamnă matrice zero și matrice unitară;
- veți ști cum se inversează o matrice;
- veți înțelege matricele de tranziție probabilistică.

2. Prezentarea informației

Contabilii și oamenii de afaceri sunt obișnuiți cu prezentarea informațiilor într-o formă tabelară sau pe coloane și rânduri. Adeseori un anumit set de date prezentate într-o formă tabelară, ca de exemplu deprecierea pe categorii de mijloace fixe este prelucrat pentru a se obține un alt set de informații, bazate pe primul tabel, ca de exemplu deprecierea pe categorii de mijloace fixe în funcție de anumite costuri. Deși în general nu sunt denumite astfel, exemplele anterioare sunt, de fapt, *matrice*. Înțelegerea matricelor și a algebrei matriceale poate să vă ofere mijloacele de a scurta metodele de calcul, asigurându-vă și posibilitatea de a căpăta o vedere de ansamblu a unor metode mai complexe de prezentare și prelucrare a datelor.

3. Definiția matricelor

Matricea este reprezentată de distribuția rectangulară a unor numere, ale căror valori și poziții în cadrul matricei nu sunt întâmplătoare, având anumite semnificații. De regulă, dar nu întotdeauna, matricele sunt reprezentate între paranteze, după cum urmează:

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Exemplul 1

BCU "IOAN SLAVICI" UNIVERSITY LIBRARY

Dimensiunile unei matrice sunt date de numărul de rânduri și de coloane, respectiv nr. de rânduri × nr. de coloane. Simbolurile cele mai des utilizate sunt *m* pentru coloane și *n* pentru rânduri. Matricea de la exemplul 1 este o matrice de tipul 2 × 2 și cum numărul de coloane este egal cu numărul de rânduri, se spune că este o matrice pătrată.

În continuare, vă prezint și alte tipuri de matrice:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 & 9 & 16 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 8 & 12 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 7 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplul 2 (o matrice 3 × 2) **Exemplul 3** (o matrice 2 × 3) **Exemplul 4** (o matrice 3 × 3, respctiv pătrată)

Notațiile standard pentru un element al matricei sunt următoarele:

x_{ij} = elementul din rândul i și coloana j

așadar:

$x_{2,3}$ = elementul din rândul al doilea, coloana a treia.

4. Vectori

O matrice alcătuită dintr-un singur rând se numește *rând vector*, iar matricea cu o singură coloană se numește *coloană vector*.

$$\begin{bmatrix} 9 & 5 & 8 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 16 \\ 5 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Exemplul 5 (rând vector) **Exemplul 6** (coloană vector)

5. Algebră matriceală

Regulile speciale care se aplică prelucrării datelor prezentate sub formă matriceală sunt formulate în continuare și anume: *adunarea matricelor, scăderea matricelor, înmulțirea matricelor și inversarea matricelor*. Pentru scurtarea anumitor operații, matricele se notează cu majuscule, ca de exemplu:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 6\end{bmatrix}$$

Exemplul 7

6. Adunarea matricelor

Singura regulă în această privință este aceea că matricele care trebuie adunate (sau scăzute) trebuie să aibă aceleași dimensiuni, respectiv trebuie să aibă același număr de rânduri și de coloane, ca de exemplu:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 11 & 2\\ 6 & 2 & 9\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 7\\ 5 & 9 & 6\end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix}1 & 11 & 2\\ 6 & 2 & 9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 0 & 7\\ 5 & 9 & 6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1+2 & 11+0 & 2+7\\ 6+5 & 2+9 & 9+6\end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix}3 & 11 & 9\\ 11 & 11 & 15\end{bmatrix}$$

Exemplul 8

Se observă că se adună numerele care se află în aceleași poziții în cele două matrice care se adună, în condițiile în care ambele matrice au același număr de rânduri și de coloane, respectiv 2x3.

Notă. A+B=B+A, respectiv regula de comutativitate, adică nu contează ordinea în care se adună cele două matrice. Rezultă că se poate realiza operația de adunarea unui număr oricât de mare de matrice, cu condiția ca toate să aibă aceleași dimensiuni. Dacă matricele nu au aceleași dimensiuni, nu pot fi adunate, și anume:

$$X=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 8 & 2\end{bmatrix} \text{ și } Y=\begin{bmatrix}6\\ 5\end{bmatrix}$$

Exemplul 9

X+Y nu are nici o semnificație, deoarece cele două matrice nu au aceleași dimensiuni.

7. Scăderea matricelor

Scăderea matricelor se realizează pe baza aceleași reguli ca și la adunarea matricelor.

De exemplu, pentru aceleași matrice ca în exemplul 8, vom avea:

$$A - B$$

$$\text{adică} \begin{bmatrix} 1 & 11 & 2 \\ 6 & 2 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 5 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1-2 & 11-0 & 2-7 \\ 6-5 & 2-9 & 9-6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 11 & -5 \\ 1 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

Exemplul 10

Se observă că în ultima matrice apare semnul negativ de mai multe ori. Dacă în matricele originale apar numere cu semne negative, operația de scădere se face ținându-se seama de regulile algebrice referitoare la semne. Este important de observat că, în timp ce A+B=B+A, A–B≠B–A. De exemplu, inversând ordinea matricelor din exemplul 10 vom obține:

$$B - A$$

$$\text{adică} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 5 & 9 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 11 & 2 \\ 6 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$B - A = \begin{bmatrix} 2-1 & 0-11 & 7-2 \\ 5-6 & 9-2 & 6-9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -11 & 5 \\ -1 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

Exemplul 11

Se observă că rezultatul diferă de cel al primei scăderi.

8. Înmulțirea matricelor

Există două aspecte legate de înmulțirea matricelor și anume: înmulțirea matricei cu o singură valoare, numită *scalar* și înmulțirea matricelor între ele.

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

9. Înmulțirea cu un scalar

Scalarul este un număr ca de exemplu 3; 6; 8,2 etc. Regula înmulțirii cu scalari este foarte simplă: se înmulțește fiecare număr din matrice cu scalarul respectiv. De exemplu:

$$\text{Considerăm matricea } A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$$

Exemplul 12

și se cere să se înmulțească matricea A cu scalarul 4.

$$4 \times A = 4 \times \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 8 \\ 32 & 12 \end{bmatrix}$$

10. Înmulțirea a două matrice

Regula principală care trebuie reținută în cazul înmulțirii a două matrice este aceea că numărul de coloane din prima matrice *trebuie să fie egal* cu numărul de rânduri din cea de-a doua matrice, respectiv o matrice 2×3 se poate înmulți cu o matrice 3×2, dar o matrice 2×3 nu se poate înmulți cu o altă matrice 2×3. Metoda de înmulțire a matricelor între ele va fi ilustrată cu ajutorul următoarelor matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{adică } 3 \times 2 \text{ matrice}$$

$$B = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 11 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{adică } 2 \times 4 \text{ matrice}$$

Se cere să se calculeze AB, respectiv A×B.

	Rânduri		Coloane
A =	3	×	2
B =	2	×	4

Pentru început se verifică dacă operația poate să fie efectuată:

∴Numărul de coloane al lui A este egal cu numărul de rânduri al lui B.

∴Înmulțirea poate să fie efectuată.

Noua matrice AB se obține prin următorii pași:

$$AB = \begin{bmatrix} 3\times8+1\times3 & 3\times0+1\times2 & 3\times5+1\times11 & 3\times4+1\times1 \\ 2\times8+4\times3 & 2\times0+4\times2 & 2\times5+4\times11 & 2\times4+4\times1 \\ 7\times8+4\times3 & 7\times0+4\times2 & 7\times5+4\times11 & 7\times4+4\times1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 27 & 2 & 26 & 13 \\ 28 & 8 & 54 & 12 \\ 68 & 8 & 79 & 32 \end{bmatrix}$$

Rezultatul poate fi reprezentat, desigur, într-o formă mai restrânsă.

Pașii succesivi în obținerea produsului AB sunt următorii:

Se înmulțește primul element de pe primul rând din A cu primul element de pe prima coloană din B (respectiv 3×8).

Se înmulțește al doilea element de pe primul rând din A cu al doilea element de pe prima coloană din B (respectiv 1×3)

(Acest proces de înmulțire se continuă până când elementul *n* de pe primul rând al primei matrice se înmulțește elementul *n* de pe prima coloană a celei de-a doua matrice).

Toate aceste produse sunt adunate, pentru a da primul element de pe prima coloană și primul rând al noii matrice AB.

$$(3\times8)+(1\times3)=27$$

După aceasta, fiecare număr de pe cel de-al doilea rând al matricei A este înmulțit cu fiecare număr de pe prima coloană a matricei B, respectiv (2×8) și (4×3) și aceste rezultate sunt adunate pentru a obține al doilea element de pe prima coloană a matricei AB, respectiv 28.

Acest proces este continuat până când fiecare rând din matricea A a fost înmulțit cu prima coloană din matricea B. După aceasta, se poate spune că am obținut prima coloană a noii matrice AB. Procesul de înmulțire a fiecărui rând al matricei A cu fiecare coloană a matricei B continuă până la obținerea tuturor elementelor noii matrice AB.

Notă. Dimensiunea matricei AB este 3×4 respectiv are același număr de rânduri ca A și același număr de coloane ca B.

respectiv $A \times B = AB$

$(3\times2)\times(2\times4)=(3\times4)$

trebuie să fie asemenea pentru ca înmulțirea să fie posibilă

dimensiunea matricei finale

BCU IAȘI

Note:

a) Matricea A×B nu este identică cu matricea B×A. În cazul matricelor nu este valabilă regula obișnuită de la înmulțirea numerelor unde 3×6=18, la fel ca și 6×3=18. Respectiv nu se aplică legea comutativității.

b) Dacă este posibil de calculat produsul A×B, nu înseamnă că și produsul B×A este posibil de calculat.

11. Înmulțirea cu un vector

Se aplică aceeași metodă ca și în cazul înmulțirii matricei cu un scalar, ca în exemplul de la paragraful 10. Exemplificăm cu următorul exemplu:

$$A=\begin{bmatrix}5 & 6 & 7\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 2\\ 8 & 9\end{bmatrix}$$

adică o matrice 1×3
respectiv o matrice 3×2

$$\therefore AB=\begin{bmatrix}5 & 6 & 7\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 2\\ 8 & 9\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5\times4+6\times1+7\times8 & 5\times3+6\times2+7\times9\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}82 & 90\end{bmatrix}$$ respectiv o matrice 1×2.

12. Exemplu de înmulțire a matricelor

Să presupunem că un grup financiar are un lanț de benzinării, la fiecare dintre aceste stații fiind angajați casieri, vânzători și mecanici după cum urmează:

	Tipuri de benzinării		
	Mari	Medii	Mici
Casieri	4	2	1
Vânzători	12	6	3
Mecanici	6	4	2

Rezultă o matrice A, de tipul 3 × 3.

Numărul de benzinării este

	Sudul Angliei	Nordul Angliei
Benzinării mari	3	7
Benzinării medii	5	8
Benzinării mici	12	4

Rezultă o matrice B, de tipul 3 × 2.

Câte persoane din fiecare categorie sunt angajate în total în sudul țării și câte în nordul țării.

Soluția

A este o matrice 3×3, B este o matrice 3×2 ∴ Operația de înmulțire AxB este posibilă și matricea rezultantă AB va fi o matrice 3×2.

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 12 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}} \times \underset{B}{\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 8 \\ 12 & 4 \end{bmatrix}} = \underset{AB}{\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{bmatrix}}$$

$$\begin{aligned} x_{11} &= (4\times3) + (2\times5) + (1\times12) = 34 \\ x_{12} &= (4\times7) + (2\times8) + (1\times4) = 48 \\ x_{21} &= (12\times3) + (6\times5) + (3\times12) = 102 \\ x_{22} &= (12\times7) + (6\times8) + (3\times4) = 144 \\ x_{31} &= (6\times3) + (4\times5) + (2\times12) = 62 \\ x_{32} &= (6\times7) + (4\times8) + (2\times4) = 82 \end{aligned}$$

∴AB este

	Sud	Nord
Casieri	34	48
Vânzători	102	144
Mecanici	62	82

13. Matricea nulă

În algebra matriceală, zero este reprezentată de matricea pătrată cu toate elementele zero. Ca și în cazul înmulțirii numerelor, o matrice înmulțită cu matricea zero dă rezultatul zero, respectiv

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3\times0)+(4\times0) & (3\times0)+(4\times0) \\ (5\times0)+(6\times0) & (5\times0)+(6\times0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

14. Matricea unitară

În algebra matriceală, matricea unitară este reprezentată de matricea pătrată a cărei diagonală din colțul din stânga sus până în colțul din dreapta jos este alcătuită

BCU IASI CENTRALA UNIVERSITARA LIBRARY

din elemente egale cu 1, restul elementelor matricei fiind reprezentate de zero. Această matrice are o importanță deosebită și este reprezentată de simbolul I.

$$I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad \text{sau} \quad I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad \text{sau} \quad I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Matricele sunt egale numai atunci când au aceleași dimensiuni și aceleași elemente dispuse în aceleași poziții, respectiv

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Ca și în cazul scalarilor, când o matrice este înmulțită cu matricea unitară, rezultă aceeași matrice inițială și anume:

$$AI=A \text{ și } IA=A$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 6\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

$$AI=\begin{bmatrix}1 & 6\\ 2 & 3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times1+6\times0 & 1\times0+6\times1\\ 2\times1+3\times0 & 2\times0+3\times1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 6\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

În mod similar:

$$IA=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 6\\ 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times1+0\times2 & 1\times6+0\times3\\ 0\times1+1\times2 & 0\times6+1\times3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 6\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

prin aceasta demonstrându-se că AI=A și IA=A.

Notă. Matricea unitară, I, trebuie să fie întotdeauna pătrată.

15. Inversarea matricelor

În algebra matriceală, funcția de divizare este înlocuită de cea de *inversare*. Inversa (sau reciproca) unei matrice are aceleași proprietăți ca și inversa unui număr

scalar. De exemplu, inversa lui 8 este 1/8, astfel încât

$$8\times1/8=1=(1/8)\times8.$$

În algebra matriceală, inversa unei matrice este notată A^{-1} și

$$A\times A^{-1}=I=A^{-1}\times A$$

Numai matricele pătrate pot să aibă inverse, aceasta rezultând din următoarea relație:

$$A\times A^{-1}=A^{-1}\times A$$

care implică faptul că numărul de rânduri și de coloane trebuie să fie egal.

16. Aflarea inversei

Există mai multe metode de aflare a lui A^{-1} cunoscându-se A, dar consider că următoarea metodă pe care o voi prezenta pas cu pas este cea mai simplă și ușor de aplicat pentru dimensiunile matricelor care sunt întâlnite în mod curent în subiectele de examen.

Să presupunem că se cere să se găsească inversa matricei A.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Aceasta se realizează printr-o serie de operații realizate rând cu rând asupra matricei A, obiectivul fiind acela de a o transforma în matricea unitară, I. În același timp, aceste operații rând cu rând sunt efectuate pe o matrice unitară, care la sfârșitul aplicației devine A^{-1}.

Pasul 1. Se reprezintă matricea A alături de matricea unitară I.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pasul 2. Având în vedere că a_{11} este egal cu 1, urmează să transformăm a_{21} în zero, respectiv rândul 2 – (3× rândul 1)

$$\text{Rândul 2} - (3\times\text{rândul 1})=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Pasul 3. Acum trebuie ca a_{22} să fie 1, ∴înmulțim rândul 2 cu –1/2

$$\text{Rândul 2}\times-1/2=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Pasul 4. În final trebuie transformat a_{12} în zero, respectiv rândul 1 – (2×rândul 2)

$$\text{Rândul 1} - (2\times\text{rândul 2})=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

A devine I, iar matricea unitară devine A^{-1}.

BCU IASI CENTRALA UNIVERSITARA

Notă. Algoritmul de inversare a matricelor rând cu rând este similar celui aplicat în cazul metodei simplex de rezolvare a problemelor de programare liniară, prezentat anterior.

Pentru a demonstra că matricea obținută la pasul 4 este A^{-1}, o putem înmulți cu A, rezultatul trebuind să fie egal cu matricea unitară, respectiv:

$$A \times A^{-1} = I$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times -2 + 2\times 1\ 1/2 & 1\times 1 + 2\times -1/2 \\ 3\times -2 + 4\times 1\ 1/2 & 3\times 1 + 4\times -1/2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Note:

a) Nu orice matrice pătrată poate să aibă o inversă; de exemplu $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ nu are inversă.

b) Produsul a două matrice , dintre care niciuna nu este matrice nulă, poate să ducă la obținerea unei matrice nule, ca de exemplu:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ și } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

17. Aflarea inversei cu ajutorul determinanților

O metodă alternativă de aflare a inversei unei matrice este aceea bazată pe utilizarea determinanților. Determinanta unei matrice A se notează cu |A| sau DetA și este definită după cum urmează:

$$\text{Dacă } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ atunci } |A| = ad - bc.$$

De exemplu, matricea *A* de la paragraful 16 este

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \therefore |A| = (1\times 4) - (3\times 2) = -2.$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Determinanții se aplică după cum urmează:

$$\text{Dacă } A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} \quad \text{atunci } A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

Acest procedeu este aplicat pentru inversarea matricei A de la paragraful 16, al cărui determinant este –2, așa cum am calculat anterior.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} \text{ și } |A|=-2$$

$$\therefore A^{-1}=-1/2\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}$$

care, înmulțit în maniera cunoscută, dă rezultatul:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 11/2 & -1/2\end{bmatrix}$$

care este identic cu cel obținut prin aplicarea algoritmului rând cu rând prezentat în cadrul paragrafului anterior.

18. Rezolvarea sistemelor de ecuații prin intermediul algebrei matriceale

Algebra matriceală se poate dovedi extrem de utilă în cazul rezolvării sistemelor de ecuații. Pentru găsirea unei soluții unice, trebuie ca numărul de ecuații să fie egal cu numărul de necunoscute, astfel încât să poată fi reprezentată o matrice patrată. Metoda de rezolvare este asemănătoare celei de aflare a inversei unei matrice, respectiv prin efectuarea unor operații rând cu rând. Vom demonstra această metodă cu ajutorul următorului exemplu:

Să se rezolve, cu ajutorul algebrei matriceale, următorul sistem de ecuații:

$$3x+4y=10$$
$$2x+7y=11$$

Notarea datelor problemei în formă matriceală:

$$\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\ 11\end{bmatrix}$$

de la care trebuie să se obțină

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

rezultând un răspuns numeric pentru x și y.

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pasul 1. Se aduc ecuațiile în formă matriceală (respectiv ca anterior):

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Pasul 2. Se transformă a_{11} în 1 prin scăderea rândului 2.

$$\text{Rândul 1} - \text{rândul 2} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Pasul 3. Se tranformă a_{21} în zero prin scăderea 2×rândul 2.

$$\text{Rândul 2} - (2 \times \text{rândul 1}) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Pasul 4. Se tranformă a_{22} în 1 prin împărțirea rândului 2 la 13.

$$\text{Rândul 1} + \text{rândul 3} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pasul 5. Se transformă a_{12} în zero prin adunarea la rândul 1 a 3×rândul 2.

$$\text{Rândul 1} + (3 \times \text{rândul 2}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore x=2, y=1.$

Rezultatul poate fi verificat prin efectuarea substituției în ecuații

$$3x + 4y = 10$$
$$2x = 7y = 11$$

adică $3\times2 + 4\times1 = 10$

$2\times2 + 7\times1 = 11$

19. Matricele de tranziție probabilistică

Acestea sunt matricele în care elementele individuale sunt prezentate sub formă de probabilități, respectiv 0,5; 0,70; 0,1 etc.

Aceste probabilități pot să reprezinte, de exemplu, probabilitatea ca un anumit eveniment să urmeze unui alt eveniment, respectiv probabilitatea de trecere de la un eveniment la altul. Probabilitatea diverselor schimbări, aplicată stării inițiale prin înmulțirea matricelor poate să dea o estimare a stărilor ulterioare. Acest proces este repetat de un număr nedefinit de ori, dar de regulă se constată că după câteva cicluri, valorile se stabilizează în jurul unui interval restrâns.

Aplicațiile acestui proces, cunoscut sub numele de *procesul Markov*, aparțin în special domeniului marketingului, când se cercetează efectele modificării vânzărilor unor mărci de produse, sau în cazul evaluării ratei de apariție a defecțiunilor la mașini și utilaje, ca și pentru determinarea celor mai potrivite programe de substituție. Poate fi aplicat și în cazul altor probleme, în cadrul cărora este vorba despre evenimente succesive, probabilitatea tranziției de la un eveniment la altul fiind cunoscută

O aplicație a matricelor de tranziție.

Să presupunem că există două produse, gleem și sparkle, care acoperă piața într-un procentaj de 60% și respectiv 40%.

În fiecare săptămână se produce o schimbare a vânzărilor celor două mărci. Dintre persoanele care au cumpărat gleem în săptămâna anterioară, 70% vor cumpăra din nou și în săptămâna curentă, în timp ce 30% vor prefera sparkle. Dintre persoanele care au cumpărat sparkle săptămâna anterioară, 80% vor cumpăra din nou și în săptămâna curentă, în timp ce 20% vor cumpăra gleem.

Cum poate să fie utilizată această informație pentru a se ști cu exactitate proporția din piață deținută de fiecare dintre cele două produse?

Primul pas consta în reprezentarea unei matrice de tranziție, care cuprinde probabilitățile variabile.

$$\begin{array}{c} \\ \text{Gleem} \\ \text{Sparkle} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Gleem} & \text{Sparkle} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}8 \end{bmatrix} \end{array}$$

Coloanele arată modificările de preferințe, totalul fiind 1.

După aceasta este reprezentat un vector, corespunzător repartiției inițiale a pieței (în procente).

$$\begin{array}{c} \\ \text{Gleem} \\ \text{Sparkle} \end{array} \begin{bmatrix} 60 \\ 40 \end{bmatrix}$$

Matricea și vectorul sunt înmulțite apoi, pentru a se obține procentele de repartiție a pieței în săptămâna care urmează

$$\begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 60 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 50 \end{bmatrix}$$

respectiv repartiția pieței pentru săptămâna care urmează este preconizată a fi 50:50 pentru gleem și sparkle.

Pentru obținerea previziunilor pentru următoarea săptămână, datele originale trebuie înmulțite cu noua repartiție a pieței

$$\begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 \\ 55 \end{bmatrix}$$ care reprezintă ultima repartiție a pieței.

Acest proces poate să fie continuat pe un interval de timp nedefinit dacă este necesar, dar se va dovedi că, la un moment dat, repartiția pieței se va stabiliza în jurul unor anumite valori. În acest exemplu, după cinci cicluri, repartiția pentru gleem este de 40,625 și repartiția pentru sparkle este de 59,375, valori apropiate de actuala repartiție. Dacă se cere să se afle aceste valori de echilibru, rezolvarea va fi prezentată în continuare.

La echilibru

$$\begin{bmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ S \end{bmatrix}$$

unde G și S reprezintă proporțiile de echilibru.

$$G + S = 1 \qquad S = 1 - G$$

și efectuând substituțiile

$$0,7G + 0,2(1-G) = G$$
$$\therefore 0,5G = 0,2$$
$$\therefore G = 0,4$$

∴Repartiția de echilibru a pieței între cele două produse este: glem 40% și sparkle 60%.

20. Rezumat

a) *Matricea* este o dispoziție rectangulară de cifre. În cazul în care numărul rândurilor este egal cu cel al coloanelor, matricea se numește pătrată.

b) Matricele pot fi *adunate și scăzute*. Fiecare dintre matrice trebuie să aibă aceleași dimensiuni, operația algebrică realizându-se prin scăderea sau adunarea elementelor care au aceleași poziții în matrice.

c) Matricele pot fi *înmulțite* cu un scalar. Matricele de orice dimensiuni pot fi înmulțite cu un număr, numit scalar, caz în care fiecare element al matricei este înmulțit cu scalarul respectiv.

d) *Înmulțirea matricelor*. O matrice de dimensiunile *mxn* poate fi înmulțită cu o matrice de dimensiunile *nxp*, rezultând o matrice de dimensiunea *mxp*. Fiecare rând al matricei A este înmulțit cu fiecare coloană a matricei *B*. $AB \neq BA$.

e) Două matrice speciale sunt *matricea zero*, respectiv orice matrice pătrată ale cărei elemente sunt, în totalitatea lor zero, și *matricea unitară* (*I*), respectiv orice matrice pătrată pe a cărei diagonală care pornește din colțul din stânga sus și se sfârșește în colțul din dreapta jos se află cifra 1, în rest cuprinzând numai zero.

f) *Inversarea matricelor*. Inversa unei matrice, notată A^{-1} sau C^{-1} etc, se calculează printr-un algoritm special, rând cu rând, la care este supusă matricea originală, obiectivul fiind transformarea ei în matricea unitară I. Inversa matricei este matricea care a înlocuit matricea unitară originală.

21. De reținut

Există o relație foarte strânsă între metoda clasică, algebrică, de rezolvare a problemelor de programare liniară, metoda simplex și inversarea matricelor.

Întrebări de autoevaluare. *Numerele dintre paranteze se referă la numerotarea paragrafelor.*

1. Cum se reprezintă dimensiunea unei matrice? (3)
2. Cum se definește vectorul? (4)
3. Care este regula referitoare la dimensiunile matricelor care urmează să fie adunate? (6)
4. Este corectă relația A–B = B–A? (7)
5. Ce este înmulțirea cu un scalar? (8)
6. Care este regula referitoare la dimensiunile matricelor în cazul înmulțirii? (10)
7. Cum se realizează înmulțirea matricelor? (10)
8. Care este definiția matricei unitare? (14)
9. Este corectă relația $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A$? (15)
10. Care sunt pașii ce trebuie urmați pentru calcularea inversei unei matrice? (16)
11. Care sunt condițiile esențiale pentru rezolvarea sistemelor de ecuații prin aplicarea algebrei matriceale? (18)
12. Care este definiția matricei de tranziție probabilistică și ce domeniu de utilizare are?

Exerciții cu răspunsuri

1. $X = \begin{bmatrix} 3 & 11 & 6 \\ 9 & -3 & 8 \\ 5 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ $Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \\ 5 & -8 & 7 \end{bmatrix}$

Să se calculeze:

a) X + Y

b) X – Y

2. Să se înmulțească matricele de la întrebarea numărul 1.

3. Se consideră următoarea matrice: $M = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

Să se calculeze inversa ei (M^{-1}) cu ajutorul determinanților și apoi să se verifice rezultatul obținut prin metoda rând cu rând.

Răspunsuri la exerciții

1. $X + Y = \begin{bmatrix} 3+1 & 11+2 & 6+0 \\ 9+0 & -3+(-4) & 8+5 \\ 5+5 & 0+(-8) & 9+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 13 & 6 \\ 9 & -7 & 13 \\ 10 & -8 & 16 \end{bmatrix}$

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$X - Y = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 6 \\ 9 & 1 & 3 \\ 0 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

2. $$X + Y = \begin{bmatrix} 33 & -86 & 97 \\ 49 & -34 & 41 \\ 50 & -62 & 63 \end{bmatrix}$$

3. $$M = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad |M| = -6$$

$$\therefore M^{-1} = -1/6 \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1/6 & 2/3 \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix}$$

Prin metoda rând cu rând

$$\text{Rândul } 1 - 6 = \begin{bmatrix} 1 & 2/3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/6 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Noul rând } 2 - 1 = \begin{bmatrix} 1 & 2/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/6 & 0 \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Noul rând } 1 - 2/3 \text{ (noul rând 2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/6 & 2/3 \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix}$$

De unde rezultă soluția inversării.

BCU IASI/CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

31. ANALIZA DE ÎNLOCUIRE

1. Obiective

După parcurgerea acestui capitol:

• veți ști ce se înțelege prin decizie de substituție;

• veți putea calcula punctul de cost minim pentru defecțiuni ocazionale ale unor componente;

• veți înțelege principiile pentru înlocuirea la prețuri de cost minime a componentelor care se deteriorează.

2. Deciziile de înlocuire

În mare parte, componentele echipamentelor (respectiv subansambluri, părți, vehicule sau utilaje) trebuie înlocuite la un moment sau altul. Analiza de înlocuire este procesul prin care sunt studiate diferitele consecințe asupra costurilor astfel încât să poată fi luate deciziile optime de înlocuire. Două dintre cele mai des întâlnite probleme de înlocuire se referă la:

a) *Părți sau componente* care *funcționează* adecvat *până la un punct*, dincolo de care se deteriorează, ca de exemplu curelele de ventilatoare, becurile electrice, unele tipuri de unelte.

b) *Componente care se deteriorează*. Acestea sunt, în general, componente destul de scumpe, care ar putea fi menținute în stare de funcționare prin mărirea numărului și a duratei perioadelor de întreținere și reparații, ca de exemplu în cazul vehiculelor, mașinilor-unelte, boilerelor.

Aceste două categorii vor fi discutate în continuare.

3. Componente cu deteriorare bruscă

Adeseori, aceste componente nu sunt foarte costisitoare, dar costurile consecințelor implicate de deteriorarea lor și/sau costurile de înlocuire pot fi semnificative. De aceea, este necesar să se realizeze o estimare a costurilor implicate și să se aleagă oportunitatea cu costul cel mai redus.

Sunt trei categorii de costuri:

BCU LIBRARY UNIVERSITY

a) *Costul de înlocuire a componentei*; acesta este, de regulă, prețul de achiziție al componentei respective în momentul achiziționării sale.

b) *Costurile* implicate de *consecințele deteriorării* componentei respective, care pot să fie *nesemnificative*, dacă este vorba, de exemplu, despre un bec electric care s-a ars sau *substanțiale* dacă este vorba despre deteriorarea unei componente care impune oprirea unei linii de montaj.

c) *Costurile* pe care le implică *înlocuirea* componentei respective. Datorită problemelor legate de poziționarea/accesibilitatea pozițiilor componentelor în cadrul sistemelor în care funcționează, se stabilesc intervale de timp pentru înlocuirea anumitor grupuri de componente sau cu ocazia defectării uneia sunt înlocuite mai multe. De exemplu, dacă un singur bec electric al unei lămpi dintr-o hală industrială se arde, se vor înlocui toate becurile, chiar dacă restul se află în stare de funcțiune.

Ca rezultat al necesității de minimizare a diferitelor costuri care sunt implicate, sunt explorate de regulă mai multe alternative decizionale, dintre care este aleasă apoi alternativa cu prețul de cost cel mai redus. De exemplu, să presupunem că o mașină este alcătuită dintr-un număr de 50 de componente ale căror durate maxime de viață sunt de circa 4 săptămâni. Diferitele alternative sunt:

a) să fie înlocuite numai componentele care s-au defectat;

b) să fie înlocuite toate componentele defecte și toate componentele care au o durată de o săptămână de funcționare;

c) să fie înlocuite toate componentele defecte și toate componentele care au o durată de două săptămâni de funcționare;

d) să fie înlocuite toate componentele defecte și toate componentele care au o durată de trei săptămâni de funcționare;

e) să fie înlocuite toate componentele defecte și toate componentele care au o durată de patru săptămâni de funcționare.

Pe baza probabilității de defectare a unui component la sfârșitul fiecărei săptămâni, se poate calcula prețul de cost al fiecărei alternative, în final fiind posibilă compararea valorilor obținute.

4. Ilustrarea înlocuirii în cazul componentelor cu deteriorare bruscă

Vom folosi următorul exemplu pentru ilustrarea unei astfel de probleme.

Exemplul 1

O componentă specială este utilizată la montarea unei mașini-unelte. Componenta respectivă are o durată de viață limitată, fiind disponibile următoarele date în legătură cu defecțiunile apărute pe parcursul timpului.

	Numărul de săptămâni de la înlocuire			
	1	2	3	4
Procentajul de componente care s-au defectat la sfârșitul fiecărei săptămâni (cumulativ)	20	50	80	100

În același timp sunt în funcțiune un număr de 500 de componente și acestea pot să fie înlocuite în masă, la un cost de 2£ pentru fiecare bucată. Dacă înlocuirea se face individual, pe măsură ce se defectează, costul va fi de 10£ pe bucată, reprezentând 1£ costul componentei și 9£ costul manoperei.

Se cere să se stabilească politica de înlocuire cea mai ieftină pentru companie, prin compararea înlocuirii individuale a componentelor pe măsura defectării lor cu posibilitatea înlocuirii lor în masă, la finalul unui anumit număr de săptămâni de funcționare, concomitent cu înlocuirea componentelor care s-au defectat în intervalul de timp precedent.

Soluția

Proporția săptămânală de defecțiuni

Săptămâna	
1	20%
2	30%
3	30%
4	20%
	100%

∴Durata medie de viață a unui component = (1×0,2) + (2×0,3) + (3×0,3) + (4×0,2)
= 2,5 săptămâni.

$$\therefore \text{Numărul mediu de înlocuiri pe săptămână} = \frac{500}{2,5} = 200.$$

∴Costul înlocuirii individuale pe măsura defectării = 200 × 10£ = 2000£ pe săptămână

Înlocuirea în masă

Pentru calcularea costurilor pe care le implică înlocuirea în masă a componentelor respective este necesar să se stabilească numărul de defecțiuni care pot sa apară săptămânal, aici fiind inclusă și proporția de componente originale care se defectează, plus componentele deja înlocuite care se defectează necesitând o nouă înlocuire.

Numărul defecțiunilor individuale este reprezentat în tabelul 31.1, care cuprinde numărul de defecțiuni apărute la lotul original de 500 de componente și apoi numărul de componente defectate individual care au fost înlocuite.

Tabelul 31.1

Tabelul de defecțiuni

	Săptămâna 1	Săptămâna 2	Săptămâna 3	Săptămâna 4
500 de buc. (originale)	100	150	150	100
100 buc. (înlocuite în săptămâna 1)		20	30	30
150 de buc. (înlocuite în săptămâna 2)			30	45
150 de buc. (înlocuite în săptămâna 3)				30
20 de buc. (înlocuite în săptămâna 2)			4	6
60 de buc. (30+30) (înlocuite în săptămâna 3)				12
Totalul defecțiunilor	100	170	214	223

În concluzie, costul total este reprezentat de costul înlocuirilor în masă, la care se adaugă și costul înlocuirilor individuale.

		Costul total	Costul mediu săptămânal
Săptămâna 1	$100 \times 10£ + 1000£$	2000	2000
2	$270 \times 10£ + 1000£$	3700	1350*
3	$484 \times 10£ + 1000£$	5840	1947
4	$707 \times 10£ + 1000£$	8070	2018

* Așadar, cea mai bună strategie este înlocuirea în masă, în cursul săptămânii a doua de funcționare.

5. Înlocuirea componentelor care se deteriorează

Un camion poate să fie menținut în stare de funcțiune, cu performanțe satisfăcătoare, un număr de, să presupunem, 15 ani, dar pentru aceasta este nevoie de sporirea treptată a perioadelor de întreținere și reparații și a costurilor pe care aceste operații le implică, astfel încât este necesară o analiză atentă a costurilor, pentru alegerea perioadei celei mai optime de înlocuire.

În această problemă sunt implicate *două consecințe majore* legate de costuri: *pierderea anuală de capital* (diferența dintre prețul de piață la începutul și la sfârșitul anului) și *costurile de întreținere*. Cele două costuri sunt cumulate și apoi se calculează media pe un anumit număr de ani, pentru a se afla costurile minime medii anuale.

Această procedură este ilustrată pe baza următorului exemplu.

Exemplul 2

Prețul de cost al unui camion este de £15.000 și se cere să se afle punctul de cost minim pentru înlocuirea sa cu un alt autovehicul, nou. Au fost estimate următoarele date:

Anul	1	2	3	4	5	6	7	8
Valoarea de vânzare la sfârșitul anului, £	12 000	9500	7500	5700	4200	3900	2900	2000
Costurile anuale de întreținere, £	600	800	1050	1400	2100	3500	5000	6800

Observație. Se vor trece cu vederea valoarea în timp a banilor și inflația.

Anul	Pierderea anuală de capital	Pierderea cumulată de capital	Costul anual de întreținere	Costul cumulat de întreținere	Costul anual cumulat	Costul anual mediu
1	3000	3000	600	600	3600	3600
2	2500	5500	800	1400	6900	3450
3	2000	7500	1050	2450	9950	3317
4	1800	9300	1400	3850	13 150	3287
5	1500	10 800	2100	4950	15 750	3150*
6	1300	12 100	3500	8450	20 550	3425
7	1000	13 100	5000	13 450	26 550	3793
8	900	14 000	6800	20 250	36 250	4531

* Momentul cel mai favorabil de înlocuire este la sfârșitul celui de al cincilea an.

6. Sumarul

a) Analiza de înlocuire urmărește stabilirea punctului de cost minim la care trebuie efectuată înlocuirea componentelor.

b) Principalele costuri pe care le implică defectarea bruscă a componentelor sunt: costul de înlocuire a componentei, costurile implicate de consecințe, costurile de instalare.

c) Pentru componentele care pot suferi defecțiuni bruște, înlocuirea tipică în momentul producerii defecțiunii este comparată cu înlocuirea în masă și în funcție de rezultate se alege politica cu costul minim.

d) Principalele costuri pe care le implică componentele care se deteriorează în timp sunt pierderile anuale de capital și creșterea costurilor anuale de întreținere.

e) Se calculează costul anual mediu și se alege situația cu costul minim.

7. De reținut

a) Analiza de înlocuire simplă pornește de la premiza că nu există modificări ale performanțelor sau tehnologiilor. În practică, apar în mod frecvent avantaje care pot fi câștigate prin îmbunătățirea potențială a performanțelor în cazul înlocuirii componentelor. În aceste cazuri, veniturile suplimentare care se pot obține în urma înlocuirii unei componente constituie un factor relevant al analizei.

b) În mod special în cazul componentelor costisitoare, implicațiile legate de lichiditățile monetare disponibile și de impozitare sunt în mod frecvent factori dominanți în deciziile de înlocuire.

Întrebări de autocontrol. *Numerele dintre paranteze se referă la numerotarea paragrafelor.*

1. Care este obiectivul analizei de cost a înlocuirilor? (2)

2. Care sunt cele trei categorii de costuri asociate componentelor care pot prezenta defecțiuni bruște? (3)

3. Care este procedura de aflare a punctului de cost minim în cazul componentelor care se pot deteriora? (5)

Exerciții cu răspunsuri

1. Presupunem că este vorba despre o componentă a unui sistem. Componenta aceasta are o durată de viață limitată și sunt puse la dispoziție o serie de date referitoare la producerea defecțiunilor.

	Numărul de săptămâni de la înlocuire		
	1	2	3
Procentajul cumulat de defecțiuni	30	75	100

În uz curent se află un număr de 1000 de componente, acestea putând fi înlocuite la un preț de cost de 30£ pe bucată.

Se cere să se calculeze:

a) Durata medie de viață a componentei.

b) Numărul mediu de înlocuiri pe săptămână.

c) Costul înlocuirilor individuale pe săptămână.

2. Să se calculeze costul înlocuirii în masă, la sfârșitul fiecărei săptămâni, a componentei de la exercițiul 1 și să se stabilească strategia cea mai bună de înlocuire.

Răspunsuri la exerciții

1. a) Durata medie de viață a componentei = $(1\times0,3) + (2\times0.45) + (3\times0,25) = 1,95$.

b) Numărul mediu de înlocuiri pe săptămână $= \frac{1000}{1,95} = 513.$

c) Costul înlocuirilor individuale = 513 × 30£ = 15 390£.

2.

Tabelul de defectare

	Săptămâna 1	Săptămâna 2	Săptămâna 3
Lotul original (1.000)	300	450	250
300 buc. (înlocuite în săptămâna 1)		90	135
450 de buc. (înlocuite în săptămâna 2)			135
90 de buc. (înlocuite în săptămâna 3)			27
Totalul defecțiunilor	300	540	547

Costul total al înlocuirilor în masă

		Costul total, £	Costuri medii/săptămână, £
Săptămâna 1	5000 + 300 × 30	14 000	14 000
Săptămâna 2	5000 + 840 × 30	30 200	15 100
Săptămâna 3	5000 + 1.387 × 30	46 610	15 537

Prin urmare, cea mai bună strategie de înlocuire este înlocuirea săptămânală în masă.

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

EVALUARE ŞI RECAPITULARE

PARTEA 6

Întrebări de examinare cu răspunsuri

Răspunsurile sunt date începând cu pagina 468

A1. a) Se estimează că durata de viață a unei noi mașini este de șase ani, economiile anuale (la sfârșitul anului) pe care le realizează fiind de £10.000. Care este suma maximă care poate să fie plătită pentru achiziționarea mașinii în acest moment, presupunând că acest preț de cost implică o dobândă compusă de 10% pe an?

b) O mașină nouă costă 25 000£ și poate să înlocuiască un echipament existent, a cărui valoare de casare este de 5000£. Noua mașină poate să aducă economii (la sfârșitul anului) în costurile de producție de 3000£ pe an. Presupunând că achiziționarea ei implică o dobândă compusă de 10% pe an, să se calculeze care ar trebui să fie durata de viață a mașinii pentru ca achiziționarea ei să fie rentabilă?

CIMA Metode Cantitative

A2. Managerii unei companii au în vedere instalarea unui utilaj de dublă glazurare pentru reducerea costurilor de încălzire. Costurile de încălzire pe anul curent au fost de 200 000£. Compania a primit o ofertă pentru achiziționarea unui asemenea utilaj la un preț de cost de 50 000£, compania producătoare garantând o reducere cu 5% a costurilor anuale de încălzire. Pe de altă parte, este estimată o creștere compusă de 3% pe an a costurilor de încălzire. Costurile de capital ale companiei sunt de 12%.

Se cere:

a) Să se estimeze care vor fi costurile de încălzire pe următorii șase ani.

b) Să se estimeze economiile anuale care pot fi aduse costurilor de încălzire cu ajutorul noului utilaj de dublă glazurare în cursul următorilor șase ani.

c) Să se calculeze nivelul maxim al costului pe care este pregătită compania sa-l plătească pentru instalarea utilajului de dublă glazurare, pe baza fluxului monetar scontat.

d) Să se enunțe, împreună cu justificările de rigoare, de ce ar trebui sau nu ar trebui ca această companie să investească în instalarea acestui utilaj.

CIMA Calculul costurilor și Metodele Cantitative

A3. O companie are în vedere lansarea unui nou produs, pentru care ar fi necesară o investiție în echipamente de 150 000£. Durata de viață a proiectului este estimată la cinci ani, ca funcție a ciclului de viață estimat al produsului. De asemeni, se estimează că echipamentul respectiv ar putea fi vândut la un preț de 10 000£ în anul al șaselea.

Studiul de piață a indicat o șansă de 30% ca cererea pentru noul produs să fie scăzută. Fluxurile monetare au fost previzionate după cum urmează:

Anul	Cererea maximă mii £	Cererea minimă mii £
1	60	50
2	62	50
3	65	50
4	70	50
5	70	50

Dacă noul produs ar fi lansat în momentul actual, un alt produs care este deja comercializat și care ar putea să mai rămână pe piață pentru încă cinci ani, ar trebui retras imediat. Dacă ar rămâne pe piață, influxul monetar pe care ar putea să-l aducă ar fi de £12.000 pe an.

Costul de capital al companiei (rata de scont) este de 15% pe an.

Se presupune că toate fluxurile monetare sunt calculate pentru sfârșitul de an.

Se cere:

a) Să se calculeze valoarea netă actuală estimată a noului produs.

b) Oferiți o argumentație companiei dacă este economic sau nu să lanseze noul produs sau să mențină pe piață produsul existent.

ACCA Informația Managerială

A4. Următoarele date sunt corelate cu (i) termenele contractuale de plata (numărul mediu de zile de creditare acceptate) și (ii) duratele pe care companiile trebuie să aștepte plata facturilor (numărul mediu de zile de așteptare) în diferite țări.

Țara	Numărul mediu de zile de creditare	Numărul mediu de zile de așteptare
Danemarca	30	50
Finlanda	30	56
Franța	60	110
Germania	30	48
Olanda	30	52
Irlanda	30	60
Italia	60	90
Norvegia	30	45
Suedia	30	48
Elveția	30	60
Marea Britanie	30	75

(Sursa: Financial Times, *11 februarie 1992)*

Vi se cere:

a) Să formulați și calculați o măsură simplă a „întârzierilor de plată" pentru fiecare din aceste unsprezece țări.

b) Să reprezentați în mod adecvat pe o diagramă „întârzierea de plată" pentru toate aceste unsprezece țări, evidențiindu-se în mod clar numărul de ordine.

c) Să calculați costurile anuale ale „întârzierilor de plată" pentru o nouă companie în primul său an comercial, care trebuia să primească o plată de 10 000£ în prima zi a fiecărei luni, dar primește plata cu o întârziere de exact două luni. Rata lunară a dobânzii este de 1%.

Suma, notată S, a unei progresii geometrice cu N termeni, primul fiind A și rația R, este dată de următoarea relație:

$$S = \frac{A(R^N - 1)}{(R - 1)}.$$

CIMA Metode Cantitative

A5. Spitalul St. Swithin's are trei departamente, care deservesc principalele departamente ale spitalului. Acestea sunt: întreținerea, spălătoria și cateringul. În fiecare caz, serviciile asigurate sunt oferite de chiar departamentul respectiv și/sau în parte de celelalte departamente de servicii. Înregistrările anterioare arată că proporțiile acestor servicii au fost următoarele:

Întreținere: 5% pentru propriul serviciu, 25% și 10% pentru spălătorie și respectiv catering.

Spălătorie: 5% pentru întreținere și 10% pentru catering.

Catering: 5% pentru propriul serviciu, 10% și 15% pentru întreținere și respectiv spălătorie.

Pe o perioadă dată, costurile directe alocate pentru funcționarea fiecăruia dintre aceste departamente au fost:

Întreținere	56 000£
Spălătorie	250 000£
Catering	35 000£

Vi se cere:

a) a_1) Să formulați ecuațiile costurilor brute descriind activitatea fiecăruia dintre departamentele de service.

a_2) Să demonstrați, algebric și numeric, pașii necesari în algebra matriceală pentru obținerea inversei matricei pentru calcularea necunoscutelor din ecuațiile (i) de mai sus (nu este necesară inversarea matricei).

b) Se dau următoarele valori ca fiind inversa matricei problemei (a).

1,083	0,067	0,125
0,293	1,034	0,194
0,145	0,116	1,086

(Numerele respective au fost rotunjite la trei zecimale)

Vi se cere ca, folosind inversa matricei, să calculați costul brut al activității fiecărui departament. Este necesar să fie prezentat în întregime calculul.

CIMA Tehnici Cantitative

Întrebări de examinare fără răspunsuri

B1. Divizia de servicii manageriale a unei companii a fost solicitată să evalueze următoarele propuneri de întreținere a unui boiler cu durata de viață de șapte ani.

Propunerea 1

Furnizorul utilajului își oferă serviciile de întreținere și reparații la un cost fix anual de 13 000£ pe baza unui contract cu durata de sapte ani.

Propunerea 2

Compania poate să efectueze singură serviciul de întreținere și reparare a utilajului, la un preț de cost de 10 000£ calculat la data curentă, cu o creștere anuală estimată la 5% și cu un salt substanțial la sfârșitul anului al patrulea, implicând un cost suplimentar de 25 0000£.

Rata de scont este de 19% și toate plățile ar trebui să fie făcute la sfârșitul anului.

Vi se cere:

a) Să calculați costurile de întreținere pentru fiecare an, în ipoteza în care compania și-ar asigura serviciile de întreținere și reparare.

b) Să calculați valoarea actuală a întreținerii, în ipoteza în care compania și-ar asigura serviciile de întreținere și reparare.

c) Să calculați valoarea actuală a contractului de întreținere care ar putea să fie semnat cu furnizorul utilajului, în vederea asigurării serviciilor de întreținere și reparare în condițiile menționate.

CIMA Calculul Costurilor și Metodele Cantitative

B2. O sondă de petrol produce curent (calculat la sfârșitul anului) un flux monetar anual de 0,5 milioane £. Prospecțiunile geologice cele mai avizate au sugerat că rezerva zăcământului este suficientă pentru încă zece ani, la rata curentă de exploatare. Se poate instala o pompă specială, la un cost de 0,75£ milioane, care ar putea să dubleze rata de exploatare a zăcământului, înjumătățind însă durata vieții acestuia. După epuizarea zăcământului, prețul de vânzare al pompei ar putea să fie de 100 000£. Este avută în vedere instalarea imediată a acestei pompe. Câștigul anului anterior a fost distribuit și echipamentul actual nu are nici un preț de vânzare.

Vi se cere:

a) Să se tabeleze efectul anual asupra câștigurilor, pe următorii zece ani, a introducerii noii pompe.

b) Să se compare valoarea netă actuală a opțiunilor când costul de capital al firmei este de 8% pe an și să se interpreteze rezultatul.

c) Să se stabilească dacă noua pompă ar trebui să fie instalată, în condițiile în care costurile de capital ale firmei ar fi de 12%, cu argumentările de rigoare.

CIMA Metode Cantitative

B3. a) Într-un termen de exact cinci ani începând din acest moment, o firmă ar trebui să facă o înlocuire capitală de echipamente, la un cost estimat la momentul respectiv la 0,5£ milioane. Managerii au decis să înființeze un fond de rezervă în care să fie depuse douăsprezece sume egale, la intervale trimestriale, prima depunere fiind efectuată în momentul acesta. Rata dobânzii compuse este de 2% pe trimestru.

Vi se cere să calculați sumele trimestriale necesare pentru Fondul de rezerva.

b) Trebuie achitată o poliță cu dobândă fixă, pe termen de zece ani, în sumă totală de 100 000£, în 40 de rate trimestriale, în arierate. Dobânda este de 3% pe trimestru din capitalul creditat.

Vi se cere:

b_1) Să se afle suma la care se va ridica investiția de 100 000£ în zece ani, pentru o rată trimestrială compusă de 3%.

b_2) Folosind rezultatul de la punctul (b_1), sau pe orice altă cale, să se calculeze ratele trimestriale ale poliței.

b_3) Să se afle rata anuală efectivă a dobânzii poliței.

Suma, notată S, a unei progresii geometrice cu N termeni, în care primul termen este A și rația comună R, este dată de urmatoarea relație matematică:

$$S = \frac{A(R^N - 1)}{(R - 1)}.$$

CIMA Metode Cantitative

B4. O companie este alcătuită din trei departamente de servicii (S_1, S_2, S_3) și două departamente de producție (P_1, P_2).

Analiza activității departamentelor de servicii este următoarea:

Servicii oferite de	Servicii oferite către %				
	S_1	S_2	S_3	P_1	P_2
S_1		50		30	20
S_2	20		20	20	40
S_3	20			30	50

Costurile alocate direct departamentelor de servicii sunt (pe an):

Departamentul, £	Variabila, £	Fixă, £	Total, £
S_1	40 000	30 000	70 000
S_2	120 000	80 000	200 000
S_3	60 000	40 000	100 000

Vi se cere:

a) Să derivați ecuațiile costurilor pentru a obține costurile totale brute ale activităților fiecăruia dintre departamentele de servicii.

b) Să calculați costurile totale brute ale fiecăruia dintre departamentele de servicii după realocarea costurilor serviciilor asigurate intradepartamental.

c) Dacă P_1 și respectiv P_2 produc anual 400 000 și 200 000 de unități de produs finit, să se determine costurile cu fiecare dintre departamentele de service care grevează costurile produselor.

d) Cunoscându-se că S_3 produce 90.000 de unități de servicii pe an, comentați dacă este sau nu este recomandabil să se accepte oferta unui agent economic extern, care poate să furnizeze același număr de unități de servicii la un cost de 0,90£ pe unitate.

CIMA Tehnici Cantitative

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

TABELE STATISTICE ŞI FINANCIARE

Tabelul I *

Ariile subiacente curbei standard normale, de la 0 la Z

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0754
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2258	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2518	0,2549
0.7	0,2580	0,2612	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2996	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4583	0,4591	0,4599	0,04608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

*Din SPEIGEL, Copyright 1972 McGraw-Hill Publishing Co Ltd.
Cu permisiunea McGraw-Hill Book Company

BCU CLUJ / UNIVERSITY LIBRARY

Tabelul II

Distribuție normală

z	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
p	0,500	0,460	0,421	0,382	0,345	0,308	0,274	0,242	0,212	0,184
z	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
p	0,159	0,136	0,115	0,097	0,081	0,067	0,055	0,045	0,036	0,029
z	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9
p	0,023	0,018	0,014	0,011	0,008	0,006	0,005	0,003	0,003	0,002
z	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4					
p	0,0013	0,0010	0,0007	0,0005	0,0003					

Tabelul III

Procentajul punctelor distribuției *t*

Tabelul conține valori ale ariilor de la ambele capete

Grade de libertate	Ariile combinate din ambele tabele			
	0,10	0,05	0,02	0,01
$v = 1$	6,314	12,706	31,821	63,657
2	2,920	4,303	6,965	9,925
3	2,353	3,182	4,541	5,841
4	2,132	2,776	3,747	4,604
5	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,493	2,447	3,143	3,707
7	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,725	2,086	2,528	2,845

Grade de libertate	Ariile combinate din ambele tabele			
	0,10	0,05	0,02	0,01
$v = 21$	1,721	2,080	2,518	2,831
22	1,717	2,074	2,508	2,819
23	1,714	2,069	2,500	2,807
24	1,711	2,064	2,492	2,797
25	1,708	2,060	2,485	2,787
26	1,706	2,056	2,479	2,779
27	1,703	2,052	2,473	2,771
28	1,701	2,048	2,467	2,763
29	1,699	2,045	2,462	2,756
30	1,697	2,042	2,457	2,750
40	1,684	2,021	2,423	2,704
60	1,671	2,000	2,390	2,660
12	1,658	1,980	2,358	2,6170
∞	1,645	1,960	2,326	2,576

BCU

Tabelul IV

Distribuția χ^2

Grade de libertate	Nivel de semnificație	
	5%	1%
v = 1	3,841	6,635
2	5,991	9,210
3	7,815	11,345
4	9,488	13,277
5	11,070	15,086
6	12,592	16,812
7	14,067	18,475
8	15,5507	20,090
9	16,919	21,666
10	18,307	23,209
11	19,675	24,725
12	21,026	26,217
13	22,362	27,688
14	23,685	29,141
15	24,996	30,578
16	26,296	31,999
17	27,587	33,409
18	28,869	34,805
19	30,144	36,191
20	31,410	37,566
21	32,671	38,932
22	33,924	40,289
23	35,172	41,638
24	36,415	42,979
25	37,652	44,314

BCU IAȘI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Tabelul V

Punctele procentuale ale distribuţiei f

v_2 = grade de libertate pentru numărător	v_1 = grade de libertate pentru numărător: 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
	(4052)	(4999)	(5403)	(5625)	(5764)	(5859)	(5928)	(5981)	(6022)	(6056)	(6082)	(6106)
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
	(98,49)	(99,01)	(99,17)	(99,25)	(99,30)	(99,33)	(99,34)	(99,36)	(99,38)	(99,40)	(99,41)	(99,42)
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
	(34,12)	(30,81)	(29,46)	(28,71)	(28,24)	(27,91)	(27,67)	(27,49)	(27,34)	(27,23)	(27,13)	(27,05)
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
	(21,20)	(18,00)	(1,69)	(15,98)	(15,52)	(15,21)	(14,98)	(14,80)	(15,68)	(14,64)	(14,45)	(14,37)
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
	(16,26)	(13,27)	(12,06)	(11,39)	(10,97)	(10,67)	(10,45)	(10,27)	(10,15)	(10,05)	(9,98)	(9,89)
6	5,59	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
	(13,75)	(10,92)	(9,78)	(9,15)	(8,75)	(8,47)	(8,26)	(8,10)	(7,98)	(7,87)	(7,79)	(7,72)
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
	(12,25)	(9,55)	(8,45)	(7,85)	(7,46)	(7,19)	(7,00)	(6,84)	(6,71)	(6,62)	(6,54)	(6,47)
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
	(11,26)	(8,65)	(7,59)	(7,01)	(6,93)	(6,37)	(6,19)	(6,08)	(5,91)	(5,82)	(5,74)	(5,67)
9	5,12	4,26	3,83	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
	(10,56)	(8,02)	(6,99)	(6,42)	(6,06)	(5,80)	(5,62)	(5,47)	(5,35)	(5,38)	(5,18)	(5,11)
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
	(10,04)	(7,58)	(6,55)	(5,99)	(5,64)	(5,39)	(5,21)	(5,06)	(4,93)	(4,85)	(4,76)	(4,71)
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
	(9,65)	(7,20)	(6,22)	(5,67)	(5,32)	(5,07)	(4,88)	(4,74)	(4,63)	(4,54)	(4,46)	(4,40)
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,70	2,73	2,69
	(9,33)	(6,93)	(5,95)	(5,41)	(5,06)	(4,82)	(4,65)	(4,50)	(4,39)	(4,30)	(4,23)	(4,18)

Valorile lui f:
Capătul din dreapta al distribuţiei pentru P = 0,05
Capătul din dreapta al distribuţiei pentru P = 0,01 (în paranteze).

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Tabelul VI

a) Tabelul probabilităților Poisson individuale

	Numărul de evenimente (x)						
Media m	0	1	2	3	4	5	6
0,1	0,9048	0,0905	0,0045	0,0002	0,000	0,000	0,000
0,2	0,8187	0,1637	0,0164	0,0011	0,0001	0,000	0,000
0,3	0,7408	0,2222	0,0333	0,0033	0,0003	0,000	0,000
0,4	0,6703	0,2681	0,536	0,0072	0,0007	0,0001	0,000
0,5	0,6065	0,3033	0,0758	0,0126	0,0016	0,0002	0,000
0,6	0,5488	0,3293	0,0988	0,0198	0,0030	0,0004	0,000
0.7	0,4966	0,3476	0,1217	0,0284	0,0050	0,0007	0,0001
0,8	0,4493	0,3595	0,1438	0,0383	0,0077	0,0012	0,0002
0,9	0,4066	0,3659	0,1647	0,0494	0,0111	0,0020	0,0003
1,0	0,3679	0,3679	0,1839	0,0613	0,0153	0,0031	0,0005

Tabelul cuprinde probabilitățile unui număr dat de evenimente pentru o medie (m).

b) Tabelul probabilităților Poisson cumulate

	Numărul de evenimente (x)						
Media m	0	1	2	3	4	5	6
0,1	0,9048	0,9953	0,9998	1,00	1,00	1,00	1,00
0,2	0,8187	0,9824	0,9988	0,9999	1,00	1,00	1,00
0,3	0,7408	0,9630	0,9963	0,9996	0,9999	1,00	1,00
0,4	0,6703	0,9348	0,9920	0,9992	0,9999	1,00	1,00
0,5	0,6065	0,9098	0,9856	0,9982	0,9998	1,00	1,00
0,6	0,5488	0,8781	0,9769	0,9967	0,9997	1,00	1,00
0,7	0,4966	0,8442	0,9659	0,9943	0,993	1,00	1,00
0,8	0,4493	0,8088	0,9526	0,9909	0,9986	0,9998	1,00
0,9	0,4066	0,7725	0,9372	0,9866	0,9977	0,9997	1,00
1,0	0,3679	0,7358	0,9197	0,9810	0,9963	0,9994	0,9999

Tabelul indică probabilitatea găsirii unui număr x sau mai mic de evenimente pentru o medie (m) dată.

BCU IASI/CENTRALA UNIVERSITARA

Tabelul VII

Rate compuse. Tabelul indică valoarea unității monetare pentru o rată compusă $(1 + r)^n$.

Ani n	Ratele dobânzilor (r) %										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1,010	1,020	1,030	1,040	1,050	1,060	1,070	1,080	1,090	1,100	1,110
2	1,020	1,040	1,061	1,082	1,102	1,124	1,145	1,166	1,188	1,210	1,232
3	1,030	1,061	1,093	1,125	1,158	1,191	1,225	1,260	1,295	1,331	1,368
4	1,041	1,082	1,126	1,167	1,216	1,262	1,311	1,360	1,412	1,464	1,518
5	1,051	1,104	1,159	1,217	1,276	1,338	1,403	1,469	1,539	1,610	1,685
6	1,061	1,126	1,194	1,265	1,340	1,419	1,501	1,587	1,677	1,772	1,870
7	1,072	1,149	1,230	1,316	1,407	1,504	1,606	1,714	1,828	1,949	2,076
8	1,083	1,172	1,267	1,369	1,477	1,594	1,718	1,851	1,993	2,144	2,304
9	1,094	1,195	1,305	1,423	1,551	1,689	1,838	1,999	2,172	2,358	2,558
10	1,105	1,219	1,344	1,480	1,629	1,791	1,967	2,159	2,367	2,594	2,839
11	1,116	1,243	1,384	1,539	1,710	1,898	2,105	2,332	2,580	2,853	3,152
12	1,127	1,268	1,426	1,601	1,796	2,012	2,252	2,519	2,813	3,138	3,498
13	1,138	1,294	1,468	1,665	1,886	2,133	2,410	2,720	3,066	3,452	3,883
14	1,149	1,319	1,513	1,732	1,980	2,261	2,578	2,937	3,342	3,797	4,310
15	1,161	1,346	1,558	1,801	2,079	2,397	2,759	3,172	3,642	4,177	4,785
20	1,220	1,486	1,806	2,191	2,653	3,207	3,870	4,661	5,604	6,727	8,062
25	1,282	1,641	2,094	2,666	3,386	4,292	5,427	6,848	8,623	10,835	13,585

Ani n	Ratele dobânzilor (r) %										
	12	13	14	15	16	17	18	19	20	25	30
1	1,120	1,130	1,140	1,150	1,160	1,170	1,180	1,190	1,200	1,250	1,300
2	1,254	1,277	1,297	1,322	1,346	1,367	1,392	1,416	1,440	1,562	1,690
3	1,405	1,443	1,481	1,521	1,561	1,602	1,643	1,685	1,728	1,953	2,197
4	1,573	1,630	1,689	1,749	1,811	1,874	1,939	2,005	2,074	2,441	2,856
5	1,762	1,842	1,925	2,011	2,100	2,192	2,288	2,386	2,488	3,052	3,713
6	1,974	2,082	2,195	2,313	2,436	2,565	2,700	2,840	2,986	3,815	4,827
7	2,211	2,353	2,502	2,660	2,826	3,001	3,186	3,379	3,583	4,768	6,275
8	2,476	2,658	2,853	3,059	3,278	3,511	3,759	4,021	4,300	5,960	8,157
9	2,773	3,004	3,252	3,518	3,803	4,108	4,435	4,785	5,159	7,451	10,604
10	3,106	3,395	3,707	4,046	4,411	4,807	5,234	5,695	6,192	9,313	13,786
11	3,478	3,836	4,226	4,662	5,117	5,624	6,176	6,777	7,430	11,641	17,922
12	3,896	4,334	4,818	5,350	5,936	6,580	7,288	8,064	8,916	14,552	23,298
13	4,363	4,898	5,492	6,153	6,886	7,699	8,599	9,596	10,699	18,190	30,287
14	4,887	5,535	6,261	7,076	7,988	9,007	10,147	11,420	12,839	22,737	39,374
15	5,474	6,254	7,138	8,137	9,265	10,539	11,974	13,589	15,407	28,422	51,186
20	9,646	11,523	13,743	15,366	19,461	23,106	27,393	32,429	38,338	86,736	190,050
25	17,000	21,230	26,462	32,920	40,874	50,658	62,669	77,388	95,396	264,698	705,641

BCU

Tabelul VIII

Factorii valorii actuale. Valoarea actuală pentru 1£ $(1 + r)^{-n}$

Perioade n	Ratele dobânzilor r, %								
	1%	2%	4%	6%	8%	10%	12%	14%	15%
1	0,990	0,980	0,962	0,943	0,926	0,909	0,893	0,877	0,870
2	0,980	0,961	0,925	0,890	0,857	0,826	0,797	0,769	0,756
3	0,971	0,942	0,889	0,840	0,794	0,751	0,712	0,675	0,658
4	0,961	0,924	0,855	0,792	0,735	0,683	0,636	0,592	0,572
5	0,951	0,906	0,822	0,747	0,681	0,621	0,567	0,519	0,497
6	0,942	0,888	0,790	0,705	0,630	0,564	0,507	0,456	0,432
7	0,933	0,871	0,760	0,665	0,583	0,513	0,452	0,400	0,376
8	0,923	0,853	0,731	0,627	0,540	0,467	0,404	0,351	0,327
9	0,914	0,837	0,703	0,592	0,500	0,424	0,361	0,308	0,284
10	0,905	0,820	0,676	0,558	0,463	0,386	0,322	0,270	0,247
11	0,0896	0,804	0,650	0,527	0,429	0,350	0,287	0,237	0,215
12	0,887	0,788	0,625	0,497	0,397	0,319	0,257	0,208	0,187
13	0,879	0,773	0,601	0,469	0,368	0,290	0,229	0,182	0,163
14	0,870	0,758	0,577	0,442	0,340	0,263	0,205	0,160	0,141
15	0,861	0,743	0,555	0,417	0,315	0,239	0,183	0,140	0,123
16	0,853	0,728	0,534	0,394	0,292	0,218	0,163	0,123	0,107
17	0,855	0,714	0,513	0,371	0,270	0,198	0,146	0,108	0,093
18	0,836	0,700	0,494	0,350	0,250	0,180	0,130	0,095	0,081
19	0,828	0,686	0,475	0,331	0,232	0,164	0,116	0,083	0,070
20	0,820	0,675	0,456	0,312	0,215	0,149	0,104	0,073	0,061
21	0,811	0,660	0,439	0,294	0,199	0,135	0,093	0,064	0,053
22	0,803	0,647	0,422	0,278	0,184	0,123	0,083	0,056	0,046
23	0,795	0,634	0,406	0,262	0,170	0,112	0,074	0,049	0,040
24	0,788	0,622	0,390	0,247	0,158	0,102	0,066	0,043	0,035
25	0,780	0,610	0,375	0,233	0,146	0,092	0,059	0,038	0,030

Perioade n	Ratele dobânzilor r, %								
	16%	18%	20%	22%	24%	25%	26%	28%	30%
1	0,862	0,847	0,833	0,820	0,806	0,800	0,794	0,781	0,769
2	0,743	0,718	0,694	0,672	0,650	0,640	0,630	0,610	0,592
3	0,641	0,609	0,579	0,551	0,524	0,512	0,500	0,477	0,455
4	0,552	0,516	0,482	0,451	0,423	0,410	0,397	0,373	0,350
5	0,476	0,437	0,402	0,370	0,341	0,328	0,315	0,291	0,269
6	0,410	0,370	0,335	0,303	0,275	0,262	0,250	0,227	0,207
7	0,354	0,314	0,279	0,249	0,222	0,210	0,198	0,178	0,159
8	0,305	0,266	0,233	0,204	0,179	0,168	0,157	0,139	0,123
9	0,263	0,225	0,194	0,167	0,144	0,134	0,125	0,108	0,094
10	0,227	0,191	0,162	0,137	0,116	0,107	0,199	0,085	0,075
11	0,195	0,162	0,135	0,112	0,094	0,086	0,179	0,066	0,056
12	0,168	0,137	0,112	0,192	0,076	0,069	0,162	0,052	0,043
13	0,145	0,116	0,093	0,075	0,061	0,055	0,050	0,040	0,033
14	0,125	0,099	0,178	0,062	0,049	0,044	0,039	0,032	0,025
15	0,108	0,084	0,065	0,051	0,040	0,035	0,031	0,025	0,020
16	0,093	0,071	0,054	0,042	0,032	0,028	0,025	0,019	0,015
17	0,080	0,060	0,045	0,034	0,026	0,023	0,020	0,015	0,012
18	0,069	0,051	0,038	0,028	0,021	0,018	0,016	0,012	0,009
19	0,060	0,043	0,031	0,023	0,017	0,014	0,012	0,009	0,007
20	0,051	0,037	0,026	0,019	0,014	0,012	0,010	0,007	0,005
21	0,044	0,031	0,022	0,015	0,011	0,009	0,008	0,006	0,004
22	0,038	0,026	0,018	0,013	0,009	0,007	0,006	0,004	0,003
23	0,033	0,022	0,015	0,010	0,007	0,006	0,005	0,003	0,002
24	0,028	0,019	0,011	0,008	0,006	0,005	0,004	0,003	0,002
25	0,024	0,016	0,010	0,007	0,005	0,004	0,003	0,002	0,001

Tabelul IX

Factorii de anuitate pentru valoarea actuală

Valoarea actuală pentru suma de 1£ care urmează să fie primită un număr de ani n $\left(\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right)$

	Ratele dobânzilor (r) %								
Perioade n	1%	2%	4%	6%	8%	10%	12%	14%	15%
1	0,990	0,980	0,962	0,943	0,926	0,909	0,893	0,877	0,870
2	1,970	1,942	1,886	1,833	1,783	1,736	1,690	1,647	1,626
3	2,941	2,884	2,775	2,675	2,577	2,487	2,402	2,322	2,283
4	3,902	3,808	3,610	3,465	3,312	3,170	3,037	2,914	2,855
5	4,853	4,713	4,452	4,212	3,996	3,791	3,605	3,433	3,352
6	5,795	5,601	5,242	4,917	4,623	4,355	4,111	3,889	3,784
7	6,728	6,472	6,002	5,582	5,206	4,868	4,564	4,288	4,160
8	7,652	7,325	6,733	6,210	5,747	5,335	4,968	4,639	4,487
9	8,566	8,162	7,435	6,802	6,247	5,759	5,328	4,946	4,772
10	9,471	8,983	8,111	7,360	6,710	6,145	5,650	5,216	5,019
11	10,368	9,787	8,760	7,887	7,139	6,495	5,988	5,453	5,234
12	11,255	10,575	9,385	8,384	7,536	6,814	6,194	5,660	5,421
13	12,114	11,343	9,986	8,853	7,904	7,103	6,424	5,842	5,583
14	13,004	12,106	10,563	9,295	8,244	7,367	6,628	6,002	5,724
15	13,865	12,849	11,118	9,712	8,559	7,606	6,811	6,142	5,847
16	14,718	13,578	11,652	10,106	8,851	7,824	6,974	6,265	5,954
17	15,562	14,292	12,166	10,477	9,122	8,022	7,120	6,373	6,047
18	16,328	14,992	12,659	10,828	9,372	8,201	7,250	6,467	6,128
19	17,226	15,678	13,134	11,158	9,604	8,365	7,366	6,550	6,198
20	18,046	16,351	13,590	11,470	9,818	8,514	7,469	6,623	6,259
21	18,857	17,011	14,029	11,764	10,017	8,649	7,562	6,687	6,312
22	19,660	17,658	14,451	12,042	10,201	8,772	7,645	6,743	6,369
23	20,456	18,292	14,857	12,303	10,371	8,883	7,718	6,792	6,399
24	21,243	18,914	15,247	12,550	10,529	8,985	7,784	6,815	6,434
25	22,023	19,523	15,622	12,783	10,675	9,077	7,843	6,873	6,464

	Ratele dobânzilor (r) %							
Perioade n	16%	18%	20%	22%	24%	25%	26%	28%	30%
1	0,862	0,847	0,833	0,820	0,806	0,800	0,794	0,781	0,769
2	1,605	1,566	1,528	1,492	1,457	1,440	1,424	1,392	1,361
3	2,246	2,174	2,106	2,042	1,981	1,952	1,923	1,868	1,816
4	2,798	2,690	2,589	2,494	2,404	2,362	2,320	2,241	2,166
5	3,274	3,127	2,991	2,864	2,745	2,689	2,635	2,532	2,436
6	3,685	3,498	3,326	3,167	3,020	2,951	2,885	2,759	2,643
7	4,039	3,812	3,605	3,416	3,242	3,161	3,083	2,937	2,802
8	4,344	4,078	3,837	3,619	3,421	3,329	3,421	3,076	2,925
9	4,607	4,303	4,031	3,786	3,566	3,463	3,366	3,184	3,019
10	4,833	4,949	4,192	3,923	3,682	3,571	3,465	3,269	3,092
11	5,029	4,636	4,327	4,035	3,766	3,656	3,544	3,335	3,147
12	5,197	4,793	4,439	4,127	3,851	3,725	3,606	3,387	3,190
13	5,342	4,910	4,533	4,203	3,912	3,780	3,656	3,427	3,223
14	5,468	5,008	4,611	4,265	3,961	3,824	3,965	3,459	3,249
15	5,575	5,092	4,675	4,315	4,001	3,859	3,726	3,483	3,268
16	5,669	5,162	4,730	4,357	4,033	3,887	3,751	3,503	3,283
17	5,749	5,222	4,775	4,391	4,059	3,910	3,771	3,518	3,295
18	5,818	5,273	4,812	4,419	4,080	3,928	3,786	3,529	3,304
19	5,877	5,316	4,844	4,442	4,097	3,942	3,799	3,539	3,311
20	5,929	5,353	4,870	4,460	4,110	3,954	3,808	3,546	3,316
21	5,973	5,384	4,891	4,476	4,121	3,963	3,816	3,551	3,320
22	6,011	5,410	4,909	4,488	4,130	3,970	3,822	3,556	3,323
23	6,044	5,432	4,925	4,499	4,137	3,976	3,827	3,559	3,325
24	6,073	5,451	4,937	4,507	4,143	3,981	3,831	3,562	3,327
25	6,097	5,467	4,948	4,514	4,147	3,985	3,834	3,564	3,329

RĂSPUNSURI LA ÎNTREBĂRI

Recapitulare și revizie partea 1

A1. $P(A \text{ lansare}) = P(A) = 0{,}4$ și $P(\overline{A}) = 0{,}6$

$P(B \text{ lansare}) = P(B) = 0{,}7$ și $P(\overline{B}) = 0{,}3$

$P(C \text{ lansare}) = P(C) = 0{,}2$ și $P(\overline{C}) = 0{,}8$

a_1) Fără concurență la lansare.

$= P(\overline{A}) \times P(\overline{B}) \times P(\overline{C}) = 0{,}6 \times 0{,}3 \times 0{,}8$

$= 0{,}144.$

a_2) A și B sunt lansate, dar nu și C.

$= P(A) \times P(B) \times P(\overline{C}) = 0{,}4 \times 0{,}7 \times 0{,}8$

$= 0{,}224.$

a_3) Cu un singur competitor.

$= P(A$ singurul competitor$) + P(B$ singurul competitor$) + P(C$ singurul competitor$)$

$= (0{,}4 \times 0{,}3 \times 0{,}8) + (0{,}6 \times 0{,}7 \times 0{,}8) + (0{,}6 \times 0{,}3 \times 0{,}2)$

$= 0{,}468.$

A2. Notații:

I – îmbunătățirea stării FI – fără îmbunătățiri

T – cu tratament P – efect placebo

a) Prob. (I) = Prob. $(T\&I)$ + Prob. $(P\&I)$

$$= \frac{600}{1000} + \frac{125}{1000} = \frac{725}{1000}$$

$= 0{,}725.$

b) $\text{Prob.}(I/T) = \dfrac{\text{Prob.}(T \,\&\, I)}{\text{Prob.}(T)}$

$$= \frac{600}{1000}$$

$= 0{,}6.$

c) $\text{Prob.}(T/FI) = \dfrac{\text{Prob.}(T \,\&\, FI)}{\text{Prob.}(FI)}$

$$= \frac{0{,}15}{0{,}275}$$

$= 0{,}546.$

d) $\text{Prob.}(P/I) = \dfrac{\text{Prob.}(P \,\&\, I)}{\text{Prob.}(I)}$

$$= \frac{125}{1000}$$

$= 0{,}125.$

BCU IAȘI - CENTRALĂ UNIVERSITY LIBRARY

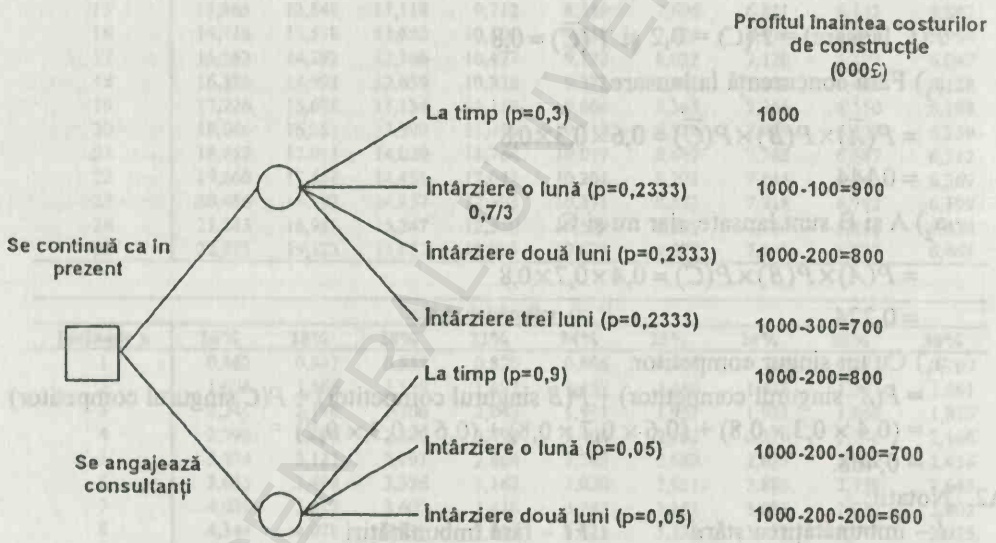
$$\text{Prob.}(T) = \text{Prob.}(T \,\&\, I) + \text{Prob.}(\dot{T} \,\&\, N) = \frac{600}{1000} + \frac{150}{1000} = \frac{750}{1000} = 0{,}75.$$

Prin urmare, $\text{Prob.}(P/I) = \dfrac{0{,}125}{0{,}725} = 0{,}172$

Prin urmare, $\text{Prob.}(I/T) = \dfrac{0{,}6}{0{,}75} = 0{,}8.$

e) Un număr de 750 de voluntari au fost supuși tratamentului, dintre care 600 au prezentat îmbunătățirea stării de sănătate, respectiv 80%, în timp ce un număr de 250 de voluntari au fost supuși tratamentului placebo, dintre aceștia numai 125 prezentând o îmbunătățire a stării de sănătate, respectiv 50%. Aceste rezultate indică faptul că tratamentul poate să fie eficient, dar trebuie reținut faptul că oamenii au oricum tendința de a se simți mai bine.

A3. a) Diagrama



b) Calculele pentru valoarea estimată, în £

VE (în condițiile actuale) = $(0{,}3 \times 1.000) + (0{,}2333 \times 900) + (0{,}2333 \times 800) + (0{,}2333 \times 700)$
$= 860.$

VE (cu consultanți) = $(0{,}9 \times 800) + (0{,}05 \times 700) + (0{,}05 \times 600)$
$= 785.$

c) Strict pe baza calculelor pentru valoarea estimată, compania nu ar trebui să angajeze consultanți. Pe de altă parte, aceste rezultate se bazează pe estimările veniturilor și pe probabilități care este posibil să nu fie reflectate în realitate. În afara calculelor financiare, conducerea poate să aibă în vedere utilizarea unor consultanți pentru îmbunătățirea șanselor de respectare a termenelor contractuale, în acest fel întreținându-și reputația.

A4. a) Numărul estimat de defecțiuni în perioada de funcționare a utilajului
$= [(0 \times 0{,}15) + (1 \times 0{,}3) + (2 \times 0{,}25) + (3 \times 0{,}2) + (4 \times 0{,}1)]$
$= 1{,}8.$

b) Următorul tabel prezintă costurile totale (exprimate în mii de £) pentru fiecare combinație de tipul număr de defecțiuni/cantitatea comandată.

		Nr. de defecțiuni				
		0	1	2	3	4
Nr. de componente comandate	0	0	20	40	60	80
	1	5	5	25	45	65
	2	10	10	10	30	50
	3	15	15	15	15	35
	4	20	20	20	20	20

de unde, de exemplu, pentru o comandă de 3 componente, la un număr de 4 defecțiuni, rezultă drept costuri 3 componente de schimb + 1 defecțiune majoră, la un cost de $(3\times 5000) + (1\times 20\,000) = 35\,000$£

c) Valorile estimate, folosind valorile din tabelul de mai sus și probabilitățile de producere a defecțiunilor.

Comanda C $= (0 \times 0{,}15) + (20 \times 0{,}3) + (40 \times 0{,}25) + (60 \times 0{,}2) + (80 \times 0{,}1)$
$= 36.$

Calcule similare dau următoarele valori estimate:

Cantitatea comandată	0	1	2	3	4
EV('000)	36	24	18	17*	20

* Cel mai redus preț de cost se obține pentru o comandă de 3 componente.

d) Costul estimat folosind informația perfectă este:
$(0 \times 0{,}15) + (5 \times 0{,}3) + (10 \times 0{,}25) + (15 \times 0{,}02) + (20 \times 0{,}1) = 9$
$\therefore$ VE pentru informația perfectă $= 17\,000 - 9000 = 8000.$

e) Următorul tabel arată utilitatea pentru perechile defecțiuni/cantitatea comandată.

		Nr. de defecțiuni					Utilitatea estimată
		0	1	2	3	4	
Nr. de componente comandate	0	1,00	0,86	0,64	0,34	0	0,636
	1	0,97	0,97	0,81	0,57	0,26	0,779
	2	0,94	0,94	0,94	0,76	0,50	0,860
	3	0,90	0,90	0,90	0,90	0,70	0,880*
	4	0,86	0,86	0,86	0,86	0,86	0,860
	probabilitate	0,15	0,15	0,25	0,20	0,10	

* Se observă că în cazul comandării unui număr de trei componente de rezervă se asigură cea mai bună utilitate estimată.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

A5. a) a_1) Profiturile estimate:

Standard $(60 \times 0,2) + (40 \times 0,5) + (20 \times 0,3) = 38\ 000£$

Deluxe $(100 \times 0,2) + (60 \times 0,5) + (0 \times 0,3) = 50\ 000£$

Super $(120 \times 0,2) + (80 \times 0,5) - (40 \times 0,3) = 52\ 000£$

∴Pe baza profiturilor estimate, SUPER este situația cea mai favorabilă.

a_2) Criteriul minimum:

Profit minim pentru fiecare model

Standard = 20.

Deluxe = 0.

Super = –40.

∴Pe baza criteriului maximin, STANDARD este situația cea mai favorabilă.

Valoarea estimată este o măsură de evaluare bazată pe previzionarea profiturilor și pe probabilități, în timp de metoda maximin ia în considerare numai venitul cel mai redus pentru fiecare model, făcând abstracție de toate celelalte posibilități.

b) Profitul estimat în cazul informației perfecte este = 20(0,3) + 80(0,5) + 120(0,2) = = 70 000£

∴Valoarea estimată a informației perfecte este:

70 000£ – 52 000£ = 18 000£.

c) Înlocuind profiturile cu utilitatea:

		Standard	Deluxe	Super
Excelent	0,2	0,78	0,96	1,00
Moderat	0,5	0,65	0,78	0,89
Slab	0,3	0,52	0,37	0

Utilitatea estimată pentru fiecare tip de model este:

Standard: $0,2(0,78) + 0,5(0,65) + 0,3(0,52) = 0,637$

Deluxe: $0,2(0,96) + 0,5(0,78) + 0,3(0,37) = 0,693$*

Super: $0,2(1,00) + 0,5(0,89) + 0,3(0) = 0,645$

* Pe baza utilității, modelul DELUXE este cel mai favorabil.

Avantajul teoretic al recurgerii la utilitate este acela că pot fi prinși în luarea deciziilor și factorii nemonetari. Rămâne însă și în acest caz problema practică a acordării unor valori de utilitate tuturor veniturilor posibil de realizat.

d) Știind că p = probabilitatea (acceptării modelului moderat), utilitatea estimată pentru fiecare model va fi:

Standard	$0,2(0,78) + p(0,65) + (0,8-p)0,52 = 0,572 + 0,13p$
Deluxe	$0,2(0,96) + p(0,78) + (0,8-p)0,37 = 0,488 + 0,41p$
Super	$0,2(1,00) + p(0,89) + (0,8-p)0 = 0,200 + 0,89p$

Modelul STANDARD este preferabil dacă:

$0,572 + 0,13p > 0,488 + 0,41p$ și $0,572 + 0,13p > 0,200 + 0,89p$

$0,084 > 0,28p$ $0,372 > 0,76p$

$p < 0,3$ $p < 0,489$.

respectiv în cazul în care p < 3

Modelul DELUXE este preferabil dacă:

$p > 0{,}3$ și $0{,}488 + 0{,}41p > 0{,}200 + 0{,}89p$

$0{,}288 > 0{,}48p$

$0{,}6 > p$

De unde rezultă, pentru $0{,}3 < p < 0{,}6$.

Modelul SUPER este preferabil dacă $0{,}6 < p < 0{,}8$.

A6. a) a_1) Vânzările lunare estimate pentru primele cinci luni ale anului până la 31 mai 1996

$$= 2{,}643 \times 1{,}06 \times \frac{113{,}6}{110{,}9} = 2{,}870 \text{ mil £}$$

a_2) Discountul total estimat care ar trebui acordat clienților în primele cinci luni ale anului, până la 31 mai 1996 = 2,870 × 12 × 0,01 × 0,85 = 0,293£.

b) b_1) Probabilitatea neachitării facturii:

– la data stabilită = 0,15;

– cu întârziere de 1 lună = 0,09(0,15 × 0,6);

– cu întârziere de 2 luni = 0,027(0,09 × 0,3).

Există o șansă de 2,7% să existe și facturi neachitate pe un termen mai mare decât primele două luni de întârziere.

b_2) Probabilitatea achitării facturii în intervalul cuprins între o lună și două luni de întârziere:

= 0,09 – 0,027

= 0,063.

Există o șansă de 6,3% ca factura să fie achitată în cursul celei de-a doua luni de întârziere.

c) Se poate găsi răspunsul în textul capitolului respectiv.

Evaluare și recapitulare, partea 2

A1.

Nr. de apeluri	Media x	Frecvența f	fx	fx^2
0 – 9	4,5	0	0	0
10 – 19	14,5	5	72,5	1.051,25
20 – 29	24,5	10	245	6.000,5
30 – 39	34,5	20	690	23.805
40 – 49	44,5	15	667,5	29.703,75
50 – 59	54,5	10	545	29.702,5
60 – 69	64,5	4	258	16.641
70 +	74,5	0	0	0
		64	2.478	106.906

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\text{Media apelurilor telefonice} = \frac{\sum fx}{\sum f}$$

$$= \frac{2478}{64}.$$

$$\therefore \bar{x} = 38{,}72 \text{ apeluri.}$$

Deviația standard, s, este dată de:

$$s = \sqrt{\frac{\sum fx^2}{\sum f} - x}$$

$$= \sqrt{\frac{106.906}{64} - 38{,}72^2}$$

$$= \sqrt{171{,}17}.$$

de unde rezultă $s = 13{,}08$ apeluri.

b) Limita de certitudine de 95% pentru numărul mediu zilnic de apeluri telefonice este:

$$\bar{x} \pm 1{,}96\frac{s}{\sqrt{n}},$$

respectiv $$38{,}72 \pm \frac{1{,}96 \times 13{,}08}{8},$$

sau 35,52 și 41,92 apeluri.

Costul mediu al unei convorbiri este 20£ și sunt 256 de zile lucrătoare pe an, astfel încât limitele de certitudineale costurilor anuale totale sunt:

$$35{,}52 \times 20 \times 256 \text{ și } 41{,}92 \times 20 \times 256$$

respectiv 181 862£ și 214 630£.

Cea mai bună estimare a costurilor totale anuale este £198.246 (pe baza mediei numărului de apeluri zilnice). Mai departe, se poate afirma cu o certitudine de 95% că costurile totale vor fi cuprinse între 181 862£ și 214 630£.

A2. a)

Plata în intervalul zile	Media x	Nr. de clienți f	fx	fx^2
5 – 9	7	4	28	196
10 – 14	12	10	120	1440
15 – 19	17	17	289	4913
20 – 24	22	20	440	9680
25 – 29	27	22	594	16 038
30 – 34	32	16	512	16 384
35 – 39	37	8	296	10 952
40 – 44	42	3	124	5292
		100	2405	64 895

BCU IAȘI ALEXANDRU IOAN CUZA UNIVERSITY LIBRARY

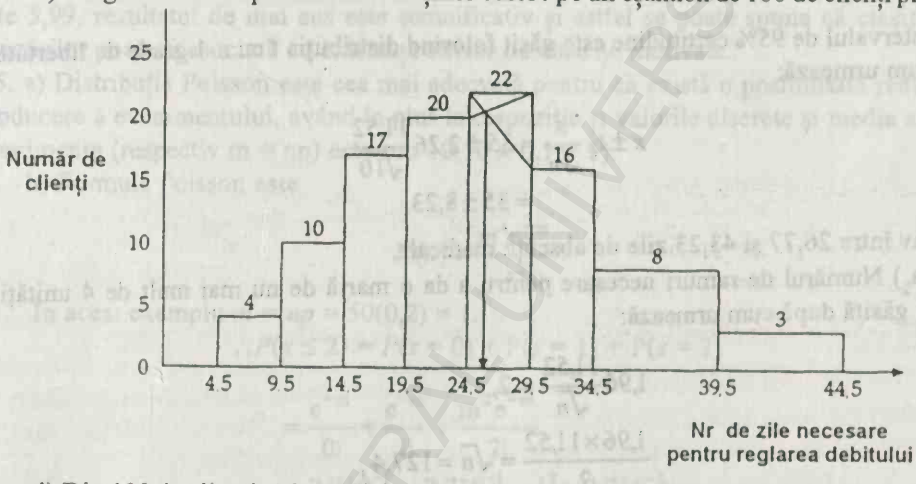
$$\text{Media aritmetică} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{2.405}{100} = 24{,}05 \text{ zile}.$$

$$\text{Deviația standard} = \sqrt{\frac{\sum fx^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fx}{\sum f}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{64\,895}{100} - \left(\frac{2405}{100}\right)^2}$$

$$= 8{,}4.$$

c) Diagramă trasată pe baza informațiilor culese pe un eșantion de 100 de clienți plătitori



d) Din 100 de clienți, 16 se află în categoria care plătește în intervalul de 30 până la 34 de zile, iar 8 se află în categoria celor care plătesc în intervalul cuprins între zilele 35 și 39. Prin urmare, cea mai bună estimare ca un client ales la întâmplare să achite factura în intervalul cuprins între zilele 30 și 39 este:

$$\frac{2478}{64} = 0{,}24.$$

A3. a) a_1) Eroarea standard (deviația standard a distribuției eșantionului) înmulțită cu rădăcina pătrată a mărimii eșantionului este egală cu deviația standard a populației.

a_2) Pe măsură ce dimensiunile eșantionului cresc, eroarea standard a distribuției eșantionului scade; inversa este de asemenea valabilă, pentru că variabilitatea valorilor din jurul mediei scade cu creșterea mărimii eșantionului.

b) Limitele volumului mediu al unității pentru o limită de certitudine de 95%:

$$= 0{,}25 \pm 1{,}96 \times \frac{0{,}004}{\sqrt{50}}$$

$$= 0{,}25 \pm 0{,}0011$$

= între 0,2489 și 0,2511.

∴Putem avea o certitudine de 95% că media reală a volumelor este cuprinsă între 0,2489 și 0,2511 litri.

A4. a) a_1) $\sum x = 350 \qquad \sum x^2 = 13{,}444 \qquad n = 10$

$$\therefore \bar{x} = \frac{350}{10} = 35$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \bar{x}^2\left(\frac{n}{n-1}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{13\,444}{10} - 35^2\left(\frac{10}{9}\right)}$$

$$= 11{,}52.$$

Intervalul de 95% certitudine este găsit folosind distribuția t cu n-1 grade de libertate după cum urmează:

$$\bar{x} \pm t_q \frac{s}{\sqrt{n}} = 35 \pm 2{,}26\frac{11{,}52}{\sqrt{10}}$$

$$= 35 \pm 8{,}23.$$

respectiv între 26,77 și 43,23 zile de absențe medicale.

a_2) Numărul de ramuri necesare pentru a da o marjă de nu mai mult de 4 unități poate fi găsită după cum urmează:

$$1{,}96\frac{11{,}52}{\sqrt{n}} = 2,$$

$$\frac{1{,}96 \times 11{,}52}{2} = \sqrt{n} = 127{,}4,$$

respectiv va fi necesar un număr de 128 de ramuri.

b) Această parte a problemei poate fi rezolvată folosind testul χ^2.

b_1) Informațiile existente vor fi reprezentate sub forma următorului tabel:

	Gruparea după nivelul vânzărilor			
	Redus	Mediu	Mare	Total
Fără absențe medicale	52	15	29	96
Cu unele absențe medicale	38	21	55	114
Total	90	36	84	210

b_2) Ipoteza nulă este reprezentată de absența oricărei relații dintre gruparea în funcție de nivelul vânzărilor și existența absențelor medicale.

În aceste condiții, frecvențele estimate sunt:

BCU IAȘI BIBLIOTECA UNIVERSITY LIBRARY

	Redus	Mediu	Mare
Fără absențe medicale	41.1	16,5	38,4
Cu unele absențe medicale	48,9	19,5	45,6

Analizând discrepanțele dintre frecvențele observate și cele evaluate:

$$\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E} = \frac{10{,}9^2}{41{,}1} + \frac{1{,}5^2}{16{,}5} + \frac{9{,}4^2}{38{,}4} + \frac{10{,}9^2}{48{,}9} + \frac{1{,}5^2}{19{,}5} + \frac{9{,}4^2}{45{,}6}$$
$$= 9{,}82.$$

Dacă ipoteza nulă este adevarată, această valoare ar trebui să aibă aproximativ o distribuție de genul χ^2 cu două grade de libertate. Deoarece la nivelul de 5% valoarea lui χ^2 este 5,99, rezultatul de mai sus este semnificativ și astfel se poate spune că clasificarea vânzărilor poate fi asociată cu existența zilelor de absențe motivate.

A5. a) Distribuția Poisson este cea mai adecvată pentru că există o posibilitate redusă de producere a evenimentului, având în plus la dispoziție și valorile discrete și media acestor evenimente (respectiv m = np) este sub 10(50 × 0,1 = 5).

b) Formula Poisson este

$$P(x) = \frac{m^x e^{-m}}{x!}.$$

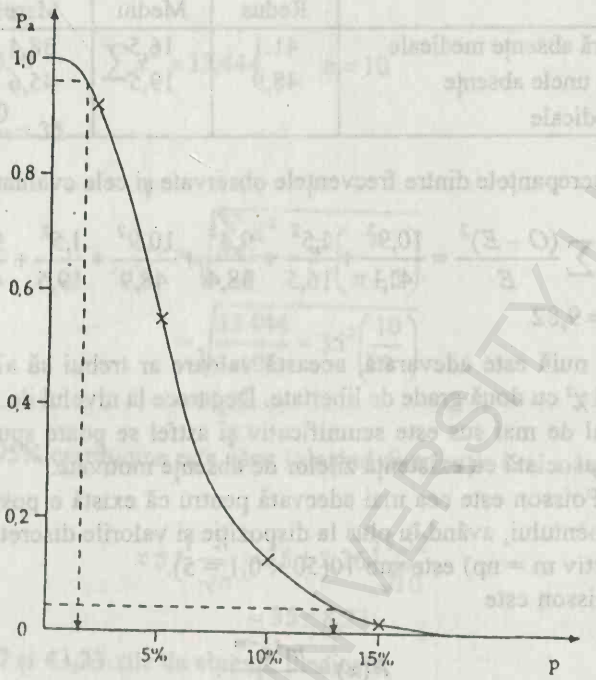
În acest exemplu $m = np = 50(0{,}2) = 1$.

$$\therefore P(x \le 2) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2)$$
$$= \frac{e^{-m}}{0!} + \frac{e^{-m}}{1!} + \frac{m^2 e^{-m}}{2!}$$
$$= \frac{2{,}718^{-1}}{1} + \frac{2{,}718^{-1}}{1} + \frac{1^2 \times 2{,}718^{-1}}{2 \times 1}$$
$$= 0{,}3679 + 0{,}3679 + 0{,}1840 = 0{,}92.$$

c) În mod similar, se poate trasa următorul tabel:

p	pa
0	1,000
0,02	0,920
0,05	0,544
0,210	0,125
0,15	0,020

Valorile sunt reprezentate pe graficul prezentat în continuare. Graficul este utilizat pentru estimarea a două valori de interes.



c_1) 1,5%.

c_2) 13%.

Dacă procentajul de rebuturi este mai mic de 1,5% este posibil ca lotul să fie acceptat; pentru valori mai mari decât 13% este posibil ca lotul să fie respins. Între aceste două valori limită, intervine un element de șansă în privința acceptării/respingerii lotului.

A6. a) **Tabel reprezentând frecvențele observate/evaluate**

	Manual		Nemanual		Total
	O	E	O	E	
Pentru	30	32,08	25	22,92	55
Împotriva	40	37,92	25	27,08	65
Total	70	70	50	50	120

Având în vedere că este un tabel de genul 2 × 2, se aplică corecția Yates:

$$\chi^2 = \sum \frac{(|O - E| - 1/2)^2}{E}$$

$= |30 - 32{,}08| - 0{,}5 = 1{,}58$

$|40 - 37{,}82| - 0{,}5 = 1{,}58$

$|25 - 22{,}92| - 0{,}5 = 1{,}58$

$|25 - 27{,}08| - 0{,}5 = 1{,}58$

BCU IAȘI - CENTRUL UNIVERSITY LIBRARY

$$\therefore \chi^2 = \frac{1{,}58^2}{32{,}08} + \frac{1{,}58^2}{37{,}920} + \frac{1{,}58^2}{22{,}92} + \frac{1{,}58^2}{27{,}08}$$
$$= 0{,}345.$$

Având în vedere că χ^2 pentru un grad de libertate și un coeficient de certitudine de 5% este 3,84, rezultatul obținut anterior nu este semnificativ și putem trage concluzia că nu există nici o dovadă că ar exista deosebiri între muncitorii manuali și funcționari în privința preluării companiei.

b) Testul χ^2 în cazul femeilor nu este valabil deoarece nu există două frecvențe estimate mai mici de 5. În cazul bărbaților, testul χ^2 este valid și valoarea este semnificativă la un nivel de 5% (respectiv 3,89 comparativ cu 3,84), respectiv în cazul bărbaților clasificarea în funcție de tipul activității prestate le afectează atitudinea față de preluare.

c) Puncte cheie ale raportului:

Procentajul în favoarea:		
Bărbați/manual Femei/manual	40% 80%	Manual 43%
Bărbați/nonmanual Femei/nonmanual	63% 20%	Nemanual 50%
Bărbați Femei	48% 35%	

Trebuie observat de asemenea că în cazul femeilor rezultatele sunt mai mici ca valoare. Personalul cu activitate nonmanuală are atitudini opuse față de preluare; bărbații sunt de acord, dar femeile nu.

A7. a)

Anul	Trim.		Suma trimestrială	Suma pe două trimestre	Tendința	Real minus tendință	Real/ tendință
1990/91	1	49					
	2	37	211				
	3	58	212	423	52,875	5,125	1,097
	4	67	213	425	53,125	13,875	1,261
1991/92	1	50	214	427	53,375	–3,375	0,937
	2	38	215	429	53,625	–15,625	0,709
	3	59	216	431	53,875	5,125	1,095
	4	68	218	434	54,25	13,75	1,253
1992/93	1	51	219	437	54,625	–3,625	0,934
	2	40	221	440	55	–15	0,727
	3	60	220	441	55,125	4,875	1,088
	4	70	222	442	55,25	14,75	1,267
1993/94	1	50	223	445	55,625	–5,625	0,899
	2	42					
	3	61					

b) sau

Modelul aditiv

Anul	Trimestrul 1	Trimestrul 2	Trimestrul 3	Trimestrul 4	
1990/91			5,125	13,875	
1991/92	–3,375	–15,625	5,125	13,75	
1992/93	–3,625	–15	4,875	14,75	
1993/94	–5,625				
Total	–12,625	–30,625	15,125	42,375	
Media	–4,208	–15,313	5,042	14,125	= –0,354
Variația sezonieră	–4	–15	5	14	= 0

sau

Modelul multiplicativ

Anul	Trimestrul 1	Trimestrul 2	Trimestrul 3	Trimestrul 4	
1990/91			1,097	1,261	
1991/92	0,937	0,709	1,095	1,253	
1992/93	0,934	0,727	1,088	1,267	
1993/94	0,899				
Total	2,770	0,718	3,280	3,781	
Media	0,923	0,718	1,093	1,260	= 3,994
Factor de ajustare	1,0015	1,0015	1,0015	1,0015	
Variația sezonieră	0,924	0,719	1,095	1,262	= 4,000

* Factorul de ajustare = 4 / (3,994) = 1,0015

c) Explicarea metodei de previzionare:

c_1) Se realizează graficul tendinței.

c_2) După ochi, se stabilește o previziune adecvată a tenfinței pentru ultimul trimestru al anului 1993/94 și primele trei trimestre ale anului 1994/95 (notă. Regresia liniară sau metoda înalt/scăzut pot constitui metode destul de corecte pentru stabilirea unei evaluări.)

c_3) Se ajustează tendința previzionată pentru aceste trimestre după variațiile sezoniere:

Modelul aditiv

Se estimează valorile numerice = se previzionează o valoare a tendinței + valoarea corespunzătoare a variației sezoniere.

Modelul multiplicativ

Se înmulțește fiecare punct cu factorul sezonier corespunzător.

A8. a) $a = \bar{y} - b\bar{x}$ $\qquad b = \dfrac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sum(x-\bar{x})^2}$

x	$\bar{x}$	A $x-\bar{x}$	y	$\bar{y}$	B $y-\bar{y}$	$A \times B$	$(x-\bar{x})^2$
2	6	–4	60	104,8	–44,8	179,2	16
8	6	2	132	104,8	27,2	54,4	4
6	6	0	100	104,8	–4,8	0	0
8	6	2	120	104,8	15,2	30,4	4
10	6	4	150	104,8	45,2	180,8	16
4	6	–2	84	104,8	–20,8	41,6	4
4	6	–2	90	104,8	–14,8	29,6	4
2	6	–4	68	104,8	–36,8	147,2	16
6	6	0	104	104,8	–0,8	0	0
10	6	4	140	104,8	35,2	140,8	16
60			1048			804,0	80
$\frac{60}{10}=6$			$\frac{1048}{10}=104,8$				

Prin urmare $b=\frac{804}{80}=10,05$ $\quad a = 104,8 - (10,05 \times 6)44,5$

unde: y este costul total (×10);

x – vârsta în ani.

b) Costurile de întreținere pe baza formulei de la punctul a:

Vechimea vehiculului în ani	Costurile £ × 10
1	54,55
2	64,60
3	74,65
4	84,70
5	94,75
6	104,80
7	114,85
8	124,90
9	134,95
10	145,00

c) Costurile de întreținere pentru un vehicul de 12 ani vechime sunt estimate la:

$44,5 + (10,05 \times 12) = 165,1$ (£ × 10), sau 1651,00£.

Această predicție este o extrapolare care merge dincolo de informațiile existente și de aceea trebuie tratată cu multă precauție.

BCU IAȘI CENTRUL UNIVERSITAR LIBRARY

A9. a) $$\text{Media} = \frac{\sum x}{n} = \frac{350 \text{ zile}}{10} = \bar{x} = 35 \text{ zile}.$$

$$\text{d.s.} = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n-1}}.$$

x	$\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$
36	35	1
81	35	2116
67	35	1024
11	35	576
20	35	225
48	35	169
14	35	441
21	35	196
21	35	196
31	35	16
350	350	4960

$$\therefore \text{d.s.} = \sqrt{\frac{4960}{9}} = 23{,}48 \text{ zile.}$$

$$\therefore \text{Eroarea standard} = \frac{23{,}48}{\sqrt{n}} = 7{,}42.$$

b) b_1) Se folosește distribuția t cu 10 – 1 = 9 grade de libertate.

$$\text{Interval de certitudine } 95\% = \bar{x} \pm t_{0{,}025}\text{S.E.}$$
$$= 35 \pm 2{,}26(7{,}42)$$
$$= 18{,}23 \text{ la } 51{,}77 \text{ zile.}$$

Având în vedere că pierderile zilnice sunt de 182,30£ la 517,70£, rezultă:

b_2) Putem avea în proporție de 95% încredere că în total, costul va fi de: 750(182,30)£ la 750(517,70) = 136 7250£ la 388 275£

c) b_3) Pe baza datelor:

$\sum x = 300 \quad \bar{x} = 30 \quad \sum y = 350 \quad \bar{y} = 35 \quad \sum x^2 = 12{,}908 \quad \sum xy = 14\,695 \quad n = 10$

$$\therefore b = \frac{n\sum xy - \sum x \cdot \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2} \qquad \text{și} \quad a = \bar{y} - b\bar{x}$$

BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Coeficienții de regresie sunt:

$$\text{panta } b = \frac{10(14\,695) - (300)(350)}{10(12\,908) - (300)(300)} = \frac{41\,950}{39\,080} = 1{,}0734,$$

$a = 35 - 1{,}0734(30) = 2{,}797.$

De unde rezultă că ecuația de regresie este: $y = 2{,}797 + 1{,}0734x$

c_2) Numărul mediu al zilelor de depășire a achitării facturilor în 1992 este de 32, de unde rezultă că estimarea numărului mediu de zile de depășire al achitării facturilor în 1993 se obține înlocuind x cu 32, obținându-se:

$y = 2{,}797 + 1{,}0734(32) = 37{,}147$, respectiv un cost de 371,41£

c_3) Ecuația de regresie utilizează toate datele noi contribuind astfel la cunoașterea de către firmă a întârzierilor în achitarea facturilor.

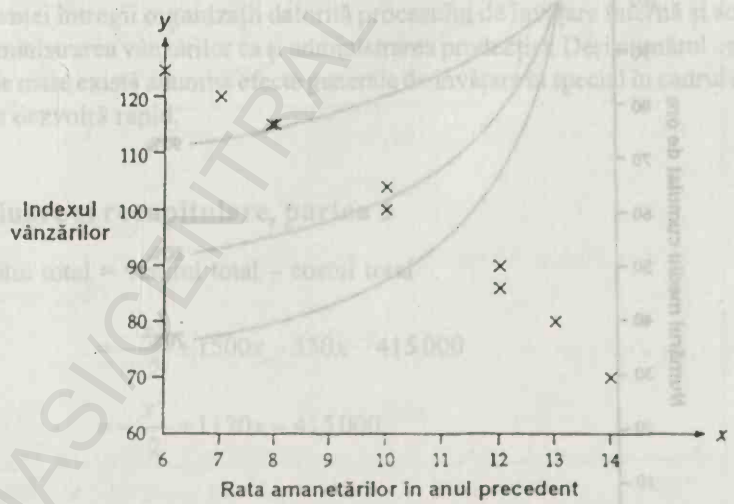
A10. a) H_0: nu există nici o corelație între ratele dobânzilor și vânzări.

Testarea statistică este

$$T = \frac{-0{,}81\sqrt{9}}{\sqrt{\left[1-(-0{,}81)^2\right]}} = -4{,}14.$$

Prin urmare, valorile critice ale distribuției t cu 9 grade de libertate fiind: 2,26 (și -2,26), se elimină ipoteza nulă și se trage concluzia că există o corelare semnificativă între ratele dobânzilor și vânzări.

b) b_1) Diagramă de dispersie



Se observă că există o puternică corelare negativă (sau inversă) între rate și vânzări.

b_2) Se notează cu x rata de amanet în anul anterior și cu y vânzările firmei.

$$\sum x = 100 \quad \sum y = 1005 \quad \sum x^2 = 1066 \quad \sum y^2 = 104\,125 \quad \sum xy = 9600 \quad n = 10$$

$$x = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{(n\sum x^2 - (\sum x)^2)(n\sum y^2 - (\sum y)^2)}}$$

$$= \frac{10\times 9600 - 100\times 1005}{\sqrt{(10\times 1066 - 100^2)(10\times 104125 - 1005^2)}}$$

$$= \frac{-4500}{\sqrt{660\times 31225}} = -0{,}991,$$

de unde rezultă că exista o puternică corelare negativă între indexul vânzărilor și rata de amanet din anii precedenți.

c) Toate valorile necesare pentru calcularea lui b au fost deja găsite anterior

$$\therefore b = \frac{-4.500}{600} = -6{,}818 \quad \text{și} \quad a = 168{,}68,$$

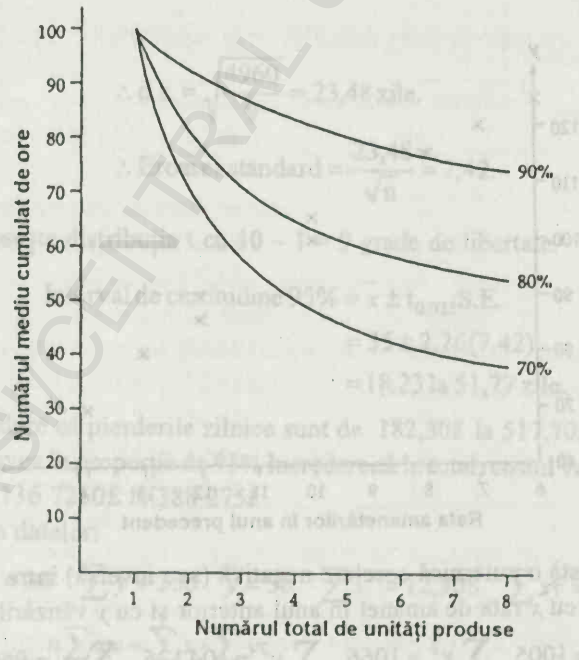
unde $x = 11$ $y = 168{,}68 - (6{,}818 \times 11) = 93{,}7$.

Prin urmare, predicția pentru indexul pe anul 1993 este 94.

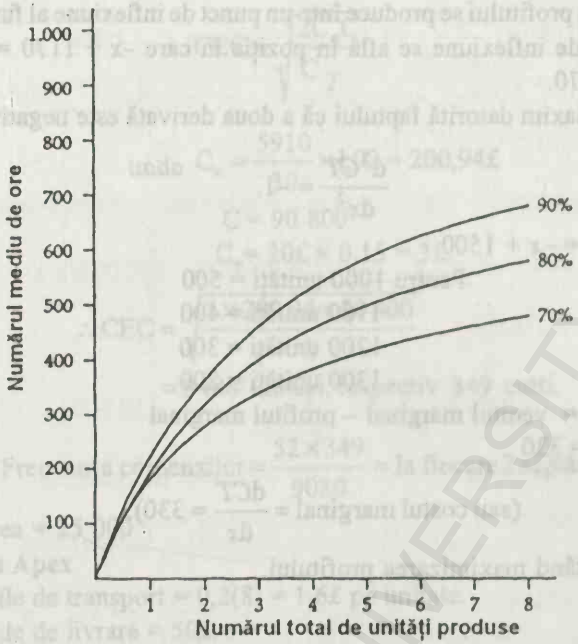
d) Deși datele arată o relație strânsă, orice formă de prezivionare este dificil de realizat. Condițiile pot să varieze, făcând tendințele antrerioare să fie inaplicabile.

A11. a) Răspunsul se poate găsi în text.

b)



BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITARĂ LIBRARY



c) Răspunsul se poate găsi în text.

d) Curba învățării este aplicată în mod tradițional operațiunilor manuale repetitive, care implică și un proces de învățare. Curba experienței încearcă să arate efectele învățării asupra eficienței întregii organizații datorită procesului de învățare internă și acoperă funcții cum ar fi administrarea vânzărilor ca și administrarea producției. Deși numărul necunoscutelor este destul de mare există anumite efecte generale de învățare în special în cadrul organizațiilor mari care se dezvoltă rapid.

Evaluare și recapitulare, partea 3

A1. a) Profitul total = venitul total – costul total

$$= -\frac{x^2}{2} + 1500x - 330x - 415\,000$$

$$= -\frac{x^2}{2} + 1170x - 415\,000.$$

b) b$_1$)
$$VM = \frac{dVT}{dx} = -x + 1500,$$

$$PM = \frac{dVT}{dx} = -x + 1170.$$

b_2) Maximizarea profitului se produce într-un punct de inflexiune al funcției marginale al profitului. Punctul de inflexiune se află în poziția în care $-x + 1170 = 0$, respectiv în punctul în care $x = 1170$.

Acesta este un maxim datorită faptului că a doua derivată este negativă, respectiv

$$\frac{d^2CT}{dx^2} = -1.$$

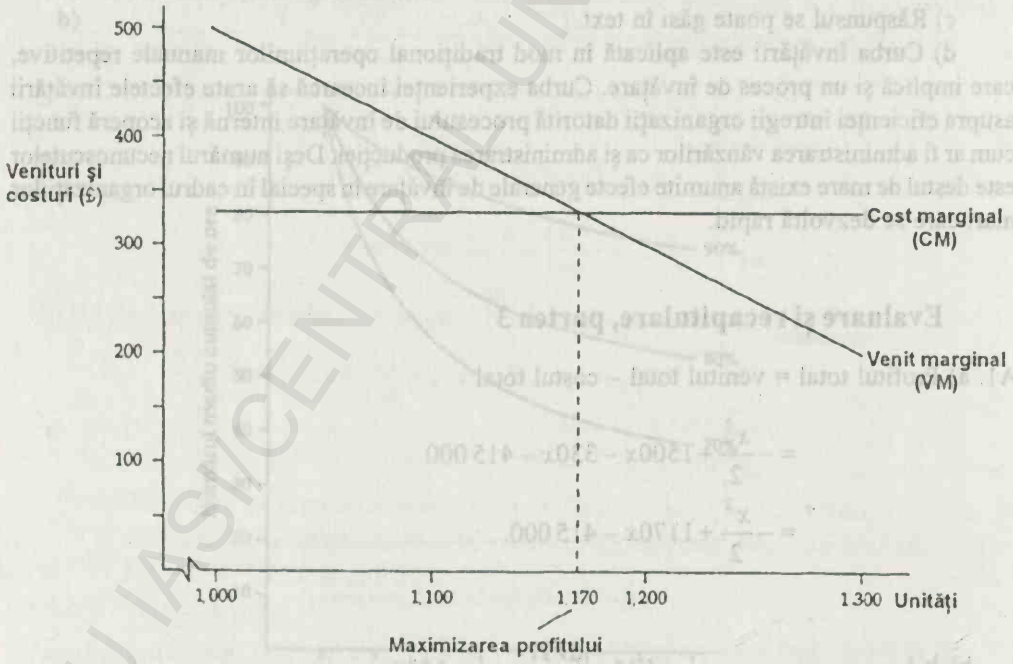
c) Venitul marginal $= -x + 1500$.

Pentru 1000 unități = 500
1100 unități = 400
1200 unități = 300
1300 unități = 200

Costul marginal = venitul marginal – profitul marginal
= 330

$$\text{(sau costul marginal} = \frac{dCT}{dx} = 330\text{)}.$$

Grafic, reprezentând maximizarea profitului.



BCU IAȘI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

A2. $$CEC = \sqrt{\frac{2C_eC}{C_T}},$$

$$\text{unde } C_e = \frac{5910}{30} \times 1{,}02 = 200{,}94£$$

$$C = 90\,800$$

$$C_T = 20£ \times 0{,}15 = 3£.$$

$$\therefore CEC = \sqrt{\frac{2 \times 200{,}94 \times 90\,800}{3}}$$

$$= 3488 \text{ unități, respectiv } 349 \text{ cutii.}$$

$$\text{Frecvența comenzilor} = \frac{52 \times 349}{9080} = \text{la fiecare 2 săptămâni.}$$

A3. a) a_1) Cererea = 25 000

Pentru Apex

Costurile de transport = 0,2(8) = 1,6£ pe unitate.

Costurile de livrare = 50£.

$$\therefore CEC = \sqrt{\frac{2 \times 50 \times 25\,000}{1{,}6}} = 1250 \text{ unități.}$$

∴Cea mai bună politică pentru Apex este să obțină 1250 de unități pe o comandă, de 20 de ori pe an, respectiv câte o comandă la fiecare 15 zile lucrătoare.

Costul total anual = costul de menținere a stocului + costurile de livrare + costul pe unitate

$$\therefore \text{Costul total anual} = \frac{1250}{2}(1{,}6)£ + 50(20)£ + 8(25\,000)£$$

$$= 202\,000£.$$

Pentru Bemax

În cazul livrărilor fără taxă, politica cea mai favorabilă este să se facă comenzi mici, respectiv 5000 de unități.

$$\therefore \text{Costul anual total} = \frac{5000}{2}(1{,}59)£ + 0 + 7{,}95(25\,000)£$$

$$= 202\,725£.$$

a_2) Apex are costuri mai reduse.

a_3) Răspunsul se poate găsi în text.

b) Cu numai 15.000 de la Apex trebuie să se obțină 10.000 de la Bemax, respectiv

$$\frac{15\,000}{25\,000}(202\,000£) + \frac{10\,000}{25\,000}(202\,725£) = 202\,290.$$

∴Costurile adiționale vor fi de: 290£.

A4. a) Costul de comandă cuprinde:

Costul de achizitie + costul de stocare + costul de livrare

$$\left(15(10)\frac{1425}{10}+80\right)£ = 265{,}625£ \text{ așa s - a arătat.}$$

b) Cererea anuală $= 4800 \times 50 = 240\,000.$
Costul de stocare pe unitate $= 0{,}15(8{,}5) = 1{,}275£$
Stocul tampon $= 20\,000 - 3(4800) = 5600.$

Stocul total anual = depozitarea + completarea + costul bunurilor

$$= \left(\frac{24.00}{2}+5600\right)1{,}275£ + 10(265{,}625) + 240\,000(8{,}5)$$
$$= 2\,065\,906£.$$

c) $$\therefore CEC = \sqrt{\frac{2\times 265{,}625\times 240\,000}{1{,}275}} = 10\,000.$$

Costul anual pentru o cantitate de 10 000 de unități pe comandă:

$$= \left(\frac{10\,000}{2}+5000\right)1{,}275£ + 24(265{,}625) + 240\,000(8{,}5)$$
$$= 209\,890£.$$

Respectiv economii de 5206£.

d) Punctul de discount este de 100 000 de unități, deci nu are rost să fie comandate cantități mai mari.

∴Costul anual = depozitarea + completarea + costul bunurilor + depozitarea suplimentară

$$= \left(\frac{100\,000}{2}+5000\right)1{,}21125£ + 24(265{,}625) + 240\,000(8{,}5) + 25\,000$$
$$= 2\,030\,983£.$$

∴Este convenabil să se accepte nivelul de comandă care corespunde discountului.

A5. a) Răspunsul se poate găsi în text.

b) Pentru început se alocă numere aleatorii pentru proporția probabilităților:

Timpul de funcționare până la defectare	Numerele aleatorii (NA)
7	0
8	1
9	2, 3
10	4, 5, 6
11	7, 8
12	9

Simularea se va realiza utilizând numerele aleatorii pentru fiecare tub, considerându-se că la momentul 0 tuburile erau noi.

Costurile de înlocuire

1 tub = 400£ + 0,5(900) + 100 = 950£
2 tuburi (simultan) = 800 + 5/6(900) + 160 = 1710£
3 tuburi (simultan) = 1200 + 900 + 200 = 2300£

BC IASI - FILIALA UNIVERSITY LIBRARY

b_1) Înlocuirea fiecărui tub în momentul în care se defectează

	Durata de viață rămasă (săptămâni)			
Săptămâna	Tubul 1	Tubul 2	Tubul 3	Costul
0	11	11	10	2300
10	1	1	11	950
11	7	11	10	1900*
18	7	4	3	950
21	4	1	9	950
22	3	11	8	950
25	8	8	5	950
30	3	3	7	950
33	11	10	4	1999*
37	7	6	9	950
43	1	11	3	950
44	9	10	2	950
46	7	8	11	950
				15 600

* Dacă se presupune că în săptămânile 11 și 33 au avut loc în mod simultan înlocuiri ale tuburilor, costurile ar fi de 1710£ pentru fiecare săptămână, respectiv în total 15 220£.

b_2) Înlocuirea fiecărui tub pe măsură ce se defectează

	Durata de viață rămasă (săptămâni)			
Săptămâna	Tubul 1	Tubul 2	Tubul 3	Costul
0	11	11	10	2300
10	7	11	11	2300
17	7	11	9	2300
24	8	10	7	2300
31	11	11	9	2300
40	9	10	11	2300
49	8	9	10	2300
				16 100

c) Estimările de mai înainte nu oferă un grad prea ridicat de încredere, deoarece sunt numai 3 tuburi pe o perioadă foarte scurtă.

d) Simularea în cazul înlocuirii tuburilor care au depășit o funcționare de 8 săptămâni.

	Durata de viață rămasă (săptămâni)			
Săptămâna	Tubul 1	Tubul 2	Tubul 3	Costul
0	11	11	10	2300
10	7	11	11	2300
17	7	4	4	950
21	3	11	9	1710
24	8	8	6	950
30	2	10	7	1710
32	11	8	5	950
37	6	3	9	950
40	9	11	6	1710
46	3	5	11	950
49	8	10	8	1710
				16 190

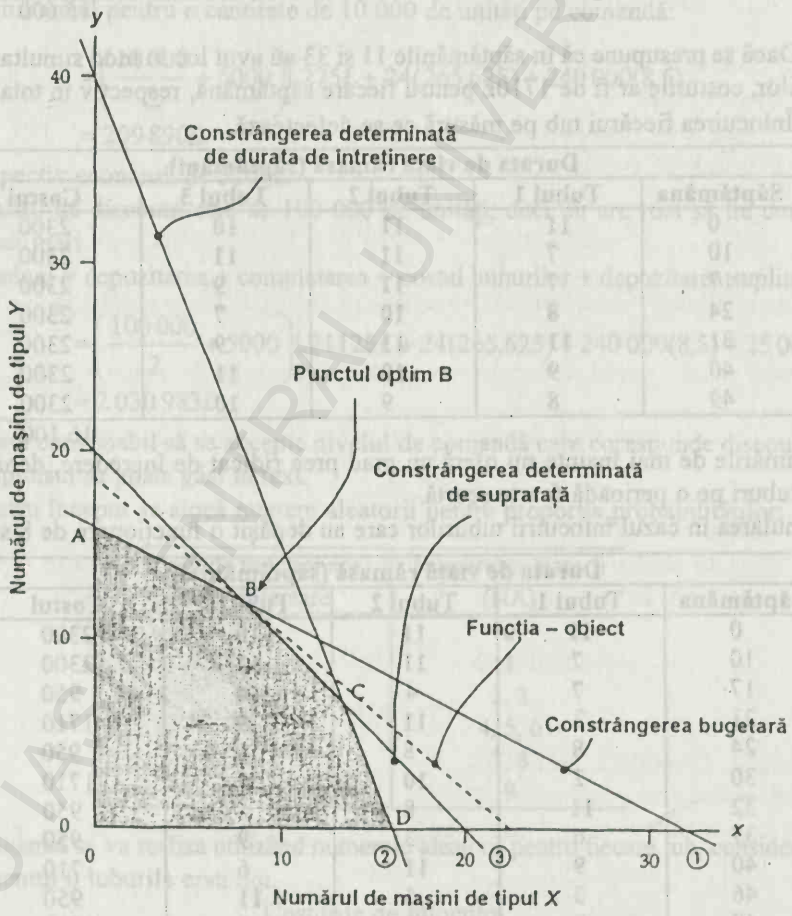
Sistemul este mai scump decât celelalte.

Evaluare și recapitulare, partea 4

A1. Să se maximizeze		z =	$1500x$	+	$2000y$		
Sub constrângerile	bugetare		$5x$	+	$10y$	≤ 160	(în mii £)
	duratelor de întreținere		$25x$	+	$10y$	≤ 40	(ore)
	ținând de spațiu		$50x$	+	$50y$	≤ 1000	(m^2)

unde: x este numărul de mașini x:
y – numărul de mașini y.

b)



∴ Optim = 1500(8) + 2000(12) = 36 000 unități.

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

c) Suprafața disponibilă și bugetul sunt utilizate complet, dar rămân neutilizate 80 de ore de întreținere, respectiv 400 – [25 (8) + 10 (12)].

A2. a) Modelul deprogramare liniară va fi:

$$\begin{array}{lrcrcrl} \text{Maximizarea venitului} & P & = & 5{,}50x & + & 6{,}50y & \\ \text{În funcție de} & & & 0{,}4x & + & 0{,}3y \leq 2200 & \text{(material A)} \\ & & & 0{,}2x & + & 0{,}5y \leq 2500 & \text{(material B)} \end{array}$$

unde: x este cantitatea de produs X;
y – cantitatea de produs Y.

b) Pot fi verificate trei posibilități, rezultatele fiind apoi comparate.

Nr. 1. Ambele materiale sunt utilizate la maximum, caz în care sistemul de ecuații va fi:

$$\begin{array}{rcrcrl} 0{,}4x & + & 0{,}3y & = & 2200 & 1 \\ 0{,}2x & + & 0{,}5y & = & 2500 & 2 \end{array}$$

Efectuând calculele:

$$\begin{array}{rcrcl} 0{,}4x & + & 1{,}0y & = & 5000 \quad 2 \times 2 = 3 \\ & & 0{,}7y & = & 2800 \quad 3 - 1 = 4 \\ & & y & = & 4000 \end{array}$$

Înlocuind valoarea lui y în prima ecuație, se obține:

$$x = \frac{2200 - (0{,}3 \times 4000)}{0{,}4}$$
$$= 2500.$$

∴Soluția fezabilă este:

Produsul X 2500 unități,
Produsul Y 4000 unități,

ceea ce înseamnă un venit de 39 7500£, respectiv: (2500 × 5,50 + 4000 × 6,50).

Nr. 2, pentru cazul în care x = 0.

Când x = 0, y poate să fie de 5000 de unități (maximum impus de limitările materialului B).

Ecuația corespunzătoare acestui caz este: 0,2x + 0,5y = 2500.

Venitul în acest caz ar fi:

Produsul Y 5000 × 6,50£ = 32 500£.

Nr. 3, pentru cazul în care y = 0.

Când y = 0, x poate să fie 5500 de unități (maximum impus de limitările Materialului A)

Produsul X 5000 × 5,50£ = 30 250£.

∴Cel mai mare venit se obține în cazul 1, în care x = 2500 și y = 4000.

BCU "ALEXANDRU IOAN CUZA" UNIVERSITY LIBRARY

A3. a) Formularea standard a problemei:

Să se maximizeze		$15,6x$	+	$9,2y$	+	$13,4z$		
În funcție de	(materialul A)	$0,3x$	+			$0,2z$	$\leq$	500
următoarele	(materialul B)	$0,2x$	+	$0,5y$	+	$0,4z$	$\leq$	1000
constrângeri:	(materialul C)	$0,5x$	+	$0,1y$	+	$0,1z$	$\leq$	800
	(materialul D)			$0,4y$	+	$0,3z$	$\leq$	600
				$x, y, z \geq 0$				

unde: x reprezintă tone de Xtragrow;
y – tone de Youngrow;
z – tone de Zupergrow.

b) b_1) Pe baza tabloului final:

Producția optimă = 1279,1 tone Xtragrow.
= 1023,3 tone Youngrow.
= 581,4 tone Zupergrow.

b_2) Venitul = 37 158,10£ și 16,3 tone de D rămân neutilizate

b_3) Valorile duale sunt: Materialul A = 29,54£ pe tonă.
Materialul B = 17,07£ pe tonă.
Materialul C = 6,65£ pe tonă.
Materialul D = 0£ pe tonă.

Acestea ar fi nivelurile veniturilor care s-ar putea obține dacă ar fi disponibilă câte o tonă din fiecare material (respectiv aceasta este pierderea în cazul în care aceasta tonă de material nu este disponibilă).

b_4) Deși A poate fi vândut la un preț de cost de 15£ pe tonă, costând de fapt numai 10£ pe tonă, aduce un câștig de 29,54£ pe tonă, ceea ce înseamnă că nu trebuie vândut dacă nu se asigură o creștere a disponibilului.

A4. Analiza sensibilității identifică intervalele de valori ale utilizării veniturilor și limitările pentru care se aplică soluția finală.

Comentariile în legătură cu valorile duale pot fi găsite în text.

a) Forma standard a problemei este:

Să se maximizeze		$250x$	+	$170y$	+	$150z$		
În funcție	Desktops	x	+	y			$\leq$	500
delimitările	Laptops					z	$\leq$	250
impuse de:	Chipuri 80386	x					$\leq$	120
	Chipuri 80286			y	+	z	$\leq$	400
	Timpul de producție	$5x$	+	$4y$	+	$3z$	$\leq$	2000
		$x, y, z \geq 0$						

unde: x este producția de Desktop – 386;
y – producția de Desktop – 286;
z – producția de Laptop – 286.

b) b_1) Interpretarea

Niveluri de producție:
120 Desktop – 386
200 Desktop – 286
200 Laptop – 286

Profitul = 120(250) + 200(170) + 200(150) = £94 000.

Două dintre constrângeri nici nu sunt afectate, rămânând chiar cantități neutilizate, pentru că nu au valori duale, respectiv:

Desktop 180 bucăți în plus
Laptop 50 de bucăți în plus.

b_3) Interpretarea analizei de sensibilitate.

Funcția-obiectiv:

Limitele superioară și inferioară indică intervalul de profit pentru trei prodsuse pentru care soluția originală se aplică în continuare.

De exemplu: un laptop – 286 (respectiv X_3) poate aduce un profit între 127,50£ și 170£ fără schimbarea soluției (presupunând că X_1 și X_2 rămân la valorile lor originale).

Constrângerile:

În mod identic, limitele indică intervalul resurselor pentru care se aplică valorile duale. De exemplu, timpul de producție poate fi mărit de la 2000 de ore la 2180, aducând un profit suplimentar de 180 × 20£.

A5. a) Venitul = prețul – costurile variabile – costurile de transport.

Tabelul veniturilor

	Clientul A	Clientul B	Clientul C
Manchester	35£	37£	33£
Londra	30	26	36

b) Se fac alocările începând cu fabrica ce aduce cel mai mare venit

		Venitul total £
Clientul A din Manchester	= 3000 × 35£ =	105 000
Clientul B din Manchester	= 4200 × 37£ =	155 400
Clientul C din Manchester	= 5300 × 36£ =	190 800
		451 200

Capacități	Manchester	7200
	Londra	5300

c) Când capacitatea este de 10 000 și cererea este de 12 500, se recurge la o sursă falsă, care aduce un venit zero.

Tabelul inițial

		Destinația A	Destinația B	Destinația C	Total
Sursa	M	35	37	33	4000
	L	30	26	36	6000
	Destinația falsă	0	0	0	2500
	Total	3000	4000	5300	12 500

Ca de obicei, se fac alocările inițiale pentru veniturile cele mai mari, respectiv 4000 M în B și apoi 5300 L în C, după care se acoperă căsuțele libere pentru a se obține totalurile pe rânduri și coloane. În final se obține următorul tabel:

		Destinația A	Destinația B	Destinația C	Total
Sursa	M	35	37 4000	33	4000
	L	30 700	26	36 5300	6000
	Destinația falsă	0 2.300	0 200	0	2500
	Total	3000	4000	5300	12 500

Se verifică prețurile din umbră:

$$M + B = 37$$
$$L + A = 30$$
$$L + C = 36$$
$$D + A = 0$$
$$D + B = 0$$

unde $M = 0$
$B = 37$
$D = -37$
$A = +37$
$L = -7$
$C = +43$

Costurile din umbră ale rutelor neutilizate sunt:

$$M + A = 0 + (+37) = +37.$$
$$M + C = 0 + (+43) = +43.$$
$$L + B = -7 + 37 = +30.$$

BCU "CAROL I" UNIVERSITY LIBRARY

Costurile din umbră sunt comparate apoi cu veniturile reale pentru a se vedea dacă există valori pozitive.

Pentru celula M:A = 35 – 37 = –12.
celula M:C = 33 – 43 = –10.
celula L:B = 26 – 30 = –4.

∴Alocările inițiale au fost optime, dând un total al veniturilor de:

$$(700 \times 30) + (4000 \times 37) + (5300 \times 36) = 359\ 800£$$

Rezultă o nesatisfacere cu 2300 de bucăți a clientului A și de 200 de bucăți a clientului B.

Pentru a putea fi satisfăcuți 2 din 3 clienți, ar trebui ca fie A, fie B, să fie satisfacuți, ca și C, respectiv:

Clientul A. Dacă cererea acestui client nu este satisfăcută, se poate acoperi complet cererea din celula Londra/B cu încă 200 de unități, rezultând o reducere a veniturilor de $200 \times 4 = 800£$.

Clientul B. Dacă cererea acestui client nu este satisfacută, atunci se poate acoperi complet cererea celulei Manchester/A cu încă 2,300 de unități, rezultând o scădere a veniturilor cu $2300 \times 2 = 4600£$

De aici rezultă că cel mai bine este să fie satisfăcuți clienții B și C, situație în care reducerea veniturilor ar fi de numai 800£ față de suma de 359 800£ care s-ar putea câștiga în absența acestei constrângeri.

Evaluare și recapitulare, partea 5

A1. a)

Căi posibile	Lungimea căilor, în zile
A – F – G – sfârșit	16
A – C – D – G – sfârșit	19
A – B – D – G – sfârșit	20
A – B – E – G – sfârșit	21

b) Calea critică este calea cu lungimea cea mai mare. Calea critică este, prin urmare, A - B - E - G - sfârșit, iar durata maximă a proiectului este de 21 zile.

c)

Activitatea	Durata activității	Termenul apropiat		Termenul îndepărtat		Flotarea totală *
		început	sfârșit	început	sfârșit	
A	7	0	7	0	7	0
B	3	7	10	7	10	0
C	2	7	9	9	11	2
D	4	10	14	11	15	1
E	5	10	15	10	15	0
F	3	7	10	12	15	5
G	6	15	21	15	21	0

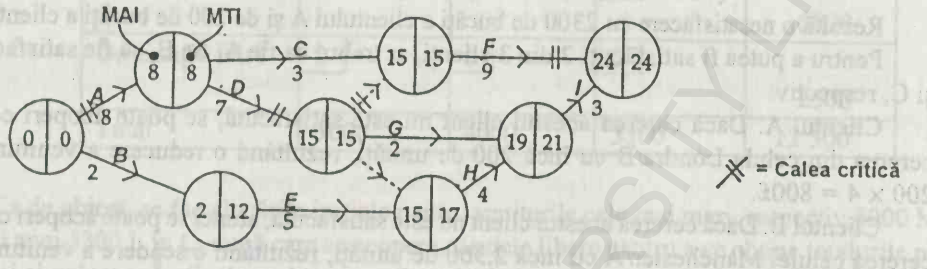
* Flotarea totală se calculează după cum urmează:

Momentul târziu de sfârșit – momentul apropiat de început – durata activității.

De exemplu: pentru activitatea F = 15 – 7 – 3 = 5 zile.

d) Dacă activitatea D are o durată cu 4 zile mai mare decât estimareainițială, prima zi nu va întârzia proiectul de ansamblu, deoarece se compensează cu flotarea totală. Următoarele 3 zile însă, vor prelungi momentul apropiat de sfârșit al activității D până în ziua a 18-a, prin aceasta întârziind declanșarea activității G și întregul proiect cu 3 zile.

A2. a)



Utilizând duratele date ale activităților, durata minimă a proiectului este de 24 de luni. Activitățile critice sunt A, D și F. Costul asociat este compus din (în mii £):

costurile activităților + depășirile

= (100 + 75 + 135 + 70 + 160 +255 + 30 + 90 + 55) + 24(5)

= 970 + 120 = 1090 (respectiv, 1 090 000£).

b) Singurele activități care pot fi avute în vedere sunt ADF, respectiv calea critică. Dacă toate aceste activități pot fi grăbite, durata proiectului se poate scurta la 18 luni, costurile asociate fiind:

(125 + 75 + 135 + 85 + 160 + 275 + 30 + 90 + 55) + 18(5) – 25

= 1095 (respectiv, 1 095 000£).

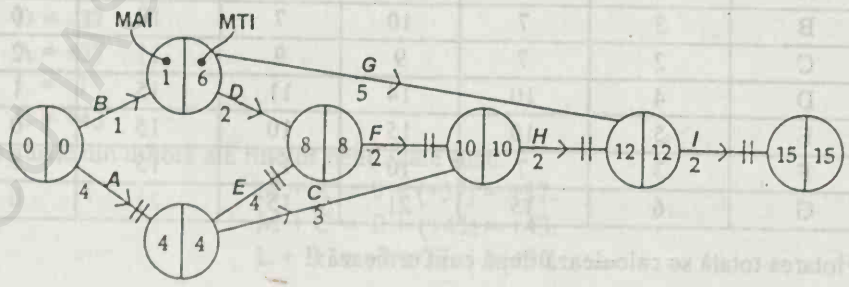
Chiar dacă grăbirea activităților pe calea critică poate să reducă durata proiectului la 18 luni, se oferă o bonificație numai pentru scurtarea acesteia la 20 de luni, ceea ce înseamnă că activitatea A nu trebuie scurtată, ci numai D și F. Rezultă o scurtare a proiectului cu 4 luni, la 20 de luni, pentru un cost de

1005 + 20(5) – 25 = 1080 (respectiv, 1 080 000£),

ceea ce înseamnă o economie de 10 000£ față de situația inițială.

e) Cu o bonificație de numai 15 000£ nu rezultă un beneficiu financiar direct din scurtarea duratei activităților D și F. Cu toate acestea, firma poate să fie interesată să termine lucrările mai devreme, chiar și cu un preț de cost mai ridicat, dacă acest lucru îi poate ajuta să preia un alt contract.

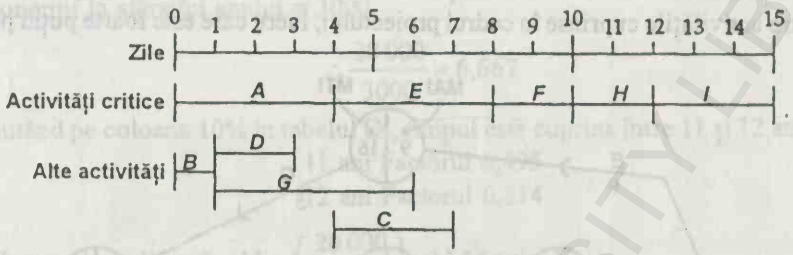
A3. a) Rețeaua



Calea critică este A, E, F, H, I.

Durata căii critice este de 15 zile.

b) Presupunând că toate activitățile încep cât mai curând posibil, următoarea diagramă reprezintă momentele în care încep și se sfârșesc activitățile.



În consecință, este necesară următoarea alocare a resurselor, pe o bază zilnică:

Ziua	Activitatea	Numărul personalului suplimentar
1	A, B	1 + 3 = 4
2, 3	A, D, G	1 + 1 + 1 = 3
4	A, G	1 + 1 = 2
5, 6	C, E, G	2 + 2 + 1 = 5
7	C, E	2 + 2 = 4
8	E	2 = 2
9, 10	F	2 = 2
11, 12	H	1 = 1
13, 14, 15	I	1 = 1

c) Costurile curente pentru 5 persoane = 15 zile × 5 × 500£ = 37 500£.

Dacă activitatea C este întârziată, începând abia în ziua a șaptea, numai 4 persoane sunt necesare, iar durata proiectului ar rămâne neschimbată. Costurile sunt de:

15 zile × 4 × 500£ = 30 000£.

Dacă durata este mărită, prin începerea activității B în ziua 1 și întârziind activitățile A, E. F. H. I cu o zi, și activitatea C până în ziua a 12-a, ar fi necesare numai 3 persoane, după cum urmează:

Ziua	Activitatea	Personalul total
1	B	3
2, 3	A, D, G	3
4, 5	A, G	2
6	E, G	3
7, 8, 9	E	2
10, 11	F	2
12, 13, 14	C	2
15, 16	H	1
17, 18,19	I	1

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

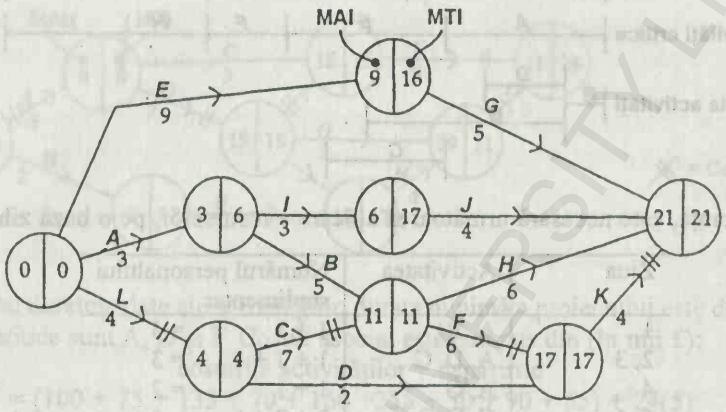
Prin consecință, durata este de 19 zile, cu următoarele costuri:

$$19 \times 3 \times 500£ = 28\ 500£.$$

Cum activitatea B necesită numai trei oameni, nu se poate realiza o reducere și mai mare de personal.

Analiza prezentată este realizată în ipoteza că personalul respectiv ar putea îndeplini oricare dintre activitățile cuprinse în cadrul proiectului, lucru care este foarte puțin probabil.

A4. a)



Calea critică este L, C, F, K cu o durată de 21 de zile.

b) Flotarea totală pentru fiecare activitate este următoarea:

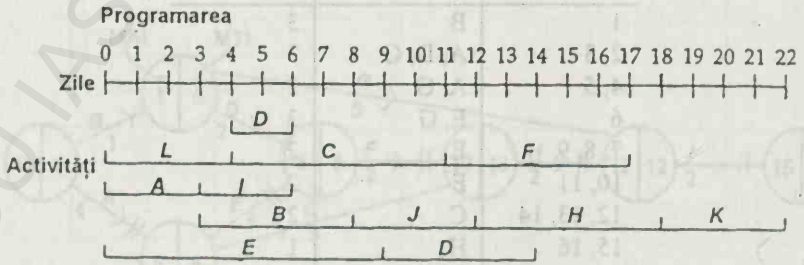
A : 3	E : 7	I : 11
B : 3	F : 0	J : 11
C : 0	G : 7	K : 0
D : 11	H : 4	L : 0

Flotarea totală = momentul târziu de început – momentul apropiat de sfârșit – durata activității

respectiv pentru activitatea G = 21 – 9 – 5 = 7.

Utilizarea diagramei de flotare poate fi găsită în text.

c) Dacă activitățile A, G și I încep în MAI, nu vor apărea întârzieri. Activitățile BHJK pot începe în momentele 3, 12, 8, 18 (sau 3, 8, 13, 18) cu o singură zi de creștere a duratei proiectului.



Evaluare și recapitulare, partea 6

A1.a) Din tabelul IX factorul de anuitate pentru 6 ani @ 10% = 4,355.

$\therefore$ Suma maximă = 10 000£ × 4,355 = 43 550£

b) Influxul net = 25 000 – 5000 = 20 000

Economii la sfârșitul anului = 3000

$$\therefore \frac{20\,000}{3000} = 6{,}667$$

Căutând pe coloana 10% în tabelul IX, timpul este cuprins între 11 și 12 ani, respectiv:

11 ani Factorul 6,495

12 ani Factorul 6,814

$$\therefore \text{Interpolarea liniară} = 11 + 1\left(\frac{20\,000}{3000}\right) \approx 11{,}54 \text{ ani.}$$

A2. a)

					£
Costuri actuale de încălzire					200 000
Anul 1 - costul	200 000	×	1,03	=	206 000
Anul 2 - costul	200 000	×	$(1,03)^2$	=	212 180
Anul 3 - costul	200 000	×	$(1,03)^3$	=	218 545
Anul 4 - costul	200 000	×	$(1,03)^4$	=	225 102
Anul 5 - costul	200 000	×	$(1,03)^5$	=	231 855
Anul 6 - costul	200 000	×	$(1,03)^6$	=	238 810

b)

			£
Economia în anul 1	5% × 206 000	=	10 300
Economia în anul 2	5% × 212 180	=	10 609
Economia în anul 3	5% × 218 545	=	10 927
Economia în anul 4	5% × 225 102	=	11 255
Economia în anul 5	5% × 231 855	=	11 593
Economia în anul 6	5% × 238 810	=	11 941

c) Calculul fluxului monetar scontat pentru 12% aplicată economiilor:

Anul	Fluxul monetar	Factorul de scontare	Valoarea actuală
1	10 300	0,893	9198
2	10 609	0,797	8455
3	10 927	0,712	7780
4	11 255	0,636	7158
5	11 593	0,567	6573
6	11 941	0,507	6054
			45 218

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Valoarea maximă care va trebui plătită de către companie este 45 218£.

d) Valoarea actuală a economiilor este mai redusă decât costul ferestrelor duble (£50.000) de aceea investiția nu este recomandată din punctul de vedere financiar.

Cu toate acestea, alți factori cum ar fi reducereazgomotului și a curentului pot îmbunătăți motivația personalului. Creșterea rezultantă a valorii clădirilor și costurile mai scăzute de întreținere în cazul noilor ferestre pot fi luate de asemenea în calcul în luarea deciziei de înlocuire a ferestrelor existente cu ferestre duble.

A3. a) Investiția de capital:

Anul 0	(150 000£) × 1000	=	(150 000£)	VA
Anul 6	10 000£ × 0,432	=	4320	VA
			(145 680£)	VA

Fluxurile monetare – la o cerere ridicată

Anul 1	60 000£ × 0,870	=	52 200£	VA
Anul 2	62 000£ × 0,756	=	46 872	VA
Anul 3	65 000£ × 0,658	=	42 770	VA
Anul 4	70 000£ × 0,572	=	40 040	VA
Anul 5	70 000£ × 0,497	=	34 790	VA
	3,353		216 672£	

Fluxurile monetare – cerere redusă

Anul 1 – 5	50 000£ × 3,353	=	167 650£	VA

Valoarea actuală netă =

Cerere ridicată: 216 672£ – 145 680 = 70 992£.

Cerere redusă: 167 650£ – 145 680 = 21 970£.

Valoarea actuală netă estimată = (70 992 × 0,7) + (21 970 × 0,3) = 56 285£.

b) = 12 000£ × 3,353 = 40 236£.

∴ Pe baza valorii estimate există o valoare potențială de 56 285£ – 40 236 = 16 049£ în favoarea acceptării noului produs.

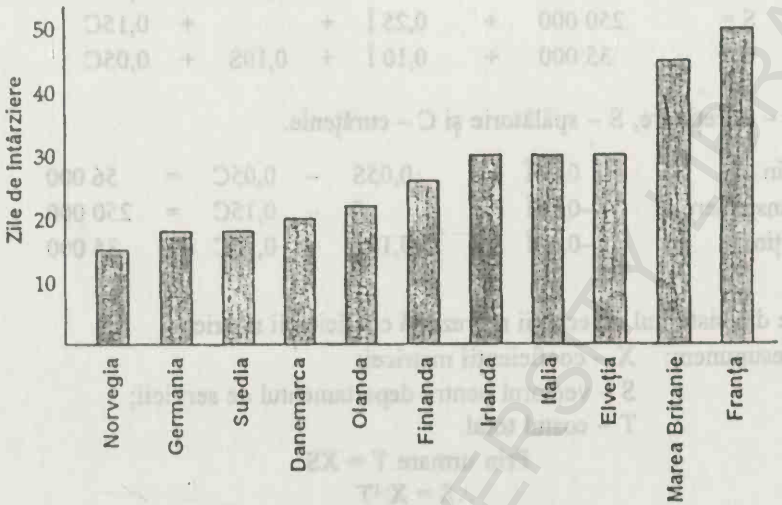
Comentariile obișnuite referitoare la valoarea estimată.

A4. a) Întârzierile în achitarea plăților pentru fiecare țară reprezintă diferențele dintre numărul mediu de zile ale creditului și zilele medii de debit:

Țara	Întârzierea plății, zile
Danemarca	20
Finlanda	26
Franța	50
Germania	18
Olanda	22
Irlanda	30
Italia	30
Norvegia	15
Suedia	18
Elveția	30
Marea Britanie	45

BCU IASI UNIVERSITY LIBRARY

Diagramă reprezentând întârzierile de plată pe țări



c) Progresia geometrică reprezintă rata cu care se acumulează valoarea unei facturi pe lună, respectiv la sfârșitul primei luni aceasta are o valoare de 10 000£ × 1,01, care crește cu o rație de 1,01 în fiecare lună.

Costurile suportate de către firmă este dobânda pierdută prin înțelegerea de întârziere a plății cu două luni. Se poate calcula comparând valorile dobânzilor pe două luni (cu care se presupune că a întârziat plata) și valorile în cazul plății imediate.

Valoarea dobânzilor în cazul plății imediate:

$$S = \frac{A(R^N - 1)}{(R-1)},$$

$$S = 10\,000£\left(\frac{1{,}01(1{,}01)^{12} - 1}{1{,}01 - 1}\right)$$

$$= 10\,000£\,(12{,}8093)$$

$$= 128\,093£.$$

$\therefore$ Elementul de dobândă = 128 093£ – 120 000 = 8093£.

Dobânda pe două luni

$$S = 10\,000£\left(\frac{1{,}01(1{,}01)^{10} - 1}{1{,}01 - 1}\right)$$

$$= 10\,000£\,(10{,}5668)$$

$$= 105\,668£.$$

$\therefore$ Dobânda = 105 668£ – 100 000 = 5668£.

$\therefore$ Costul = 8093£ – 5668 = 2425£.

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

A5. a) a_1)

$$\begin{aligned} \hat{I} &= 56\,000 + 0{,}05\,\hat{I} + 0{,}05S + 0{,}10C \\ S &= 250\,000 + 0{,}25\,\hat{I} + \phantom{0{,}05S} + 0{,}15C \\ C &= 35\,000 + 0{,}10\,\hat{I} + 0{,}10S + 0{,}05C \end{aligned}$$

unde: Î – întreținere, S – spălătorie și C – curățenie.

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{Prin} & 0{,}95\hat{I} & - & 0{,}05S & - & 0{,}05C & = & 56\,000 \\ \text{transpunere se} & -0{,}25\hat{I} & + & S & - & 0{,}15C & = & 250\,000 \\ \text{obține} & -0{,}10\hat{I} & - & 0{,}10S & - & 0{,}95C & = & 35\,000 \end{array}$$

Valorile din sistemul de ecuații reprezintă coeficienții matricei.

a_2) Presupunem: X – coeficienții matricei;
S – vectorul pentru departamentul de servicii;
T – costul total.

Prin urmare $T = XS$

$$\therefore S = X^{-1}T$$

Coeficienții matricei de calculează operând rând pe rând fiecare coeficient, așa cum se știe, obținându-se următorul rezultat:

$$\begin{bmatrix} 0{,}95 & -0{,}05 & -0{,}10 \\ -0{,}25 & 1 & -0{,}15 \\ -0{,}10 & -0{,}10 & 0{,}95 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Prelucrând fiecare rând, transformăm matricea în inversa ei.

b)

$$\begin{bmatrix} 1{,}083 & 0{,}067 & 0{,}125 \\ 0{,}293 & 1{,}034 & 0{,}194 \\ 0{,}145 & 0{,}116 & 1{,}086 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 56\,000 \\ 250\,000 \\ 35\,000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ L \\ C \end{bmatrix}$$

Rezultă

$$\begin{aligned} \hat{I} &= (1{,}083 \times 56\,000 + 1{,}034 \times 250\,000 + 0{,}125 \times 35\,000) \\ &= 81\,773£. \\ S &= (0{,}293 \times 56\,000 + 1{,}034 \times 250\,000 + 0{,}194 \times 35\,000) \\ &= 81\,698£. \\ C &= (0{,}145 \times 56\,000 + 0{,}116 \times 250\,000 + 1{,}086 \times 35\,000) \\ &= 75\,130£. \end{aligned}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

B.C.U. „M. EMINESCU" IAŞI

116.000 lei

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Această lucrare asigură o cunoaştere temeinică a tehnicilor cantitative, fiind necesară în activitatea profesională şi uşurând comunicarea în domeniul cercetării operaționale.

Textul include mai multe secțiuni de recapitulare şi evaluare pentru înțelegerea deplină a oricărui subiect, lucrarea putând fi utilizată şi pentru studiu independent.

Studiul trebuie să se desfăşoare respectând succesiunea capitolelor, lucrarea fiind concepută astfel încât să asigure o acumulare progresivă a cunoştințelor, fiecare capitol cuprinzând toate principiile necesare sau continuând prezentarea anterioară.

ISBN 973-31-2021-9

UAIC IAŞI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY